

# 大延伸非均匀介质中地震波全弹性散射理论 II —— 弹性波多次散射理论<sup>1)</sup>

李小凡

(中国科学院地质与地球物理研究所, 北京 100101)

**摘要** 推出大延伸非均匀连续介质的弹性波能量传输表达式, 并以此为基础建立并发展了相应的弹性动力学能量传递理论. 构造了一个基于非均匀薄层或非均匀相屏单次散射迭代法的多次散射模型. 该模型既适用于弱散射, 也适用于强散射; 既适用于普通散射, 也适用于转换散射; 尽管高频情况下只考虑普通散射及前向散射. 应用该模型计算了弹性多次散射的能通量, 处理了散射衰减问题. 数值实验的结果表明, 短周期地震图上的尾波主要来源于  $S$  波散射.

**关键词** 衰减, 能量传递, 非均匀介质, 散射, 多次散射, 弹性动力学, 地震尾波

## 引 言

一般而言, 地震图上的尾波来自地球内部非均匀体所产生的地震散射波. 而我们观测到的地震波视衰减, 则由介质的滞弹性和介质内非均匀体所产生的散射引起. 如何准确地从地震波视衰减中区分这两类物理性质上完全不同的效应, 是现今地震波研究领域的一大难题; 而解决这一难题的关键在于能否准确地计算散射衰减. 对于比较简单的局部非均匀性问题, 单散射模型可基本满足精度要求<sup>[1~4]</sup>. 然而, 对于复杂介质或大延伸非均匀介质, 则必须发展与之相适应的多次散射模型.

多次散射理论通常是沿着解析方法和传递理论这两条相互独立的途径发展的. 对于这一点, Ishimaru<sup>[5]</sup> 和 Wu<sup>[6]</sup> 都做过详细的综述. 地震学家们还做过一些与数值模拟相比较的工作. Frankel 与 Clayton<sup>[7]</sup>, Jannaud 等<sup>[8]</sup> 采用有限差分法建模, 对地震波尾波衰减率及散射衰减进行了定量的研究. 为了分析短周期地震台阵数据中  $P$  波尾波的散射项及岩石圈的吸收特性, Korn<sup>[9]</sup> 采用了能通量模型<sup>[10]</sup>. 在其模型中, 假设了多次散射; 为了拟合数据, 允许独立确定内在衰减及散射衰减. Shapiro 和 Kneib<sup>[11]</sup> 应用波动理论及二维有限差分模拟研究地震散射衰减. 其结果表明, 从地震波平均振幅谱和对数平均振幅谱中分离并估算散射衰减, 相当程度上取决于传播距离.

基于 Uscinski 的工作<sup>[12~15]</sup>, 本文发展了一个弹性动力学能量传递理论. 该理论给出了弹性波的能量传输表达式, 提出了处理大延伸非均匀连续介质及散射衰减问题的方法. 为了处理复杂介质的散射问题, 文中采用了弹性随机介质多次散射模型. 这些方法和模型既适用于普通散射, 也适用于转换散射. 本文还详细讨论了多次散射及散射衰减问题, 并给出了相应的数值实验结果.

2000-01-25 收到第一稿, 2002-07-09 收到修改稿.

1) 国家杰出青年科学基金 (40025412)、中国科学院“百人计划” (10010120)、中国科学院知识创新工程重大项目 (KZCX-07)、中国科学院研究基金 (1980338)、中国科学院地球物理研究所、英国大学正副校长委员会、剑桥大学海外基金会联合资助.

## 1 连续非均匀薄层的波数域单散射系数

考虑一个大规模非均匀区域, 其弹性参数及密度扰动均为位置的连续可微函数, 并镶嵌于弹性参数为  $\lambda^\circ$ ,  $\mu^\circ$  及密度为  $\rho^\circ$  的无界均匀弹性介质中. 在非均匀区域内, 设

$$\lambda(\mathbf{x}) = \lambda^\circ + \delta\lambda(\mathbf{x}), \quad \mu(\mathbf{x}) = \mu^\circ + \delta\mu(\mathbf{x}), \quad \rho(\mathbf{x}) = \rho^\circ + \delta\rho(\mathbf{x}) \quad (1)$$

其中  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ;  $\delta\lambda(\mathbf{x})$ ,  $\delta\mu(\mathbf{x})$  及  $\delta\rho(\mathbf{x})$  分别为弹性参数扰动和密度扰动. 我们假设这些扰动很小, 即

$$\left| \frac{\delta\lambda(\mathbf{x})}{\lambda^\circ} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\delta\mu(\mathbf{x})}{\mu^\circ} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\delta\rho(\mathbf{x})}{\rho^\circ} \right| \ll 1 \quad (2)$$

为了处理更复杂的问题, 上述介质可考虑为弹性随机介质.

