

悬臂输流管道的运动分岔现象和混沌运动¹⁾

金基铎 邹光胜 张宇飞

(沈阳航空工业学院工程力学系, 沈阳 110034)

摘要 研究受约束悬臂输流管道的稳定性和运动分岔问题. 在静态与动态失稳区域边界上的一个交叉点附近, 用理论分析的方法详细研究了该系统可能发生的复杂运动和运动分岔现象. 在动态失稳区域内发现了输流管道的概周期运动和由于概周期运动环面破裂而导致混沌的现象. 理论分析结果与数值模拟结果相吻合.

关键词 悬臂输流管道, 分岔现象, 概周期运动, 混沌运动, 稳定性

引 言

对管道振动问题的早期研究大都局限于线性分析的范围之内^[1]. 近 20 年来人们开始重视这类研究中的非线性问题, 并且陆续发现了许多重要现象^[2]. 其中, Paidoussis 等人^[3]研究了具有非线性运动约束的悬臂输流管道在定常内流作用下的动力学问题, 发现了该系统的混沌运动. 在以后的研究中他们进一步分析了此系统混沌运动的特性^[4~6], 并把数值模拟、理论分析和实验结果进行了对比分析和讨论. 本文作者研究了具有弹性支承和运动约束作用的悬臂输流管道系统^[7](见图 1), 考察了这种弹性支承对管道动态响应的影响, 并且在文献 [8] 中做了更进一步的分析和讨论. 通过数值分析和研究, 在该系统的动态失稳区域中发现了包括混沌运动在内的有多种不同运动的子区域(见图 2). 值得注意的是, 在静态与动态失稳区域边界上有一

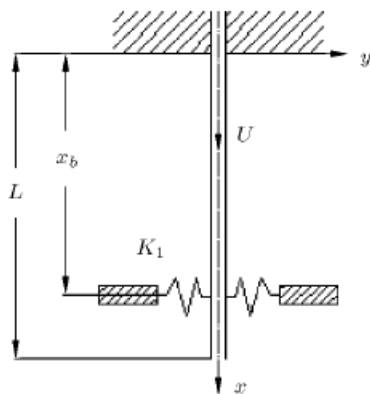


图 1 力学模型
Fig.1 Schematic of the model

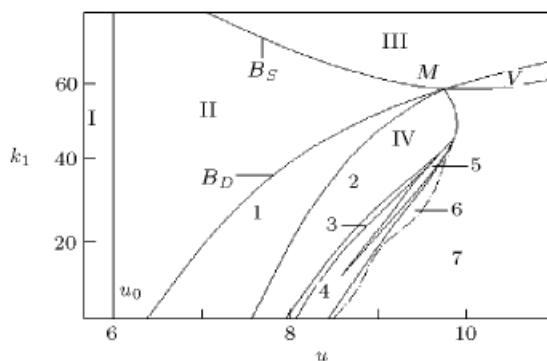


图 2 稳定性区域图 (文献 [8] 中图 4)
Fig.2 Sketch of stability regions. Reproduced from Ref.[8]

2001-04-04 收到第一稿, 2001-12-31 收到修改稿.

1) 辽宁省教委基金(20181051)资助项目.

个交叉点 M , 在该点系统的线性化矩阵 A 有一个零特征值和一对纯虚特征值^[8], 因而在与 M 点相对应的参数值附近管道运动将发生所谓余维二 (codimension two) 分岔现象^[8~11]. 事实上, 这对应于管道颤振和静态失稳相互耦合的情况. 本文将研究和确定这种分岔现象, 以便进一步了解此系统在该退化点附近可能发生的各种动态行为.

1 运动微分方程及退化系统

考虑图 1 所示的竖直放置的悬臂输流管道系统. x 表示管道横截面位置, y 表示管道轴线偏离平衡位置的位移. 在 $x = x_b$ 处有一弹性支承和运动约束^[8]. 在 $x-y$ 平面上管道的平面运动微分方程可表示为^[8]

$$aEI \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + [MU^2 - (M+m)(L-x)g] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2MU \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + (M+m)g \frac{\partial y}{\partial x} + (M+m) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (K_1 y + K_2 y^3) \delta(x - x_b) = 0 \quad (1)$$

式中 EI 为管道抗弯刚度, a 为 Kelvin-Voigt 黏弹性阻尼系数, L 和 m 分别为管道长度和单位长度质量, M 为单位长度流体质量, U 为流体流速, K_1 为支承弹簧刚度, K_2 为表示运动约束作用的三次弹簧刚度^[3], g 为重力加速度, δ 为 Dirac delta 函数, t 为时间, 假定管道横向位移 $y(x, t)$ 相对于 L 是小量.

