

利用有限元构造 Michell 桁架的一种方法

周克民 胡云昌

(天津大学建工学院, 天津 300072)

摘要 提出了一种新的形成 Michell 桁架的有限元分析方法. 该方法以纤维增强正交各向异性复合板为材料模型, 根据有限元分析结果调整各单元的纤维密度和方向. 采用所提出的一种迭代格式, 经过少量迭代, 形成满足 Michell 准则的应变、内力场. 该方法适于不同几何形状、支撑条件及荷载情况. 算例结果表明该方法是有效的.

关键词 拓扑优化, Michell 桁架, 有限元方法, 正交异性

引 言

Michell^[1] 桁架理论是早期结构优化设计理论研究中的开创性工作, 它研究了应力约束下的重量最小的平面桁架设计方法, 指出结构的优化设计, 可以转化为寻求满足某一准则的结构. 这一准则被称为 Michell 准则, 满足这一准则的结构称为 Michell 桁架. Michell 桁架是由无限细、无限密的杆件构成的连续体, 并非工程意义上的桁架, 不具有工程使用价值. 然而, Michell 准则的建立, 为用解析法研究拓扑和布局优化奠定了理论基础. 目前各种结构拓扑和布局优化方法的检验, 也多以 Michell 桁架类结构为参照对象^[2]. 许多人也从不同方面对 Michell 桁架的性质进行了研究^[2~6]. 用均质化方法形成广义的 Michell 桁架是其中研究比较多的也是比较成功的方法^[7], 但也存在一些问题^[8].

直接由 Michell 准则形成 Michell 桁架是一个十分困难的数学问题. 为了寻求在 Michell 准则中提到的虚应变场, 需要求解双曲形偏微分方程组, 目前还缺乏一般的有效求解方法^[4,5]. 本文探讨了利用有限元方法获得相应的应变场; 利用引入的正交异性复合材料中纤维的分布, 获得等价形式的杆件分布, 从而获得待求的 Michell 桁架.

1 形成 Michell 桁架的有限元方法描述

1.1 在材料主轴方向上的物理关系

为利用有限元方法形成 Michell 桁架, 本文构造了一种纤维增强正交各向异性复合板. 在板的两个正交方向布置有弹性模量为 E , 密度分别为 t_L, t_T 的两组纤维. 称这两个正交方向为材料主轴方向, 分别记作 L, T . 密度 t_L (t_T) 表示沿 T (L) 方向单位宽度的截面上 L (T) 方向纤维的横截面面积, 亦可称为等效厚度, 量纲是长度. 材料的应力、应变列阵分别为 $[\sigma_L \ \sigma_T \ \tau_{LT}]^T$, $[\varepsilon_L \ \varepsilon_T \ \gamma_{LT}]^T$, 则有

$$\sigma_L = E\varepsilon_L, \quad \sigma_T = E\varepsilon_T \quad (1)$$

定义与应力相对应的单位宽度板的内力列阵为 $[\sigma'_L \ \sigma'_T \ \tau'_{LT}]^T$, 则有

$$\sigma'_L = t_L \sigma_L, \quad \sigma'_T = t_T \sigma_T$$

结合式 (1) 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_L &= E_L \varepsilon_L, & E_L &= Et_L \\ \sigma'_T &= E_T \varepsilon_T, & E_T &= Et_T \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

E_L, E_T 为两个方向的抗拉刚度. 假设剪切内力 τ'_{LT} 与剪切应变 γ_{LT} 间的关系为 $\tau'_{LT} = G_{LT} \gamma_{LT}$, 其中 G_{LT} 为抗剪刚度. 由于这两组纤维代表桁架中的杆件, 而平行杆件的横向之间不应有相互作用, 故可设材料的横向变形系数为 0. 将以上内力、应变关系写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \begin{Bmatrix} \sigma'_L \\ \sigma'_T \\ \tau'_{LT} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1/E_L & 0 & 0 \\ 0 & 1/E_T & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{LT} \end{bmatrix} \quad (3)$$

至此, 抗剪刚度 G_{LT} 尚未确定, 下面予以讨论.

