第 34 卷 第 5 期 力 学 学 报 Vol. 34, No. 5
2002 年 9 月 ACTA MECHANICA SINICA Sep., 2002

湍流两相流的脉动速度联合 PDF 输运方程 1)

赵海波 柳朝晖 郑楚光 王汉封
(华中科技大学煤燃烧国家重点实验室，武汉 430074)

摘要 概率密度函数 (PDF) 的方法是构造两相湍流模型的一种重要的方法. 构建气体 - 颗粒速度联合 PDF 输运方程的关键是颗粒所见气体微团速度的 Langevin 方程. 首先由 N-S 方程出发，精确推导出颗粒所见气体微团脉动速度的 Langevin 方程，进而通过理论分析表明，对比通常采用的颗粒所见气体微团瞬时速度的 Langevin 方程而言，采用前者能有效地减少关联量的统计偏差. 最后，给出了颗粒 - 气体脉动速度的联合 PDF 输运方程.

关键词 概率密度函数，两相流， Langevin 方程，偏差，输运方程

引 言

湍流两相流动双流体模型的关键问题是两相湍流模型. 两相湍流模型的几个关键问题是两相速度关联的封闭，两相流中气相湍流耗散率的封闭和颗粒壁面边界条件. 目前，几乎所有的两相湍流模型都低估了两相雷诺应力，所以构建更为合理的两相速度关联的模型是改善两相湍流模型的必由之路. 概率密度函数 (PDF) 方法提供了符合湍流脉动机理的描叙两相湍流运动的一条行之有效的途径，它已经成为构造两相湍流模型的一种重要的方法. PDF 方法的关键之一是如何构造颗粒所见气体微团速度的 Langevin 方程，从而得到合理的联合 PDF 输运方程. Zaichik[1], Reeks[2] 和 Simonin[3] 由概率论和统计力学出发，建立 PDF 输运方程，进行统计平均或质量加权平均，建立颗粒雷诺应力方程，并且通过封闭 PDF 方程来封闭颗粒雷诺应力方程. 其中，Zaichik[1], Reeks[2] 等分别独立地建立了颗粒位置 - 速度的拉氏联合 PDF 输运方程，并封闭其中的条件期望项得到封闭形式的颗粒雷诺应力方程，给出了其中两相脉动速度关联的封闭式. Simonin[3] 则建立了气 - 粒两相速度的联合 PDF 输运方程，其中对颗粒所见气体脉动速度用 Langevin 随机模型进行模拟，封闭了 PDF 方程. 周力行和李勇 [4] 建立了颗粒和气体瞬时量和脉动量的欧拉联合 PDF 输运方程，建立了 k-ε-PDF 和 DSM-PDF 模型，用于模拟突扩回流和旋流两相流动. 柳朝晖等 [5~9] 建立了雷诺应力 - 拉氏 PDF 两相湍流模型和两相有燃烧颗粒 PDF 输运方程模型，其中采用颗粒所见气体微团瞬时速度的 Langevin 方程来构建气体 - 颗粒瞬时速度联合 PDF 输运方程，并用 Monte-Carlo 方法求解两相流的 PDF 输运方程. 如何求解 PDF 输运方程也是 PDF 方法的一个重要问题. 数值模拟表明采用 Monte-Carlo 方法求解 PDF 输运方程会造成计算结果的统计偏差，最近，有研究者系统地分析了该算法的各种导致误差因素，表明若采用脉动量代替瞬态量构造气体的 PDF 输运方程，可有效地减少计算偏差 [10,11].

本文是我们构建先进合理的两相湍流模型工作的一部分，从数值解法的角度出发进行理论分析，试图提出一种更为合理的两相脉动速度关联 PDF 输运方程，不仅解决采用 Monte- Carlo

2001-04-01 收到第一稿， 2001-08-21 收到修改稿.
1) 国家重点基础研究专项经费 (G199907012) 和国家自然科学基金 (50006003) 资助项目.

方法求解 PDF 输运方程时造成统计量的统计偏差的问题，而且更合理地封闭两相湍流模型的两相速度关联．首先，精确推导出颗粒所见气体微团脉动速度的 Langevin 方程；然后针对于所求解关联量的统计偏差方面，分别对颗粒所见气体微团瞬时速度的 Langevin 方程和颗粒所见气体微团脉动速度的 Langevin 方程进行了一系列的理论分析；最后，给出了颗粒 - 气体脉动速度的联合 PDF 输运方程.