引入下列无量纲化的变量和参数

$$\left. \begin{aligned} \eta = \frac{y}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \left(\frac{EI}{M+m} \right)^{1/2} \frac{t}{L^2}, \quad u = \left(\frac{M}{EI} \right)^{1/2} UL, \quad \gamma = \frac{M+m}{EI} g L^3 \\ \beta = \frac{M}{M+m}, \quad \alpha = \left(\frac{EI}{M+m} \right)^{1/2} \frac{a}{L^2}, \quad k_1 = K_1 \frac{L^3}{EI}, \quad k_2 = K_2 \frac{L^5}{EI}, \quad \xi_b = \frac{x_b}{L} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

把方程 (1) 无量纲化以后, 利用两振型 Galerkin 展式

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^2 \varphi_i(\xi) q_i(\tau) \quad (3)$$

进行离散化. 经过适当的整理和变换后可得一阶方程组

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (4)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (x_1, x_2, x_3, x_4)^T, & \mathbf{F}(\mathbf{X}) &= (0, 0, F_3, F_4)^T \\ x_1 &= q_1, & x_2 &= q_2, & x_3 &= \dot{q}_1, & x_4 &= \dot{q}_2 \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

式 (3) 中 $\varphi_i (i = 1, 2)$ 分别表示悬臂梁的第一、第二阶振型函数

$$\begin{aligned}\varphi_i(\xi) &= \cosh(\lambda_i \xi) - \cos(\lambda_i \xi) - \sigma_i [\sinh(\lambda_i \xi) - \sin(\lambda_i \xi)] \\ \sigma_i &= (\sinh \lambda_i - \sin \lambda_i) / (\cosh \lambda_i + \cos \lambda_i) \quad (i = 1, 2) \\ \lambda_1 &= 1.875, \quad \lambda_2 = 4.694\end{aligned}$$

式 (5) 中 a_i 和 $b_i (i = 1, 2, 3, 4)$, F_3, F_4 的表达式, 以及这些表达式中出现的 $e, b_{sr}, c_{sr}, d_{sr}, e_{sr}, g_{sr} (s, r = 1, 2)$ 等系数的表达式, 因篇幅所限在本文中没有给出, 可参考文献 [8] 中的式 (8).

在以下的分析中, 固定 $\gamma = 10$, $\xi_b = 0.82$, $k_2 = 100$ (参见文献 [3]), 只保留 u, k_1, α, β 为可变参数, 并令 $\mu = (u, k_1, \alpha, \beta)^T$. 我们注意到式 (4) 中的矩阵 A 是 μ 的函数, 但 $F(X)$ 与 μ 无关. 为了突出 A 对 μ 的依赖性, 以下改用 A_μ 来表示 A , 并把式 (4) 改写为

$$\dot{X} = A_\mu X + F(X) \quad (6)$$

由 A_μ 的特征值问题得到特征方程

$$\Omega^4 + H_1 \Omega^3 + H_2 \Omega^2 + H_3 \Omega + H_4 = 0 \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned}H_1 &= -(a_3 + b_4), & H_2 &= a_3 b_4 - b_3 a_4 - b_2 - a_1 \\ H_3 &= a_1 b_4 - b_1 a_4 + b_2 a_3 - a_2 b_3, & H_4 &= a_1 b_2 - b_1 a_2\end{aligned}$$

很显然, 系数 H_i 依赖于参数 μ . 设在 $\mu = \mu_0$ 时 A_{μ_0} 具有一个零特征值和一对纯虚特征值. 本文主要研究参数 μ 在这个重退化点 μ_0 (对应于图 2 中的点 $M^{[8]}$) 附近变化时的动态行为. 这个假定要求在 $\mu = \mu_0$ 处应满足条件

$$H_3 = H_1 H_2, \quad H_3 > 0 \quad (8)$$

$$H_4 = 0 \quad (9)$$

从式 (8) 中解出 k_1 后代入式 (9), 即可解出 $u_0(\alpha, \beta)$. 将 $u_0(\alpha, \beta)$ 再代回式 (8), 便得到 $k_{10}(\alpha, \beta)$. 这样, 我们得到依赖于参数 (α, β) 的重退化点

$$\mu_0 = (u_0(\alpha, \beta), k_{10}(\alpha, \beta), \alpha, \beta)^T \quad (10)$$

和 A_{μ_0} 的 4 个特征值

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_{2,3} = \pm i\omega_0, \quad \Omega_4 = -H_1 < 0 \quad (11)$$

式中 $\omega_0 = \sqrt{H_3/H_1}$.

为了研究系统在 μ_0 邻域的动态行为, 引入局部参数

$$\delta = (\delta_1, \delta_2)^T, \quad \delta_1 = u - u_0, \quad \delta_2 = k_1 - k_{10} \quad (12)$$

则

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 + (\delta_1, \delta_2, 0, 0)^T \quad (13)$$

在 $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ 邻域, 方程 (6) 可改写成

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}_\mu \mathbf{X} + \mathbf{F}(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{D}_\delta \mathbf{X} + \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (14)$$

当 $\delta = 0$ 时, 此方程对应于退化系统.

2 运动微分方程的定性简化

引入变换

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{Y} \quad (15)$$

式中 $\mathbf{V}$ 是由 $\mathbf{A}_{\mu_0}$ 的特征矢量组成的矩阵. 把变换式 (15) 代入式 (14), 得

$$\mathrm{d}\mathbf{Y}/\mathrm{d}\tau = (\mathbf{J} + \bar{\mathbf{A}}_\delta)\mathbf{Y} + \mathbf{f}(\mathbf{Y}) \quad (16)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_c = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_d &= -\alpha(\lambda_1^4 + \lambda_2^4) - 2\sqrt{\beta}u(b_{11} + b_{22}) \\ \bar{\mathbf{A}}_\delta &= \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{D}_\delta - \mathbf{D}_0)\mathbf{V} \equiv \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{c1} & \bar{\mathbf{A}}_{c2} \\ \bar{\mathbf{A}}_{d1} & \bar{\mathbf{A}}_{d2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}(\mathbf{Y}) &= \mathbf{V}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{V}\mathbf{Y}) \equiv (\mathbf{f}_c, \mathbf{f}_d)^T, \quad \mathbf{Y} = (\mathbf{y}_c, \mathbf{y}_d)^T \\ \mathbf{y}_c &= (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbf{R}^3, \quad \mathbf{y}_d = y_4 \in \mathbf{R} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