1.2 确定抗剪刚度

建立 $x-y$ 坐标系, 材料主轴 L 方向与 x 轴夹角为 θ . 沿坐标轴方向上的内力、应变列阵分别为 $[\sigma'_x \ \sigma'_y \ \tau'_{xy}]^T, [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T$, 则利用微元体平衡关系和变形几何关系分析可得

$$[\sigma'_L \ \sigma'_T \ \tau'_{LT}]^T = \mathbf{T}_\sigma [\sigma'_x \ \sigma'_y \ \tau'_{xy}]^T \quad (4)$$

$$[\varepsilon_L \ \varepsilon_T \ \gamma_{LT}]^T = \mathbf{T}_\varepsilon [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T \quad (5)$$

式中 $\mathbf{T}_\sigma, \mathbf{T}_\varepsilon$ 为内力、应变转换矩阵. 将式 (4), (5) 代入式 (3) 中并整理得

$$[\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T = \bar{\mathbf{S}} [\sigma'_x \ \sigma'_y \ \tau'_{xy}]^T, \quad \bar{\mathbf{S}} = \mathbf{T}_\varepsilon^{-1} \mathbf{S} \mathbf{T}_\sigma \quad (6)$$

其中 $\bar{\mathbf{S}}$ 为沿坐标轴方向的柔度矩阵. 部分元素为

$$\bar{S}_{11} = \frac{1}{E_x} = \frac{\cos^4 \theta}{E_L} + \frac{\sin^4 \theta}{E_T} + \frac{\sin^2 2\theta}{4G_{LT}} \quad (7)$$

$$\bar{S}_{33} = \frac{1}{G_{xy}} = \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} \right) \sin^2 2\theta + \frac{\cos^2 2\theta}{G_{LT}} \quad (8)$$

容易验证, $E_x(G_{xy})$ 表示在 $x-y$ 坐标下当 $\sigma'_x(\tau'_{xy})$ 不为 0, 其它内力为 0 时 σ'_x 和 $\varepsilon_x(\tau'_{xy}$ 和 $\gamma_{xy})$ 间的比值, 可以理解为偏轴刚度. 对式 (7) 计算导数可分析得偏轴刚度的极值. 当 $G_{LT} < E_L/2$ 时, E_x 的最大值发生在主轴方向, 这是符合在 Michell 桁架性质的. 因为在 Michell 桁架中, 荷载由杆件以轴力形式传递, 弹性模量的最大值应沿杆 (即材料主轴) 的方向. 由式 (8) 可知, 主轴方向的剪切刚度 G_{LT} 并不影响材料在 45° 方向的偏轴剪切刚度, 而主要是决定主轴方向的剪切刚度. 当 $G_{LT} > \frac{E_L E_T}{E_L + E_T}$ 时, G_{xy} 的最大值发生在主轴方向. Michell 桁架在主轴方向应该没有剪切刚度, 但为避免刚度矩阵奇异或病态, G_{LT} 仍要足够大. 计算表明, G_{LT} 过大影响收敛精度和速度, 过小则迭代不稳定. 综上因素, 本文取 $G_{LT} = (E_L + E_T)/4$. 注意到 $\frac{E_L E_T}{E_L + E_T} < \frac{E_L + E_T}{4} < \frac{E_L}{2}$, 所以, 此时 E_x 和 G_{xy} 的最大值都发生在主轴方向. 当迭代收敛