假设上述随机介质在统计上是均匀的、各向同性的, 且个弹性参数扰动及密度扰动具有类似的统计特性; 即他们的相关函数在形式上相同. 用角括号表示其统计平均或期望值, 我们有

$$\left. \begin{aligned} \langle \delta\rho(\boldsymbol{\xi})\delta\rho(\boldsymbol{\eta}) \rangle &= (\rho^\circ)^2 \varepsilon_{\rho\rho}^2 N(|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|) \\ \langle \delta\lambda(\boldsymbol{\xi})\delta\lambda(\boldsymbol{\eta}) \rangle &= (\lambda^\circ)^2 \varepsilon_{\lambda\lambda}^2 N(|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|) \\ \langle \delta\mu(\boldsymbol{\xi})\delta\mu(\boldsymbol{\eta}) \rangle &= (\mu^\circ)^2 \varepsilon_{\mu\mu}^2 N(|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

此处  $\varepsilon_{\rho\rho}$  等表示非均匀介质各弹性参数及密度相关扰动的标准偏差,  $N(|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|)$  为随机参数的正则化相关函数. 类似的互相关系数也可定义为

$$\langle \delta\rho(\boldsymbol{\xi})\delta\mu(\boldsymbol{\eta}) \rangle = \rho^\circ \mu^\circ \varepsilon_{\rho\mu}^2 N(|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|) \text{ 等} \quad (4)$$

事实上, 我们可将非均匀层分割成一系列足够薄的“薄”层, 以使每一“薄”层可视为弱散射体, 从而符合 Born 近似的条件. 当  $P$  波或  $S$  波 (可表为位移场  $\mathbf{q}e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}$ ) 入射非均匀区时, 来自厚度为  $2d$  的薄层的弱散射波可写成散射  $P$  波和散射  $S$  波辐射之和<sup>[16,17]</sup>

$$\delta^C u_i(\mathbf{x}) = \delta^C u_i^P(\mathbf{x}) + \delta^C u_i^S(\mathbf{x}) \quad (5)$$

当入射波为  $P$  波或  $S$  波时,  $C = P$  或  $S$ , 其中  $\delta^C u_i^P(\mathbf{x})$  和  $\delta^C u_i^S(\mathbf{x})$  由本文第一部分中的式 (13) 和式 (16) 确定. 在这两个式子中,  $r_3^\nu = (k_\nu^2 - r_1^2 - r_2^2)^{1/2}$ ,  $\nu = \alpha, \beta$ ; 并且, 如果  $x_3 \geq 0$  则  $r_3^\nu$  为正实数或虚数, 反之亦然. 对于  $P$ - $P$  和  $P$ - $S$  散射波, 有  $p_i = k_\alpha \gamma_i^{\text{in}}$  及  $q_i = A \gamma_i^{\text{in}}$ ; 对于  $S$ - $P$  及  $S$ - $S$  散射波, 有  $p_i = k_\beta \gamma_i^{\text{in}}$  及  $q_i = B \gamma_i^{\text{ina}}$ , 其中

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1^{\text{in}} &= \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \\ \gamma_2^{\text{in}} &= \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \\ \gamma_3^{\text{in}} &= \cos \theta_1 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \gamma_1^{\text{ina}} &= -\cos \theta_1 \cos \varphi_1 \cos \phi_1 - \sin \varphi_1 \sin \phi_1 \\ \gamma_2^{\text{ina}} &= -\cos \theta_1 \sin \varphi_1 \cos \phi_1 + \cos \varphi_1 \sin \phi_1 \\ \gamma_3^{\text{ina}} &= \sin \theta_1 \cos \phi_1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$\theta_1$ ,  $\varphi_1$  及  $\phi_1$  均为入射极角;  $A$  和  $B$  均为入射振幅.