根据中心流形定理^[9]及本系统所具有的对称性

$$\mathbf{f}(\mathbf{Y}) = -\mathbf{f}(-\mathbf{Y}) \quad (18)$$

在局部上, 方程 (16) 可简化为中心流形上的一个三维系统^[10]

$$\mathrm{d}\mathbf{y}_c/\mathrm{d}\tau = (\mathbf{J}_c + \bar{\mathbf{A}}_{c1})\mathbf{y}_c + \mathbf{f}_c(\mathbf{y}_c, \mathbf{0}) + O(|\delta|^2|\mathbf{y}_c| + |\delta||\mathbf{y}_c|^3 + |\mathbf{y}_c|^5) \quad (19)$$

式中 $\bar{\mathbf{A}}_{c1}$ 是依赖于参数 δ 的 3×3 矩阵, 其元素为

$$a_{mn} = U_{m3} \sum_{i=1}^4 \bar{a}_i V_{in} + U_{m4} \sum_{i=1}^4 \bar{b}_i V_{in}, \quad (m = 1, 2, 3; \quad n = 1, 2, 3) \quad (20)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_1 &= -(2u_0 c_{11} \delta_1 + g_{11} \delta_2), & \bar{a}_2 &= -(2u_0 c_{12} \delta_1 + g_{12} \delta_2) \\ \bar{a}_3 &= -2\sqrt{\beta} b_{11} \delta_1, & \bar{a}_4 &= -2\sqrt{\beta} b_{12} \delta_1 \\ \bar{b}_1 &= -(2u_0 c_{21} \delta_1 + g_{21} \delta_2), & \bar{b}_2 &= -(2u_0 c_{22} \delta_1 + g_{22} \delta_2) \\ \bar{b}_3 &= -2\sqrt{\beta} b_{21} \delta_1, & \bar{b}_4 &= -2\sqrt{\beta} b_{22} \delta_1 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中的 V_{ij} 和 U_{ij} 分别表示矩阵 V 及其逆矩阵 V^{-1} 的第 i 行第 j 列元素. 因为是考虑 $|\delta| \ll 1$ 的情况, 矩阵 $J_c + \bar{A}_{c1}$ 将具有如下形式的特征值

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \zeta_2(\delta), & v_2 &= \zeta_1(\delta) + i\omega(\delta), & v_3 &= \zeta_1(\delta) - i\omega(\delta) = \bar{v}_2, \\ v_1, \zeta_1, \zeta_2, \omega &\in \mathbf{R}, & v_2, v_3 &\in \mathbf{C} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式中, 当 $\delta \rightarrow 0$ 时, $\zeta_1(\delta), \zeta_2(\delta) \rightarrow 0$, 而 $\omega(\delta) \rightarrow \omega_0$.

文献 [10] 中给出了把方程 (19) 化为正规型 (normal form) 的详细方法, 这里不再叙述具体的变换过程. 方程 (19) 的正规型方程为

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \rho(\zeta_1 + \gamma\rho^2 + \eta z^2), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \omega_1 + S_I\rho^2 + Z_I z^2, \quad \frac{dz}{d\tau} = z(\zeta_2 + \theta\rho^2 + \varepsilon z^2) \quad (23)$$

式中 $\gamma = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$. 方程 (23) 的第一、第三两式与 φ 无关, 因而可暂时略去表示相位角变化的第二个方程. 这样, 最终得到一个二维方程

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \rho(\zeta_1 + \gamma\rho^2 + \eta z^2), \quad \frac{dz}{d\tau} = z(\zeta_2 + \theta\rho^2 + \varepsilon z^2) \quad (24)$$

下面, 通过分析这个二维方程解的局部分岔现象来研究原系统在零平衡点附近的动态行为. 除了相位变化的性质以外, 在非退化情况下, 方程 (24) 的解和原方程 (4) 的解在局部上具有相同的定性性质^[10,11].

3 局部分岔

很显然, 方程 (24) 的系数 $\gamma, \eta, \varepsilon, \theta$ 都依赖于参数 α 和 β . 数值分析的结果表明, 在满足退化条件 (8) 和 (9) 的参数域内, $\gamma = -1, \eta < 0, \varepsilon = 1, \theta > 0$. 因此方程 (24) 可写为

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \rho(\zeta_1 - \rho^2 + \eta z^2), \quad \frac{dz}{d\tau} = z(\zeta_2 + \theta\rho^2 + z^2) \quad (25)$$

式中 $\eta < 0, \theta > 0$. 容易确定方程 (25) 的平衡点位置. 由于方程 (25) 关于 ρ 和 z 轴的对称性, 这里只给出了第一象限中的平衡点

$$\begin{aligned} \{1\} & (0, 0); & \{2\} & (\sqrt{\zeta_1}, 0), \zeta_1 > 0; & \{3\} & (0, \sqrt{-\zeta_2}), \zeta_2 < 0 \\ \{4\} & (\sqrt{(\zeta_1 - \eta\zeta_2)/(1 + \theta\eta)}, \sqrt{-(\theta\zeta_1 + \zeta_2)/(1 + \theta\eta)}), & & (\zeta_1 - \eta\zeta_2)/(1 + \theta\eta) > 0, \\ & & & (\theta\zeta_1 + \zeta_2)/(1 + \theta\eta) < 0 \end{aligned}$$