后, 由于主轴方向的剪切应变趋于 0, G_{LT} 对结果的影响并不大. 最后确定弹性矩阵 D 完全确定

$$D = T_{\sigma}^{-1} S^{-1} T_{\varepsilon} = Et_m \begin{bmatrix} 1 + R_t \cos 2\theta & 0 & 0.5R_t \sin 2\theta \\ 0 & 1 - R_t \cos 2\theta & 0.5R_t \sin 2\theta \\ 0.5R_t \sin 2\theta & 0.5R_t \sin 2\theta & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$t_m = \frac{1}{2}(t_L + t_T), \quad R_t = \frac{t_L - t_T}{t_L + t_T}$$

1.3 有限元分析方法

由虚功原理不难得到单元平衡方程: $k\delta^e = p^e$. 其中 δ^e, p^e 分别为单元结点位移列阵, 荷载列阵; k 为单元刚度矩阵

$$k = \iint_A B^T D B dA$$

其中 B 为单元应变矩阵. 由于厚度 t_L, t_T 已包含在 D 中, 所以不再显含在上式中. 单元应变列阵为: $[\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T = B\delta^e$. 应变主轴方向, 及其主应变的绝对值为

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (9a)$$

$$\varepsilon_{1,2} = \left| \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha \right| \quad (9b)$$

计算过程如下:

- (1) 将设计区域分割成有限单元, 本文采用矩形单元;
- (2) 以每个单元的材料主轴方向 θ_i 及主轴方向的纤维密度 t_{Ti}, t_{Li} , (n 为单元个数) 为设计变量, 设定初始值: $\theta_i = 0, t_{Ti} = t_{Li} = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$);
- (3) 进行有限元分析, 得到各单元形心处的主应变的大小 $\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}$ 及方向 α_i ($i = 1, 2, \dots, n$);
- (4) 转动各单元的材料主轴到主应变方向, 调整两个材料主轴方向的纤维密度

$$\theta_i^{k+1} = \alpha_i^k$$

$$t_{Li}^{k+1} = \begin{cases} t_{Li}^k \varepsilon_{1i}^k / \varepsilon_p & t_{Li}^k \varepsilon_{1i}^k / \varepsilon_p \geq t_c \\ t_c & t_{Li}^k \varepsilon_{1i}^k / \varepsilon_p < t_c \end{cases}$$

$$t_{Ti}^{k+1} = \begin{cases} t_{Ti}^k \varepsilon_{2i}^k / \varepsilon_p & t_{Ti}^k \varepsilon_{2i}^k / \varepsilon_p \geq t_c \\ t_c & t_{Ti}^k \varepsilon_{2i}^k / \varepsilon_p < t_c \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$t_c = 0.01 \times \max_{i=1,2,\dots,n} \{t_{Li}^k, t_{Ti}^k\}$$

式中的上标 $k, k+1$ 表示迭代次数, n 为单元数, ε_p 为允许应变, t_c 是为避免单元内纤维密度过小可能导致刚度矩阵奇异而引进的密度下限值. 这里取所有单元最大厚度的 1%.

重复 (3),(4) 两步, 直到收敛. 本文以前后两次计算得到的无量纲化重量 $\bar{\Phi} = \Phi \sigma_p / Ph \rho$ 的相对误差小于 0.1% 为收敛判据. 其中 $\Phi = \sum_{i=1}^n (t_{Li} + t_{Ti}) A_i$ 为桁架体积, A_i 为单元面积, h 为宽度, ρ 为单位体积的重量. 由于应变场是由有限元方法求出来的, 这就保证了应变场满足变

形协调条件, 而迭代收敛条件保证了最后结果中, 每个单元的材料主轴方向与应变主轴方向一致, 两个主方向的应变分别达到允许应变, 或由于纤维密度取下限值 (即几乎没有材料), 可以认为内力趋近于 0. 即符合 Michell 准则了. 最终优化结果的各单元厚度是不同的, 而且同一单元的两个主轴方向的“等效厚度”也不同. 相对其他方法, 这样更符合理论上的 Michell 桁架.