1 颗粒所见气体微团脉动速度的 Langevin 方程精确推导

Simonin[3] 提出了颗粒所见气体微团瞬时速度的 Langevin 方程，如下

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}_{gi}}{\mathrm{d}t} = g_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\upsilon\frac{\partial U_{gi}}{\partial x_j}\right] + (\tilde{u}_{pj} - \tilde{u}_{gj})\frac{\partial U_{gi}}{\partial x_j} + G_{gp,ij}(\tilde{u}_{gj} - U_{gj}) + B_{gp}^{1/2}\omega_i \tag{1}$$

假设所研究的流体的密度为常密度 $\langle\rho\rangle$, 密度与温度的关系为线性关系．由 N-S 方程和气相的连续性方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k v_i) = -\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x_i} + g_i\Big(\frac{\partial\rho}{\partial T}\Big)_p\Delta T + \frac{\partial}{\partial x_k}\Big[\mu\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\Big) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik}\Big]\\&\frac{\partial}{\partial t}(\langle\rho\rangle) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\langle\rho\rangle U_i) = 0\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

对 N-S 方程作雷诺平均，并与气相的连续性方程联立求解可以得到关于平均压力梯度的表达式如下

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\langle P\rangle) = -\rho\frac{\mathrm{d}U_{gi}}{\mathrm{d}t} + \rho u_{gj}\frac{\partial U_{gi}}{\partial x_j} + \rho g_i + \rho\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\nu\frac{\partial U_{gi}}{\partial x_j}\Big) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\overline{u_{gj}u_{gi}}) \tag{3}$$

引入颗粒所见到的气体微团的脉动速度 $u_{gi} = \tilde{u}_{gi} - U_{gi}$ ，联立 (1),(3) 两式，化简，可以得到颗粒所见的气体微团的脉动速度的 Langevin 方程如下

$$\frac{\mathrm{d}u_{gi}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_{gj}u_{gi}}) - u_{gj}\frac{\partial U_{gi}}{\partial x_j} + (\tilde{u}_{pj} - \tilde{u}_{gj})\frac{\partial U_{gi}}{\partial x_j} + G_{gp,ij}u_{gj} + B_{gp}^{1/2}\omega_i \tag{4}$$

如果不考虑由于颗粒与流体微团的轨迹的相对滑移造成的增加量， (4) 式可以如下表示

$$\frac{\mathrm{d}u_{gi}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_{gj}u_{gi}}) - u_{gj}\frac{\partial U_{gi}}{\partial x_j} + G_{gp,ij}u_{gj} + B_{gp}^{1/2}\omega_i \tag{5}$$

式 (5) 与 Jenny 等 [11] 推导得到的流体脉动速度的 Langevin 方程和 Minier 等 [12] 推导得到颗粒所见的流体脉动速度的 Langevin 方程形式上是一致的．其中，前者使用颗粒所见的流体的拉氏积分时间尺度模拟 $G_{gp,ij}$ 项，后者则使用流体自身的拉氏积分时间尺度．但是，实际上存在颗粒与气体微团的轨迹差异，所以式 (4) 更为严格，是应该采用的颗粒所见的气体微团的脉动速度的 Langevin 方程.

2 偏差分析

2.1 颗粒所见气体微团瞬时速度的 Langevin 方程

为简化起见，考虑均匀各向同性湍流的情形．此时，可以简化 Simonin 提出的颗粒所见气

体微团瞬时速度的 Langevin 方程式 (1) 为如下所示

$$\mathrm{d}\tilde{u}_{gi}/\mathrm{d}t = G_{gp,ij}(\tilde{u}_{gi} - \langle \tilde{u}_{gi} \rangle) + B_{gp}^{1/2}\omega_i \tag{6}$$

其中 $G_{gp,ij}$ 为漂移系数

$$G_{gp,ij} = -\frac{\delta_{ij}}{T_{LP,i}} = -\frac{1}{T_{LP}} = G_{gp} \tag{7}$$

其中 T_{LP} 为湍流的拉氏速度自相关时间尺度，也即颗粒所见的气体微团速度的拉氏积分时间尺度，已经发展了很多模型来模拟这个时间尺度，在此处，我们认为它为一个不变量.