方程 (25) 等式右端的 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \zeta_1 - 3\rho^2 + \eta z^2 & 2\eta\rho z \\ 2\theta\rho z & \zeta_2 + \theta\rho^2 + 3z^2 \end{bmatrix}$$

在各平衡点处计算 Jacobi 矩阵的特征值便可以确定平衡点的稳定性, 同时还可以确定各平衡点附近的相流结构^[11]. 图 3 是在 δ_1 - δ_2 平面上确定的分岔集合线和各区域相平面图. 我们也可以从另一个渠道得到同样的开折结果. 引入变换

$$\tau \rightarrow -\tau, \quad \zeta_1 \rightarrow -\zeta_1, \quad \zeta_2 \rightarrow -\zeta_2 \quad (26)$$

则方程 (25) 变为

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \rho(\zeta_1 + \rho^2 - \eta z^2), \quad \frac{dz}{d\tau} = z(\zeta_2 - \theta\rho^2 - z^2) \quad (27)$$

此方程是文献 [11] 中研究过的一种系统. 方程 (27) 的系数与文献 [10] 中式 (7.5.2) 的系数之间有如下的对应关系

$$\begin{aligned} \zeta_1 &\leftrightarrow \mu_1, \quad \zeta_2 \leftrightarrow \mu_2, \quad -\eta \leftrightarrow b, \quad -\theta \leftrightarrow c, \quad -1 \leftrightarrow d \\ -1 - \eta\theta &\leftrightarrow d - bc = \nu \end{aligned}$$

而且, 由于 $\eta < 0, \theta > 0$, 所以文献 [11] 中式 (7.5.2) 的系数

$$b > 0, \quad c < 0, \quad \nu > 0 \quad (28)$$

因此, 方程 (27) 对应于文献 [11] 中的情况 VIa. 关于这种情况的开折, 可参考该文献的图 7.5.5. 如果考虑变换 (26) 的逆变换, 从该图容易得到图 3 的分岔集合和相平面图. 值得注意的是, 从平衡点 {4} 发生 Poincaré-Hopf 分岔的问题. 这种分岔发生于在平衡点 {4} 计算的 Jacobi 矩阵的迹等于零的时候, 即 $\text{tr}(\mathbf{J}) = 0$. 从这个条件我们得到分岔线 $\zeta_2 = \frac{\theta+1}{\eta-1}\zeta_1$. 计算表明, 在该线上 Poincaré-Hopf 分岔是退化的^[11]. 为了确定该分岔的稳定性 (即, 判断是超临界的还是亚临界的), 还需要考虑方程中更高次的非线性项. 关于这种开折的计算方法, 读者可参阅文献 [11]. 这种情况的开折计算通常都十分复杂, 特别像本文所研究的物理问题用原始物理参数计算其开折时会更为复杂和困难. 为此, 本文采用对分岔后的运动进行直接数值模拟的方法判断这种分岔的特性. 根据在该参数域对方程 (4) 进行的数值模拟结果我们推测, 在 $\zeta_2 = \frac{\theta+1}{\eta-1}\zeta_1$ 上发生的 Poincaré-Hopf 分岔是超临界的, 即分岔结果将产生一个围绕平衡点 {4} 的稳定极限环. 这个二维系统中的极限环运动实际上对应于三维方程 (23) 或者四维方程 (4) 的一种概周期运动. 关于这一点在下面将作进一步说明, 并且在下一节给出这种现象的数值模拟结果.

最后, 为了解释图 3 中结果的物理意义, 我们必须重新考虑方程 (23) 中曾被略去的表示相位变化的第二个方程. 如果考虑这种相位旋转的影响, 图 3 中的相平面图与三维方程 (23) 或者

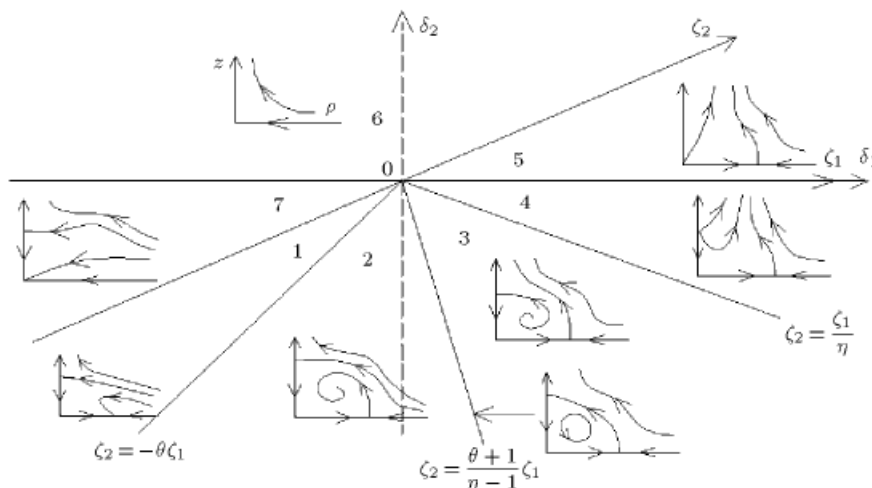


图 3 分岔图

Fig.3 Bifurcation set and phase portraits

四维方程 (4) 中的运动之间应有如下的对应关系:

- | | |
|--|-------------------------------|
| 二维系统 | 三维或四维系统 |
| 1) $(z, \rho) = (0, 0)$ (平衡点 {1}) | $\rightarrow$ 管道未变形的零平衡状态. |
| 2) $(z, \rho) = (\bar{z}, 0)$ (平衡点 {2}) | $\rightarrow$ 屈曲状态. |
| 3) $(z, \rho) = (0, \bar{\rho})$ (平衡点 {3}) | $\rightarrow$ 以零平衡位置为中心的周期运动. |
| 4) $(z, \rho) = (\bar{z}, \bar{\rho})$ (平衡点 {4}) | $\rightarrow$ 以屈曲后位置为中心的周期运动. |
| 5) 周期轨道 (极限环) | $\rightarrow$ 二维环面, 概周期运动. |

上式中的 $\bar{z}$ 和 $\bar{\rho}$ 分别表示在图 3 的相平面图图中固定点的 z 和 ρ 坐标值.

4 数值模拟

为了验证图 3 中的结果, 本文利用 4 阶的 Runge-Kutta 法求解了微分方程 (4), 并且在图 3 的各不同参数区域中数值模拟了系统的行为. 在计算中, 取 $\alpha = 0.005$ 和 $\beta = 0.2^{[8]}$. 此时, 与重退化分岔点 M 相对应的参数 u 和 k_1 的值分别为: $u_0 = 9.828245$, $k_{10} = 59.40064$.

图 4 给出了图 3 中各区域内运动的数值模拟结果. 它是把 (x_1, x_2, x_3, x_4) 四维空间中的相轨迹投影到 (x_1, x_3) 平面上的相平面图. 图 4(a)~图 4(g) 分别对应于图 3 中区域 1~7 的相平面图. 此外, 根据上一节中对相平面图物理含义的解释, 不难看出, 图 3 中各区域的相平面图与文献 [8] 中用数值方法得到的不同稳定性区域的运动 (图 2) 之间有如表 1 所示的对应关系.