我们现在将注意力集中于出射波; 并设  $r_i = k_\sigma \gamma_i^s$ , 其中  $\gamma_1^s = \sin \theta \cos \varphi$ ,  $\gamma_2^s = \sin \theta \sin \varphi$ ,  $\gamma_3^s = \cos \theta$  ( $\theta$  及  $\varphi$  皆为散射角); 将本文第 I 部分<sup>[18]</sup> 给出的散射波通解中的积分变量由波数变

换为散射角, 可用

$$\frac{\partial(r_1, r_2)}{\partial(\theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} k_\sigma \cos \theta \cos \varphi & -k_\sigma \sin \theta \sin \varphi \\ k_\sigma \cos \theta \sin \varphi & k_\sigma \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} = k_\sigma^2 \cos \theta \sin \theta \quad (7)$$

其中  $\sigma = \alpha$  或  $\beta$ .

将式 (7) 代入本文第 I 部分中的式 (13) 和式 (16), 并忽略内界面波, 对于  $x_3 \geq 0$ , 我们可得到用单位空间角表达的散射位移振幅表达式

$$\left. \begin{aligned} \delta^P u_i^P(\mathbf{r}) &= \frac{ik_\sigma r_i r_j}{8\pi^2 \omega^2 \rho^2} [\omega^2 \tilde{\delta} \rho q_j - \delta \tilde{\lambda} p_l q_j r_j - \delta \tilde{\mu} r_l (p_l q_j + p_j q_l)] e^{i r_m x_m} \Big|_{r_3=r_3^\alpha} \\ \delta^P u_i^S(\mathbf{r}) &= \frac{ik_\beta (k_\beta^2 \delta_{ij} - r_i r_j)}{8\pi^2 \omega^2 \rho^2} [\omega^2 \tilde{\delta} \rho q_j - \delta \tilde{\mu} (p_l q_j + p_j q_l)] e^{i r_m x_m} \Big|_{r_3=r_3^\beta} \\ \delta^S u_i^P(\mathbf{r}) &= \frac{ik_\sigma r_i r_j}{8\pi^2 \omega^2 \rho^2} [\omega^2 \tilde{\delta} \rho q_j - \delta \tilde{\mu} (p_l q_j - p_j q_l) r_l] e^{i r_m x_m} \Big|_{r_3=r_3^\alpha} \\ \delta^S u_i^S(\mathbf{r}) &= \frac{ik_\beta (k_\beta^2 \delta_{ij} - r_i r_j)}{8\pi^2 \omega^2 \rho^2} [\omega^2 \tilde{\delta} \rho q_j - \delta \tilde{\mu} r_l (p_l q_j + p_j q_l)] e^{i r_m x_m} \Big|_{r_3=r_3^\beta} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

取式 (8) 的均方值, 我们将波数域中非均匀薄层的散射系数定义为

$$\left. \begin{aligned} S^{PP}(\theta, \varphi) &= \frac{(2\pi)^2 \langle |\delta^P \tilde{u}_i^P|^2 \rangle}{\Sigma} = \frac{2dA^2 \omega^6}{(4\pi)^2 \alpha^6} {}^P D^P(\theta, \varphi) {}^P \tilde{N}^P(\theta, \varphi) \\ S^{PS}(\theta, \varphi) &= \frac{(2\pi)^2 \langle |\delta^P \tilde{u}_i^S|^2 \rangle}{\Sigma} = \frac{2dA^2 \omega^6}{(4\pi)^2 \beta^6} {}^P D^S(\theta, \varphi) {}^P \tilde{N}^S(\theta, \varphi) \\ S^{SP}(\theta, \varphi) &= \frac{(2\pi)^2 \langle |\delta^S \tilde{u}_i^P|^2 \rangle}{\Sigma} = \frac{2dB^2 \omega^6}{(4\pi)^2 \alpha^6} {}^S D^P(\theta, \varphi) {}^S \tilde{N}^P(\theta, \varphi) \\ S^{SS}(\theta, \varphi) &= \frac{(2\pi)^2 \langle |\delta^S \tilde{u}_i^S|^2 \rangle}{\Sigma} = \frac{2dB^2 \omega^6}{(4\pi)^2 \beta^6} {}^S D^S(\theta, \varphi) {}^S \tilde{N}^S(\theta, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中方向因子为