按照 Kolmogorov 的比例定理，参数 B_{gp} 可以确定为 $C_0\varepsilon$. 此处的 ε 为湍流动能耗散率. 于是，简化的 Langevin 方程为

$$\mathrm{d}\tilde{u}_{gi}/\mathrm{d}t = -G_{gp}(\tilde{u}_{gi} - \langle \tilde{u}_{gi} \rangle) + (C_0\varepsilon)^{1/2}\omega_i \tag{8}$$

在实际数值模拟中，用整体平均值 $\{\tilde{u}_{gi}\} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\tilde{u}_{gi}^{(j)}$ 来近似平均值的估计值 $\langle \tilde{u}_{gi} \rangle$ ，其中 N 为所模拟的伪气体微团的数目. 并且为减少因为有限数目的颗粒数而导致的对平均值的估计值的偏差，常引入时间平均的方法，用时间平均值 y 来代替 $\{\tilde{u}_{gi}\}$ 的估计值.

基于以上分析，可以构成如下的 $N+1$ 维方程组

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\tilde{u}_{gi} &= -G_{gp}\Big(\tilde{u}_{gi} - \alpha\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\tilde{u}_{gi}^{(j)}\Big)\mathrm{d}t + (C_0\varepsilon)^{1/2}\mathrm{d}\omega \\ \mathrm{d}y &= -\Omega\Big(y - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\tilde{u}_{gi}^{(j)}\Big)\mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中 α 为常数 $(\alpha > 1)$ ， Ω 为时间平均尺度， y 为时间平均值.

求解方程组 (9) ，可得到颗粒所见气体微团瞬时速度的自关联，互关联及与均值的关联为

$$\left.\begin{aligned} &\langle (\tilde{u}_{gi}^{(j)})^2 \rangle = \frac{(C_0\varepsilon)}{2G_{gp}} + \frac{\alpha\Omega(C_0\varepsilon)}{2NG_{gp}(1-\alpha)(\Omega+G_{gp})}, \quad j=1,2,\cdots,N \\ &\langle \tilde{u}_{gi}^{(j1)}\tilde{u}_{gi}^{(j2)} \rangle = \frac{\Omega(C_0\varepsilon)}{2NG_{gp}(1-\alpha)(\Omega+G_{gp})}, \quad j1 \neq j2;\ \ j1,j2=1,2,\cdots,N \\ &\langle \tilde{u}_{gi}^{(j)}y \rangle = \frac{\Omega(C_0\varepsilon)}{2NG_{gp}(1-\alpha)(\Omega+G_{gp})}, \quad j=1,2,\cdots,N \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

据定义 [11] ，关联的偏差为

$$b_{\mathrm{var}}(x_i) = \mathrm{var}(x_i) - \mathrm{var}(x_i)|_{N\to\infty} \tag{11}$$

于是，颗粒所见的气体微团的瞬时速度的自关联，互关联及与均值的关联的偏差为

$$\left.\begin{aligned} &b_{\mathrm{var}}(\tilde{u}_{gi}^{(j)})^2 = \frac{\alpha\Omega(C_0\varepsilon)}{2NG_{gp}(1-\alpha)(\Omega+G_{gp})}, \quad j=1,2,\cdots,N \\ &b_{\mathrm{var}}(\tilde{u}_{gi}^{(j1)}\tilde{u}_{gi}^{(j2)}) = \frac{\Omega(C_0\varepsilon)}{2NG_{gp}(1-\alpha)(\Omega+G_{gp})}, \quad j1 \neq j2;\ \ j1,j2=1,2,\cdots,N \\ &b_{\mathrm{var}}(\tilde{u}_{gi}^{(j)}y) = \frac{\Omega(C_0\varepsilon)}{2NG_{gp}(1-\alpha)(\Omega+G_{gp})}, \quad j=1,2,\cdots,N \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

由式 (10) 可见，颗粒所见的气体微团瞬时速度并不能独立求解，他们之间存在自关联，颗粒所见的不同气体微团瞬时速度之间也存在关联，颗粒所见的气体微团瞬时速度与颗粒所见的气体微团速度的时间平均值之间也存在关联．这些关联与所取样的气体微团个数 N 和时间平均尺度有关．而由式 (12) 可见，随着 N 趋向于无穷大，除颗粒所见的气体微团瞬时速度的自关联仍然存在之外，颗粒所见的气体微团的瞬时速度的互关联及与均值的关联均将趋向于零，即各微团的瞬时速度在统计上趋向于互相独立．此外，这些关联的偏差都存在，他们除与所取样的气体微团个数有关以外，还与时间平均尺度 Ω 有关．原则上，随着 N 趋向于无穷大，这些关联的偏差均将消失，时间平均方法能够减少颗粒的瞬时速度的关联的偏差，随着时间平均尺度 Ω 减小，颗粒的瞬时速度的关联的偏差减少，但其代价是将会导致花费更高的计算代价．另外，当 α 趋向于 1 时，将导致无穷大的偏差，此时系统不稳定．