1.4 Michell 桁架的形成

Michell 桁架一般被分成 5 种区域. 本文所研究的问题限定在下述区域仅发生在孤立奇点上的情况.

$$S^+ : \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_p, \quad \sigma'_1 > 0, \sigma'_2 > 0$$

$$S^- : \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_p, \quad \sigma'_1 < 0, \sigma'_2 < 0$$

其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 为主应变, σ'_1, σ'_2 为主应变方向上的内力. ε_p 为给定的允许应变. 因此, 仅在孤立点上不能由式 (9a) 求出主应变方向, 此时, 可由相邻单元插值得出. 具体形成过程是:

过每个集中力作用点形成两条正交的主应变迹线, 当这些曲线与其它集中力作用点相交时, 则在该曲线位置形成一杆件, 其中的一部分杆件构成了 Michell 桁架的边界. 沿边界杆件等距地做出正交的另一族主应变迹线作为分布杆, 其中在相应方向纤维密度取下限值的区域不设杆件. 即分布杆是从边界集中杆位置开始布置的.

在集中力作用点, 如果是 S^+ 或 S^- 区域, 按 Michell 准则, 该区域内任一方向都是优化的, 所以在该点根据主应变方向难以判断应沿哪些方向布置分布杆. 但从平衡方面考虑, 却不应在所有方向都布置杆件, 采用上述作法就可避免这一困难. 上述集中力也包括由约束反力. 另外, 考虑到计算误差的存在, 当曲线与结点位于同一单元时即可认为曲线交于该结点. 事实上, Michell 桁架是由无限细、无限密的杆件组成, 例题中当然只能画出其中一部分杆件, 以便与其它结果作直观的比较.

2 算 例

例 1 原结构是长宽比为 3 的矩形板, 如图 1 虚线所示, 左端固定, 右端中点作用一向下的集中力 P . 各参数取值为: $h = 0.1\text{m}$, $p = 6\text{kN}$, $\rho = 1.0\text{g/mm}^3$, $E = 68.89\text{GPa}$, $\sigma_p = 160\text{MPa}$ (在以下例题中取值相同). 使用水平 $\times$ 竖直为 $60 \times 20 = 1200$ 个矩形单元. 图中给出了迭代 16 次时得到的 Michell 桁架, 对应 $\bar{\Phi}$ 为 14.635, 与解析解 13.597 相差为 7.6%. 图 2 是解析解的结果 [5]. 另外, 采用均质法得到的带孔板, 以及使用准则法迭代 (DCOC) 得到的离散杆系也有类似的拓扑优化结果 [4].

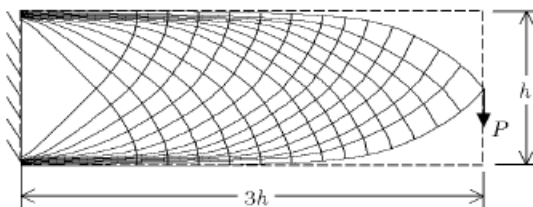


图 1 例 1 原结构及本文结果

Fig.1 Initial structure and result given by this paper of example 1

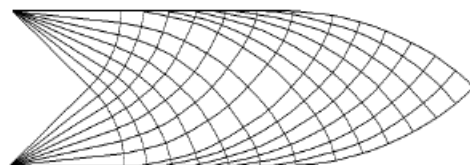


图 2 例 1 解析解

Fig.2 The analytical solution of example 1

例 2 原结构是长宽比为 2 的矩形板, 如图 3 虚线所示, 下边两端分别铰支, 下边中点作用一向下的集中力 P . 使用水平 $\times$ 竖直为 $40 \times 20 = 800$ 个矩形单元. 图中给出了迭代 16 次时得到的 Michell 桁架. $\bar{\Phi} = 3.3557$. 与解析解 3.1416 相差 6.8%. 图 4 给出解析分析得到的拓扑优化结构 [5].