表 1 图 3 与图 2 中各区域的对应关系

Table 1 Region relationship between Figs.3 and 2

Regions in Fig.3	1	2	3,4	5	6	7
Regions in Fig.2	1	2	7	V	III	II

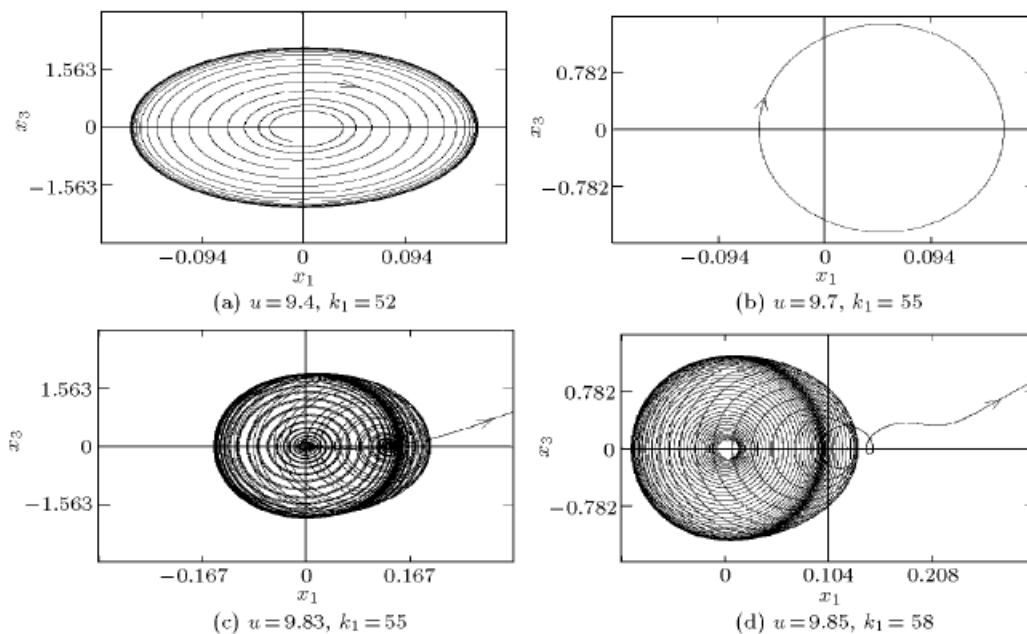


图 4 数值模拟结果

Fig.4 Numerical simulations of Eq.(4) projected onto (x_1, x_3) plane

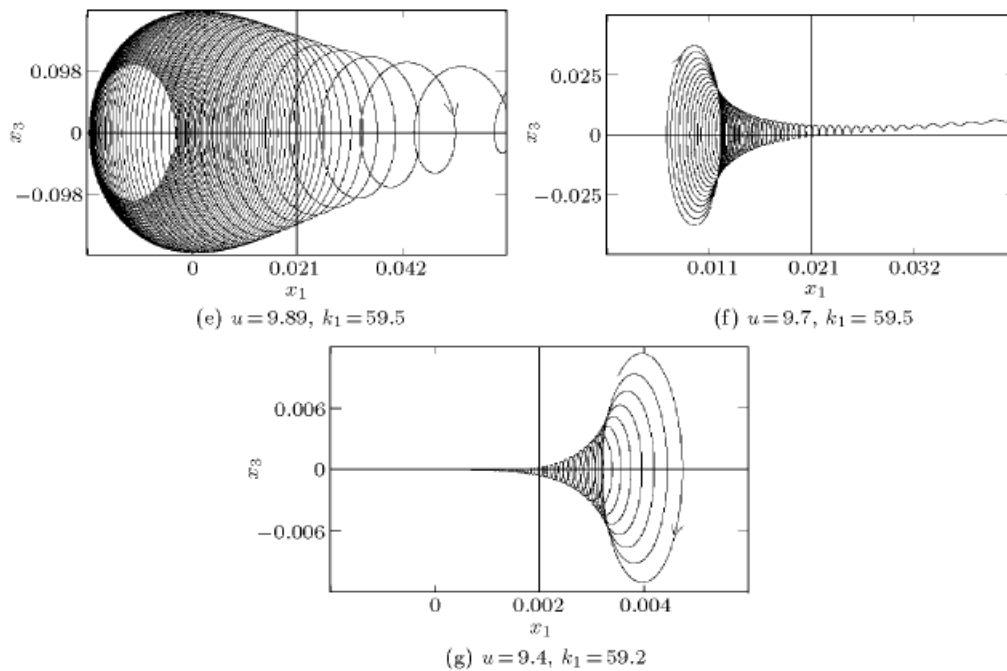
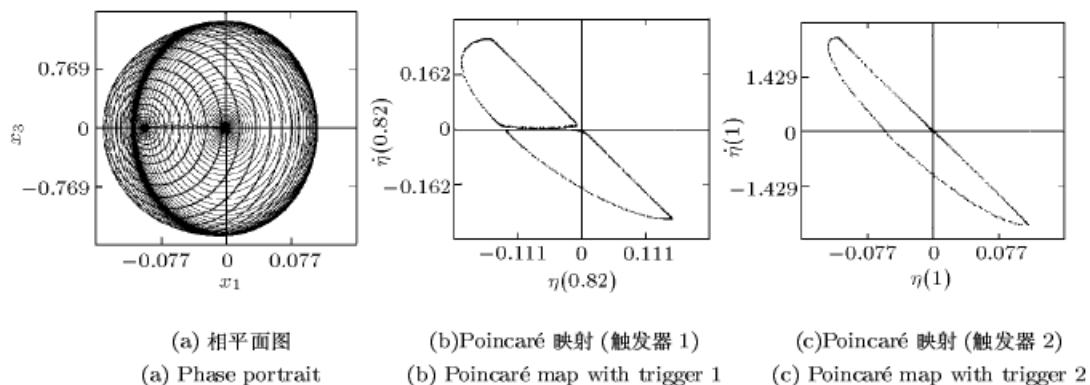


图 4 数值模拟结果 (续)

Fig.4 Numerical simulations of Eq.(4) projected onto (x_1, x_3) plane(continued)

而且, 图 3 中 δ_1 - δ_2 参数平面上各分岔集合线的走向与图 2 中 M 点附近各对应区域边界线的走向一致. 因此, 图 3 中的开折结果, 除了关于 Poincaré-Hopf 分岔线附近可能存在稳定极限环的推测以外, 事实上已得到了证明. 为了说明二维系统 (25) 确实存在围绕平衡点 {4} 的稳定极限环, 我们需要找到原四维方程 (4) 在对应参数域内的概周期运动. 本文主要是采用了画相轨迹和 Poincaré 映射图的数值模拟技术. Poincaré 映射图是采用了如下两个映射“触发器”^[4]:

1) 管道 $\xi = 1$ 处速度为零 (即 $\dot{\eta}(1, \tau) = \varphi_1(1)\dot{q}_1(\tau) + \varphi_2(1)\dot{q}_2(\tau) = 0$) 时记录管道 $\xi = \xi_b$ 处的状态;

图 5 系统的概周期运动 ($u = 9.829\ 15, k_1 = 57.5$)Fig.5 A quasiperiodic motion for $(u = 9.829\ 15, k_1 = 57.5)$

2) 管道 $\xi = \xi_b$ 处位移为零 (即 $\eta(\xi_b, \tau) = \varphi_1(\xi_b)q_1(\tau) + \varphi_2(\xi_b)q_2(\tau) = 0$) 时记录管道 $\xi = 1$ 处的状态.

图 5 是我们捕捉到的概周期运动的一个例子. 从 Poincaré 映射图中可以看到表示概周期运动的闭合曲线: 利用“触发器 1”得到的双闭合曲线和利用“触发器 2”得到的单闭合曲线.

5 讨论和结论

研究了悬臂输流管道在单点弹性支承和运动约束作用下的稳定性和运动分岔问题. 在静态与动态失稳区域边界上的一个交叉点附近, 利用微分方程的定性简化理论和局部分岔理论对该系统可能发生的运动进行了分析, 得到了管道因颤振和静态失稳相互耦合而产生的多种复杂的运动现象. 所得结果与文献 [8] 中用数值方法分析的结果是一致的. 此外, 分岔分析的结果还预测到管道动态失稳后另一种可能的运动形式——概周期运动. 由于该运动的发生区域非常狭窄, 在文献 [8] 中按一定步长逐点进行的数值模拟分析中未能发现这种运动.