2.2 颗粒所见气体微团脉动速度的 Langevin 方程

同样的，假设所分析的两相流是均匀各向同性湍流，此时颗粒所见的气体微团的脉动速度的 Langevin 方程简化为如下所示

$$\mathrm{d}u_{gi} = G_{gp,ij}u_{gj}\mathrm{d}t + B_{gp}^{1/2}\mathrm{d}\omega = G_{gp}u_{gi}\mathrm{d}t + (C_0\varepsilon)^{1/2}\mathrm{d}\omega \tag{13}$$

通过以上类似的方法，可得到颗粒所见气体微团脉动速度的各种关联为

$$\left.\begin{array}{ll} \langle (u_{gi}^{(j)})^2\rangle = \dfrac{(C_0\varepsilon)}{2G_{gp}}, & j=1,2,\cdots,N \\ \langle u_{gi}^{(j1)}u_{gi}^{(j2)}\rangle = 0, & j1\neq j2;\ \ j1,j2=1,2,\cdots,N \end{array}\right\} \tag{14}$$

对应的各种脉动速度关联的偏差为

$$\left.\begin{array}{ll} b_{\mathrm{var}}(u_{gi}^{(j)})^2 = 0, & j=1,2,\cdots,N \\ b_{\mathrm{var}}(u_{gi}^{j1}u_{gi}^{j2}) = 0, & j1\neq j2;\ \ j1,j2=1,2,\cdots,N \end{array}\right\} \tag{15}$$

可见，颗粒所见的气体微团脉动速度虽然仍然存在自关联，但是颗粒所见的不同气体微团脉动速度之间不存在互关联，并且这些脉动速度的关联的偏差均为零．也就是说，各气体微团相互独立，且独立于平均量的估计值．同时所有这些均与所取样的气体微团个数 N 无关．这表明，如果采用气体和颗粒的脉动速度这些状态量来描绘气固两相流场，在理论上面不存在所求解状态量的各种关联的偏差，因而在理论上是先进的．同时这样避免了引入时间平均的方法来减少偏差，从而相对来说减少计算代价．而且更重要的是方程组的解是无条件收敛的．

3 建立颗粒 - 气体微团脉动速度联合 PDF 输运方程

基于以上的理论分析，我们决定建立颗粒 - 气体微团脉动速度联合 PDF 输运过程．在拉

格朗日坐标系内，颗粒运动以及颗粒所见气体微团的运动的随机方程组可写为

$$\mathrm{d}\tilde{x}_{pi}/\mathrm{d}t = \tilde{u}_{pi} = u_{pi} + U_{pi} = u_{pi} + \langle \tilde{u}_{pi} \rangle \tag{16}$$

$$\mathrm{d}u_{pi}/\mathrm{d}t = \tilde{A}_{pi}(x_{pi}, t) = (u_{gi,p} - u_{pi})/\tau_{rp} \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_{gi}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_{gj}u_{gi}}) - u_{gj}\frac{\partial U_{gi}}{\partial x_j} + (\tilde{u}_{pj} - \tilde{u}_{gj})\frac{\partial U_{gi}}{\partial x_j} + G_{gp,ij}u_{gj} + B_{gp}^{1/2}\omega_i = \tilde{A}_{gi}(x_{pi}, t) \tag{18}$$

设颗粒脉动速度和颗粒所见气体微团脉动速度为随机变量，定义颗粒 - 气体微团脉动速度联合概率密度函数为

$$f_{gp}(v_{pi}, v_{gi}; x_{pi}, t) = \langle \delta(u_{pi}(x_{pi}, t) - v_{pi})\delta(u_{gi}(x_{pi}, t) - v_{gi}) \rangle \tag{19}$$