$$\left. \begin{aligned} {}^P D^P(\theta, \varphi) &= \varepsilon_{\rho\rho}^2 (\gamma_j^s \gamma_j^{\text{in}})^2 + \frac{\kappa^2 \varepsilon_{\lambda\lambda}^2}{(\kappa+2)^2} + \frac{4\varepsilon_{\mu\mu}^2}{(\kappa+2)^2} (\gamma_j^s \gamma_j^{\text{in}})^4 - \\ &\quad \frac{2\kappa \varepsilon_{\rho\lambda}^2}{(\kappa+2)} \gamma_j^s \gamma_j^{\text{in}} - \frac{4\varepsilon_{\rho\mu}^2}{(\kappa+2)} (\gamma_j^s \gamma_j^{\text{in}})^3 - \frac{4\kappa \varepsilon_{\mu\lambda}^2}{(\kappa+2)^2} (\gamma_j^s \gamma_j^{\text{in}})^2 \\ {}^P D^S(\theta, \varphi) &= \left[ 1 - (\gamma_j^s \gamma_j^{\text{in}})^2 \right] \left[ \varepsilon_{\rho\rho}^2 + \frac{4\varepsilon_{\mu\mu}^2}{\kappa+2} (\gamma_j^s \gamma_j^{\text{in}})^2 - \frac{4\beta \varepsilon_{\rho\mu}^2}{a} (\gamma_j^s \gamma_j^{\text{in}}) \right] \\ {}^S D^P(\theta, \varphi) &= (\gamma_j^s \gamma_j^{\text{ina}})^2 \left[ \varepsilon_{\rho\rho}^2 + \frac{4\varepsilon_{\mu\mu}^2}{\kappa+2} (\gamma_j^s \gamma_j^{\text{in}})^2 - \frac{4\beta \varepsilon_{\rho\mu}^2}{a} \gamma_j^s \gamma_j^{\text{in}} \right] \\ {}^S D^S(\theta, \varphi) &= \varepsilon_{\rho\rho}^2 \left[ 1 - (\gamma_j^s \gamma_j^{\text{ina}})^2 \right] + \varepsilon_{\mu\mu}^2 \left[ (\gamma_j^s \gamma_j^{\text{in}})^2 + (\gamma_j^s \gamma_j^{\text{ina}})^2 - \right. \\ &\quad \left. 4(\gamma_j^s \gamma_j^{\text{in}} \gamma_k^s \gamma_k^{\text{ina}})^2 \right] - 2\varepsilon_{\rho\mu}^2 \gamma_j^s \gamma_j^{\text{in}} \left[ 1 - (\gamma_j^s \gamma_j^{\text{ina}})^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中  $\kappa = \lambda^\circ / \mu^\circ$ , 且功率谱函数为

$${}^C \tilde{N}^D(\theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-d}^d N(|\boldsymbol{\eta}|) e^{i(k_\nu \gamma_i^{\text{in}} - k_\sigma \gamma_i^s) \eta_i} d\eta_3 d\eta_2 d\eta_1 \quad (11)$$

$N(|\eta|)$  为非均匀层的相关函数; 并且当  $C = P$  或  $S$  时,  $\nu = \alpha$  或  $\beta$ ; 当  $D = P$  或  $S$  时,  $\sigma = \alpha$  或  $\beta$ . 当相关函数为高斯函数时, 介质的功率谱函数  ${}^C\tilde{N}^D(\theta, \varphi)$  可写为

$${}^C\tilde{N}^D(\theta, \varphi) = (\pi)^{-3/2} a^2 b / 8 \times \exp \left[ - \frac{a^2 (k_\nu \gamma_1^{\text{in}} - k_\sigma \gamma_1^s)^2 + a^2 (k_\nu \gamma_2^{\text{in}} - k_\sigma \gamma_2^s)^2 + b^2 (k_\nu \gamma_3^{\text{in}} - k_\sigma \gamma_3^s)^2}{4} \right] \quad (12)$$

其中  $a$  与  $b$  分别为横向相关长度和纵向相关长度.

由式 (9) 可以看出, 弹性波入射时的非均匀薄层的散射系数  $S^{SS}(\theta, \varphi, \theta_1, \varphi_1)$  是入射及散射方向的函数. 式 (9) 显现了散射系数的入射及散射方向特性: 频率升高可使散射能量集中于前向, 并降低侧向散射能量, 甚至可使其忽略不计. 另外, 式 (9) 也符合这样一个观测事实, 即普通散射系数 ( $P$ - $P$  及  $S$ - $S$  散射) 随着频率的升高而增加; 转换散射系数 ( $P$ - $S$  及  $S$ - $P$  散射) 随着频率的升高而降低, 直至忽略不计.