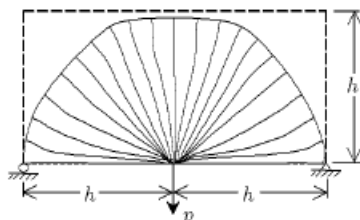


图 3 例 2 原结构及本文结果

Fig.3 Initial structure and result given by this paper of example 2

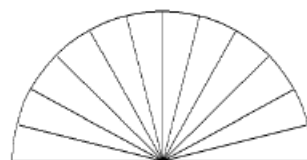


图 4 例 2 解析解

Fig.4 The analytical solution of example 2

例 3 原结构是长宽比为 2 的矩形板, 如图 5 虚线所示, 左端固定, 上边中点及右角点各作用一向下的集中力 P . 使用水平 $\times$ 竖直为 $40 \times 20 = 800$ 个矩形单元. 图中给出了迭代 15 次时得到的拓扑优化结构.

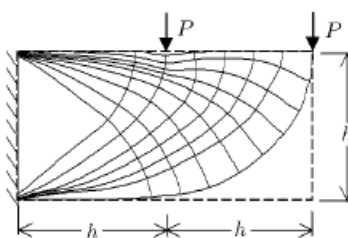


图 5 例 3 原结构及本文结果

Fig.5 Initial structure and result given by this paper of example 3

3 结 语

本文使用各向正交异性材料本构关系和有限元分析方法, 给出形成 Michell 桁架的一种数值分析方法. 该方法适于各种几何形状、支撑条件及荷载情况, 并可以推广到三维问题. 为将 Michell 理论直接应用于结构拓扑优化进行了必要的基础性研究工作.

参 考 文 献

- 1 Michell AGM. The limits of economy of material in frame-structures. *Phil Mag*, 1904, 8: 589~597
- 2 Rozvany GIN. Exact analytical solutions for some popular benchmark problems in topology optimization. *Struct Optim*, 1998, 15: 42~48
- 3 Hegemier GA, Prager W. On Michell trusses. *Int J Mech Sci*, 1969, 11: 209~215
- 4 Rozvany GIN. Basic geometrical properties of exact optimal composite plates. *Comput Struct*, 2000, 76: 263~275
- 5 Lewinski T, Zhou M, Rozvany GIN. Extended exact solutions for least-weight truss layouts. *Int J Mech Sci*, 1994, 36(5): 375~419
- 6 Hemp WS. Optimum Structure. Oxford: Clarendon Press, 1973. 70~101

- 7 Hassani B, Hinton E. A review of homogenization and topology optimization. *Comput Struct*, 1998, 69: 707~756
- 8 Sigmund O, Petersson J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Struct Optim*, 1998, 16: 68~75

A METHOD OF CONSTRUCTING MICHELL TRUSS USING FINITE ELEMENT METHOD

Zhou Kemin Hu Yunchang

(Civil and Building Engineering School of Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract A new method of constructing Michell truss based on finite element analysis was presented. The orthotropic composite plates with fibre-reinforcement was used as the material model. The direction and density of fibre, which determining the constitutive parameters of the materials, were taken as design variables. A iterating schemes was suggested by this paper to determine these variables. According to the results of finite element analysis, the direction of the fibre in each finite element was turned to the direction of principal strain, and the density of fibre in each finite element was increased (or decreased) when the strain in the same direction is greater (or less) than allowable strain. It induced the changing of the stiffness in the two orthogonal direction in each element during the process of the iteration. The strain and internal force field satisfying Michell criteria was formed after several iteration. At the same time, the across areas and the direction of the bar in the continuum body were obtained. According to these results, the optimum truss is formed. By this method, the structure in any shapes, with any supporting and loading condition can be calculated. The checkerboard problem was avoid and more detail structural can be obtain by using less elements. Several examples are used to demonstrate the efficiency and effectiveness of the proposed method.

Key words topological optimization, Michell truss, finite element method, orthotropic