考虑一个网格内颗粒，引入两个参数 n_p 和 $\langle m_p \rangle$, 其中， n_p 为有某种直径的颗粒的个数，$\langle m_p \rangle$ 为此种颗粒的平均每颗颗粒质量．有如下的性质 [3]

$$\xi_p = n_p \langle m_p \rangle = n_p \frac{1}{n_p}\sum_{i=1}^{n_p} m_i = \alpha_p \rho_p = n_p \iint_{v_{pi}, v_{gi}} m f_{gp} \mathrm{d}v_{pi} \mathrm{d}v_{gi} \tag{20}$$

其中， α_p 为颗粒相的体积分数， ρ_p 为颗粒的平均密度， m 为颗粒的质量．

据统计力学中的刘维尔定理，容易得到关于脉动速度 u_{pi} 的欧拉坐标系下颗粒 - 气体脉动速度联合 PDF 输运方程

$$\frac{\partial(\xi_p f_{gp})}{\partial t} + \tilde{v}_{pi}\frac{\partial(\xi_p f_{gp})}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial v_{pi}}(\xi_p f_{gp}\langle \tilde{A}_{pi}|_{v_p, v_g} \rangle) - \frac{\partial}{\partial v_{gi}}[\xi_p f_{gp}\langle \tilde{A}_{gi}|_{v_p, v_g} \rangle] \tag{21}$$

将式 (17)(18) 代入 (21), 可以整理为

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\xi_p f_{gp})}{\partial t} + \tilde{v}_{pi}\frac{\partial(\xi_p f_{gp})}{\partial x_i} = & -\frac{\partial}{\partial v_{pi}}\Big[\Big(\frac{v_{gi} - v_{pi}}{\tau_{rp}}\Big)\xi_p f_{gp}\Big] - \\ & \frac{\partial}{\partial v_{gi}}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{v_{gj}v_{gi}}) - v_{gj}\frac{\partial U_{gi}}{\partial x_j} + (\tilde{v}_{pj} - \tilde{v}_{gj})\frac{\partial U_{gi}}{\partial x_j}\Big)\xi_p f_{gp}\Big] - \\ & \frac{\partial}{\partial v_{gi}}[\xi_p G_{gp,ij}v_{gj}f_{gp}] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v_{gi}^2}(\xi_p B_{gp} f_{gp}) \end{aligned} \tag{22}$$

若对气体湍流用雷诺应力方程模型，对颗粒平均速度采用连续介质模型求解，对于脉动速度采用拉氏 PDF 方程模型，用 Monte-Carlo 法求解颗粒 - 气体微团脉动速度联合 PDF 输运方程，并统计得到颗粒雷诺应力、两相速度脉动关联和颗粒所见的平均气体速度脉动等统计关联量，作为源项返回气相的输运方程，就构成了封闭的两相湍流模型，这可称为改进的雷诺应力 - 拉氏概率密度函数两相湍流模型，或者 I-DSM-LPDF 两相湍流模型.

4 结 论

本文首先在 Navier-Stokes 方程和气相连续性方程的基础上精确地推导了颗粒所见气体微团脉动速度的 Langevin 方程，此方程体现了由于颗粒与流体微团的轨迹的相对滑移造成的增

加量，因此是更加精确的．然后，针对于 Simonin 所提出的颗粒所见的气体微团的瞬时速度的 Langevin 方程和本文所提出的颗粒所见的气体微团的脉动速度的 Langevin 方程，对所需统计的状态量的关联以及这些关联的偏差进行了理论分析，结果清晰地表明，采用颗粒所见的气体微团的脉动速度的 Langevin 方程时，这些状态量的各种关联以及关联的偏差均与所模拟流场的伪气体微团的数目 N 无关，并且由于不需要引入时间平均技术，大大削减了计算代价．另外，方程的数值解是无条件收敛的．所以，就减少所求解量的各种关联的偏差方面而言，采用颗粒所见的气体微团的脉动速度的 Langevin 方程要显著优于采用颗粒所见的气体微团瞬时速度的 Langevin 方程．基于这种理论上的支持，建立了颗粒 - 气体微团联合脉动速度 PDF 输运方程，用于封闭两相湍流模型．

致谢 感谢中国科技大学热科学与能源工程系陈义良教授及其研究组在本项目研究开展过程中提供的宝贵资料，并感谢清华大学工程力学系周力行教授在本文完成过程中提供的建议和意见．

参 考 文 献

1 Derevich IV, Zaichik LI. The equation for the probability density of the particle velocity and temperature in a turbulent flow simulated by the Gauss stochastic field. *Prikl Mat Mekh*, 1990, 54(5): 767～774