## 2 非均匀层的一阶散射功率谱

如果一个镶嵌于均匀介质中、厚度为  $2d$  ( $-d < x_3 < d$ ) 的非均匀层的平面入射波为位移场形式

$$u^o = q e^{iP \cdot x} \quad (13)$$

其散射场可写成式 (5) 的形式

$$\delta^C u_i = \delta^C u_i^P + \delta^C u_i^S \quad (14)$$

其中上标  $C$  可表示  $P$  波入射或  $S$  波入射,  $\delta^C u_i^P$  和  $\delta^C u_i^S$  分别表示散射  $P$  波辐射和散射  $S$  波辐射. 忽略对进出非均匀层能通量无贡献的内界面波, 散射功率谱密度的  $P$ - $P$  分量 (限于篇幅, 推导步骤从略) 可表为

$$\langle {}^C \tilde{P}_i^{PP}(\theta, \varphi) \rangle = \frac{\alpha \gamma_i^s (\lambda^o + 2\mu^o)}{\gamma_3^s} S^{PP}(\theta, \varphi) \quad (15)$$

对于每单位空间角内极线方向上的散射波, 散射  $P$  波出射功率谱密度第三分量仅为

$$\langle {}^P \tilde{P}_3^P(\theta, \varphi) \rangle = \rho^o \alpha^3 S^{PP}(\theta, \varphi) \quad (16)$$

用同样的方法, 我们可以得到  $P$ - $S$  散射的功率密度谱

$$\langle {}^P \tilde{P}_i^S(\theta, \varphi) \rangle = \frac{\beta \gamma_i^s \mu^o}{\gamma_3^s} S^{PS}(\theta, \varphi) \quad (17a)$$

及

$$\langle {}^P \tilde{P}_3^S(\theta, \varphi) \rangle = \rho^o \beta^3 S^{PS}(\theta, \varphi) \quad (17b)$$

类似地, 对于  $S$  波入射, 散射功率密度谱可表为

$$\left. \begin{aligned} \langle {}^S \tilde{P}_3^S(\theta, \varphi) \rangle &= \frac{\beta \gamma_3^s \mu^o}{\gamma_3^s} S^{SS}(\theta, \varphi) \\ \langle {}^S \tilde{P}_3^P(\theta, \varphi) \rangle &= \frac{\alpha \gamma_3^s (\lambda^o + \mu^o)}{\gamma_3^s} S^{SP}(\theta, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

其功率密度谱的出射分量为

$$\left. \begin{aligned} \langle S \tilde{P}_3^S(\theta, \varphi) \rangle &= \rho^\circ \beta^3 S^{SS}(\theta, \varphi) \\ \langle S \tilde{P}_3^P(\theta, \varphi) \rangle &= \rho^\circ \beta^3 S^{SP}(\theta, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

上述方法仅对薄层的弱散射或单次散射问题有效. 这一理论的基础是 Born 近似, 即假设散射场弱于入射场. 当然, 当非均匀介质在入射方向上的延伸较大时, 多次散射不可被忽略 (Hudson 和 Heritage<sup>[19]</sup> 给出的忽略多次散射的条件为:  $(kd)^2 \left( \frac{\delta\alpha}{\alpha} \right) \ll 1$ , 其中  $k$  为波数,  $\frac{\delta\alpha}{\alpha}$  为速度异常,  $d$  为介质的空间延伸). 因此, 为了精确地处理大规模非均匀区的散射问题, 必须建立大延伸非均匀介质的弹性多次散射模型. 另外, 高频情况下, 转换散射与反向散射可忽略不计. 因此, 在某些条件下, 采用高频近似可使多次散射问题大大简化.

### 3 由连续多层构成的大规模非均匀区域的散射波功率谱密度

同行们研究了非均匀区的标量波多次散射问题, 并取得了许多很好的结果<sup>[12~15, 20]</sup>. 下面, 我们将这些理论及方法推广至高频弹性散射问题.