值得关注的是, 当流速 u 和支承刚度 k_1 的值从图 2 中的点 M 沿一定路线向混沌区域 (区域 4) 变化时, 我们发现了因“概周期运动的环面破裂导致混沌”的现象 [12]. 图 6 是这种概周期运动环面破裂后逐渐进入混沌的一个例子. 这是与本系统中已经发现的 [8] “由倍周期分岔导致混沌”不同的另一条趋向混沌的路径. 由这两种不同路径产生的混沌如何交汇在一起, 或者说, 由某一路径产生的混沌如何演变成另一个路径产生的混沌, 这是值得进一步探讨的一个问题.

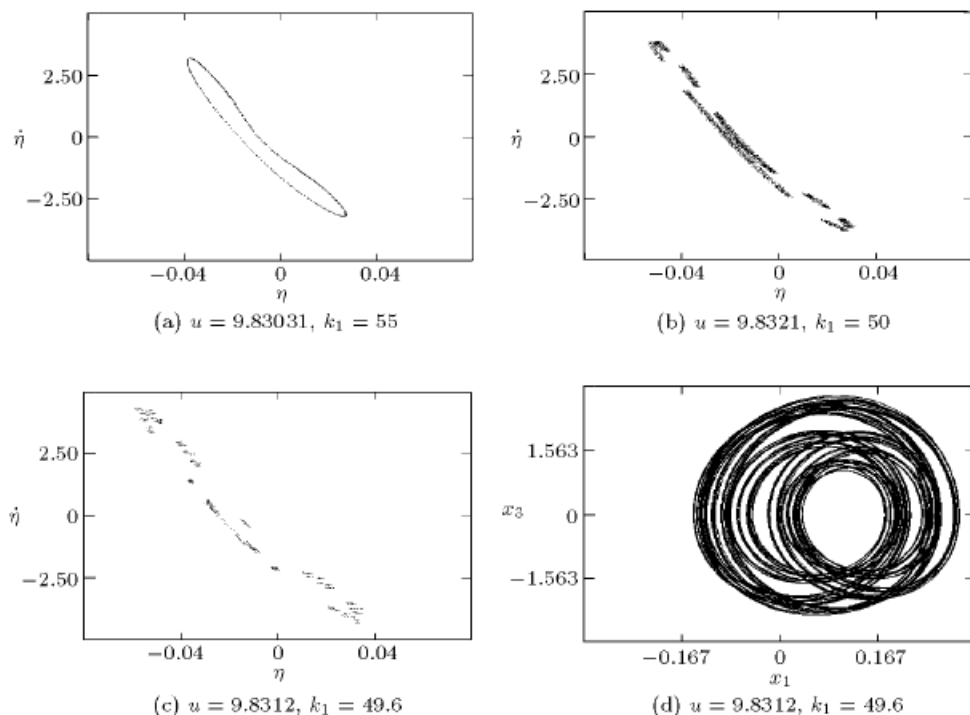


图 6 概周期运动环面破裂后进入混沌的 Poincaré 映射图 (触发器 2). 图 6(d) 是图 6(c) 的相轨迹图

Fig.6 Poincaré maps with trigger 2. Onset of chaos by breakup of the torus surface of quasi-periodic motions.

Fig.6(d) is the phase portrait of Fig.6(c)

另外需要说明的是, 在图 3 的 Poincaré-Hopf 分岔线上方程 (25) 退化为一个可积系统^[11]. 因此在该线上存在围绕中心点 $(\bar{z}, \bar{\rho})$ (即平衡点 {4}) 的闭曲线族和一个异宿闭轨线, 它们对应于其积分函数取不同‘能量值’ K 时的阶层曲线 (level curves). 在方程 (25) 上加上更高次非线性项以后, 用 Melnikov 方法就可以确定对应于哪个 K 值的阶层曲线经过 Poincaré-Hopf 分岔后变成了极限环, 同时也可以确定与该极限环相对应的参数值. 有人已经证明, 这个参数值是能量值 K 的一个单调连续函数 (见文献 [11], 1997). 因此, 当考虑被舍去的更高次非线性项时, 图 3 中的 Poincaré-Hopf 分岔线附近应存在发生极限环运动的一个参数区域和异宿分岔线. 图 7 给出了对图 3 中 Poincaré-Hopf 分岔线附近分岔图的修正和完善. 由于二维方程中的异宿分岔, 在其三维方程 (23) 中存在着鞍点的稳定与不稳定流形发生异宿缠结而导致混沌的可能性. 如果这种情况发生, 在 Poincaré-Hopf 分岔线附近应存在发生混沌运动的一个“楔形”区域^[11]. 但是, 我们在该区域进行的数值模拟中没有发现发生混沌的区域, 只发现概周期运动. 我们所发现的离重退化点 $M(u_0 = 9.828\,245, k_{10} = 59.400\,64)$ 最近的一个混沌运动位于 $k_1 = 50$, 已经远离了重退化点. 所以, 我们认为它不太可能是重退化点邻域发生的异宿缠结所产生的混沌. 还需要指出的是, 仅仅通过对二维系统 (25) 的理论分析我们还无法准确的判断原系统能否发生混沌. 这是因为, 关于高维系统 (三维方程 (23)) 中的混沌与二维系统中分岔之间的关系是目前还没有完全解决的课题^[11]. 另外, 由于我们的定性简化理论是局部的^[9,10], 所以原方程 (4) 和方程 (23) 之间仅在各自原点附近的局部区域上有相同的定性性质. 因此, 即使我们能够确定三维方程 (23) 中的混沌运动 (全局行为), 也不能由此推断原系统 (4) 一定存在混沌.