2 Reeks W. On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows. *Physics of Fluids A*, 1991, 3: 446～456

3 Simonin O. Continuum modelling of dispersed turbulent two-phase flows. In: VKI Lectures: Combustion in Two-phase Flows, Belgian: Brussel, Jan 29-Feb. 2, 1996

4 Zhou LX, Li Y. A new statistical theory and a k-ε-PDF model for simulating turbulent gas-particle flows. In: Inter Symp on Math. Modeling of Turb Flows, Japan: Tokyo, 1995. 399～404

5 Zhou LX, Zheng CG, Liu ZH. The joint PDF transport equation of combusting particle phase in turbulent reacting gas-particle flows. In: ASME 8th Int Symp on Gas-Particle Flows, San Francisco, 1999

6 Liu ZH, Zheng CG, Zhou LX. A second-order-moment-Monte-Carlo (SOM-MC) model for simulating swirling gas-particle flows. *Powder Tech*, 2001, 120(3): 216～222

7 Liu ZH, Zheng CG, Zhou LX. A SOM-PDF gas-particle turbulence model and FVM-MC simulation of a backstep two-phase flow. In: Michaelides EE ed. 4th Int Conf Multiphase Flow, San Louis, 2001

8 Liu ZH, Zheng CG, Zhou LX. A Lagrangian PDF method for simulating turbulent gas-liquid flow with evaporation in a pipe expansion. In: Liu W eds Int Conf on Energy Conversion and Application, Wuhan, 2001

9 柳朝晖，郑楚光，周力行．雷诺应力 - 拉氏 PDF 两相湍流模型及旋流两相流动的 Monte-Carlo 模拟．工程热物理学会，武汉， 2000 (Liu Zhaohui, Zheng Chuguang, Zhou Lixing. A DSM-LPDF two-phase turbulence model and Monte-Carlo simulation of a swirling two-phase flow. The Academical Conference of Engineering and Thermal Physics of China, Wuhan, 2000(in Chinese))

10 Xu Jun, Pope SB. Analysis of numerical errors in solving particle Langevin equations. Cornell University Report, FDA97-07, June, 1997

11 Jenny P, Pope SB, Muradoglu M, Caughey DA. A hybrid algorithm for the joint PDF equation of turbulent reactive flows. *Journal of Computational Physics*, 2001, 166(2): 218～252

12 Minier JP. Closure proposals for the Langevin equation model in Lagrangian two-phase flow modeling. In: 3rd ASME/JSME joint engineering conference, San Francisco, 1999-07-18～23, FEDSM99-7885

A JOINT FLUCTUATION VELOCITY PDF TRANSPORT EQUATION OF TWO-PHASE FLOWS [1)]

Zhao Haibo Liu Zhaohui Zheng Chuguang Wang Hanfeng

(National Laboratory of Coal Combustion, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract The probability density distribution function (PDF) is one of important methods for developing the two-phase turbulence model. In the PDF method, for developing the joint PDF equation of two-phase velocity correlation, the key point is to propose a Langevin-type equation of the fluid velocity seen by particles, as a closure assumption of the PDF transport equation. In this paper, at first the Langevin equation of fluid fluctuation velocity seen by particles is exactly derived on the basis of the Navier-Stokes equations and the continuity equation of the gas phase with the help of Reynolds averaging scheme. This equation includes the increment due to the particle displacement relative to the fluid element path, and thus it is more accurate than the equations suggested by other researchers. Then, analysis on the error of bias associated with the Langevin equation for the instantaneous velocity seen and our derived Langevin equation is carried out. The results indicate the superiority of the Langevin equation for the fluid-particle fluctuation velocity compared with that for the instantaneous fluid-particle velocity in the following three aspects: All the interested correlations as well as their corresponding biases are independent of the number N of the samples representing the fluid field; Our equation does not require the time-averaging technique, so it will reduce the cost of computation; And the numerical solution of the equations is convergent regardless of the values of α, which is very important to the numerical simulation. Finally, a joint PDF transport equation for the fluid-particle fluctuation velocities is obtained.

Key words probability density function method, two-phase turbulence, Langevin equation, bias, transport equation

Received 1 April 2001, revised 21 August 2001.

1) The project supported by the Special Funds for Major State Basic Research Projects (G1999022207) and the National Natural Science Foundation of China (50006003).