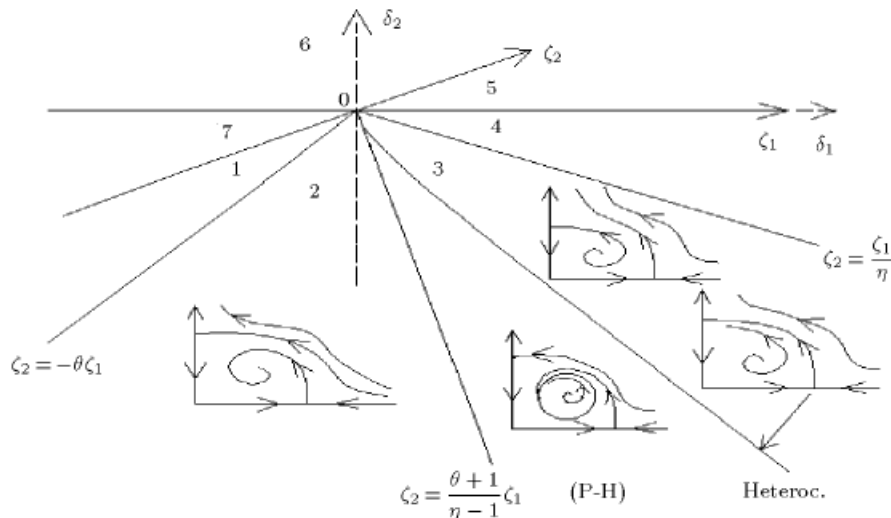


图 7 对图 3 的修正和完善

Fig.7 A completion of the unfolding shown in Fig.3

参 考 文 献

- 1 Paidoussis MP. Flow-induced instabilities of cylindrical structures. *Appl Mech Rev*, 1987, 40(2): 163~175
- 2 Paidoussis MP, Li GX. Pipes conveying fluid: a model dynamical problem. *Journal of Fluids and Structures*, 1993, 7: 137~204
- 3 Paidoussis MP, Moon FC. Nonlinear and chaotic fluid-elastic vibrations of a flexible pipe conveying fluid. *Journal of Fluids and Structures*, 1988, 2: 567~591

- 4 Paidoussis MP, Li GX, Moon FC. Chaotic oscillations of the autonomous system of a constrained pipe conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, 135(1): 1~19
- 5 Paidoussis MP, Li GX, Rand RH. Chaotic motions of a constrained pipe conveying fluid: comparison between simulation, analysis and experiment. *Journal of Applied Mechanics*, 1991, 58: 559~565
- 6 Paidoussis MP, Cusumano JP, Copeland GS. Low-dimensional chaos in a flexible tube conveying fluid. *Journal of Applied Mechanics*, 1992, 59: 196~205
- 7 金基铎, 林影, 邹光胜. 悬臂输流管的颤振和混沌运动分析. 振动工程学报, 1997, 10(3): 314~320 (Jin Jiduo, Lin Ying, Zou Guangsheng. Flutter and chaotic motions of a cantilevered fluid-conveying pipe. *Journal of Vibration Engineering*, 1997, 10(3): 314~320 (in Chinese))
- 8 Jin JD. Stability and chaotic motions of a restrained pipe conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 208(3): 427~439
- 9 Carr J. Applications of Center Manifold Theory. New York: Springer-Verlag, 1981
- 10 Jin JD, Matsuzaki Y. Bifurcation analysis of double pendulum with a follower force. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 154(2): 191~204
- 11 Guckenheimer J, Holmes P.J. Nonlinear Oscillations, Dynamical System and Bifurcation of Vector Fields. New York: Springer-Verlag, 1983 (Corrected fifth printing, 1997)
- 12 Moon FC. Chaotic Vibrations. New York: John Wiley, 1987

BIFURCATIONS AND CHAOTIC MOTIONS OF A CANTILEVERED PIPE CONVEYING FLUID¹⁾

Jin Jiduo Zou Guangsheng Zhang Yufei

(Department of Engineering Mechanics, Shenyang Institute of Aeronautical Engineering,
Shenyang 110034, China)

Abstract In this paper, we have studied some local stability and bifurcation problems of a cantilevered pipe conveying fluid with the motion limiting constraints and a linear spring support. The local behavior of the system in the neighborhood of a doubly degenerate point was analyzed by using some qualitative reduction methods in dynamical system theory, such as center manifold and Birkhoff's normal form theory. The analytical results obtained are found to be in good agreement with that obtained by means of numerical simulations in our early work. Furthermore, the analytical unfolding results show that the quasi-periodic motions may occur in certain parameter range in the system, which could not be detected in the early work using numerical method.

In addition we found that as the parameter values of the velocity of flow and the stiffness of the spring support vary from the doubly degenerate point to the sub region of chaotic motions detected in the early work along some boundary line in the stability region of the system chaotic motions occur as the results of the breakup of the quasi-periodic torus surface. It is known to be a different route to chaos from that of "periodic-doubling bifurcation" route which has been detected in this system earlier.

Key words cantilevered pipe, bifurcations, quasiperiodic motion, chaotic motion, stability

Received 4 April 2001, revised 31 December 2001.

1) The project supported by the Science Foundation of Liaoning Educational Committee of China (20181051).