我们可将任意非均匀区分割为一系列平行的非均匀薄层. 当功率谱密度为  $P_0^C$  (上标  $C$  表示  $P$  波或  $S$  波入射) 的平面波入射到一个非均匀区域时, 每一层间的入射及散射功率谱密度可与上节给出的单层散射结果相符. 如果这些分割得足够薄, 单次散射近似对每一单独的薄层有效. 将我们所研究的非均匀区划分为层间界面为  $z = z_0, z_1 \cdots$  的一系列非均匀薄层, 并定义界面  $z = z_n$  处的  $P$  波及  $S$  波辐射功率谱密度分别为  $\tilde{P}^P(z_n, \theta, \varphi)$  和  $\tilde{P}^S(z_n, \theta, \varphi)$ . 当弹性平面波通过薄层  $z_n \leq z \leq z_{n+1}$  时, 可采用上一节推出的公式计算入射功率的散射; 沿  $(\theta_1, \varphi_1)$  方向传播的单位功率密度入射波的输出散射总能量为

$$S^C(\theta_1, \varphi_1) = \rho^\circ \int_0^{+2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \{ \alpha^3 S^{CP}(\theta, \varphi, \theta_1, \varphi_1) + \beta^3 S^{CS}(\theta, \varphi, \theta_1, \varphi_1) \} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (20)$$

类似地, 对于  $P$  波, 在  $(\theta_1, \varphi_1)$  方向输入的来自所有前向入射波的散射能量为

$$\rho^\circ \alpha^3 \int_0^{+2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \{ S^{PP}(\theta, \varphi, \theta_1, \varphi_1) \tilde{P}^P(\theta_1, \varphi_1) + S^{SP}(\theta, \varphi, \theta_1, \varphi_1) \tilde{P}^S(\theta_1, \varphi_1) \} \sin \theta d\theta d\varphi$$

对于  $S$  波也有类似的表达式.

前向散射及单次散射的假设, 仅限于单一薄层内. 上一节的结果表明, 高频情况下的转换散射可忽略不计. 在这种情况下, 式 (20) 仅含普通散射项. 这时, 入射波受到依赖于零阶项  $\tilde{P}_0^C$  的一阶散射的衰减, 该项满足方程

$$\frac{d\tilde{P}_0^C(z, \theta, \varphi)}{dz} = -S^{C'}(\theta, \varphi) \tilde{P}_0^C(z, \theta, \varphi)$$

使得

$$\tilde{P}_0^C(z, \theta, \varphi) = \tilde{P}_0^C(0, \theta, \varphi) e^{-S^{C'}(\theta, \varphi)z} \quad (21)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} S^P(z_n, \theta_1, \varphi_1) &= \rho^\circ \alpha^3 \int_0^{+2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} S^{PP}(z_n, \theta, \varphi, \theta_1, \varphi_1) \sin \theta d\theta d\varphi \\ S^S(z_n, \theta_1, \varphi_1) &= \rho^\circ \beta^3 \int_0^{+2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} S^{SS}(z_n, \theta, \varphi, \theta_1, \varphi_1) \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$\tilde{P}_0^C(0, \theta, \varphi)$  涉及到  $z = 0$  处的入射功率, 并设其为已知.

类似地, 对于一阶项  $\tilde{P}_1^C$ , 可用下式近似

$$\tilde{P}_1^C(z, \theta, \varphi) = \int_0^z e^{-S^{C'}(\theta, \varphi)(z-z_1)} B_1^C(z_1, \theta, \varphi) dz_1 \quad (23)$$

其中

$$\tilde{B}_1^C(z, \theta, \varphi) = \rho^0 \nu^3 \int_0^{+2\pi} \int_0^{+\pi/2} \{S^{CC'}(\theta, \varphi, \theta_1, \varphi_1) \tilde{P}_0^C(z, \theta_1, \varphi_1)\} \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1$$

同样, 二阶散射由下式给出

$$\tilde{P}_2^C(z, \theta, \varphi) = \int_0^z e^{-S^{C'}(\theta, \varphi)(z-z_2)} B_2^C(z_2, \theta, \varphi) dz_2 \quad (24)$$

式中

$$\begin{aligned} B_2^C(z, \theta, \varphi) &= \rho^0 \nu^3 \int_0^{+2\pi} \int_0^{+\pi/2} \{S^{CC'}(\theta, \varphi, \theta_1, \varphi_1) \tilde{P}_1^C(z, \theta_1, \varphi_1)\} \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1 = \\ &\rho^0 \nu^3 \int_0^{+2\pi} \int_0^{+\pi/2} \int_0^z S^{CC'}(\theta, \varphi, \theta_1, \varphi_1) B_1^C(z_1, \theta_1, \varphi_1) e^{-S^{C'}(\theta_1, \varphi_1)(z-z_1)} \sin \theta_1 dz_1 d\theta_1 d\varphi_1 \end{aligned}$$

对于高阶散射, 我们有

$$\left. \begin{aligned} \tilde{P}_n^P(z, \theta, \varphi) &= \int_0^z B_n^P(z_n, \theta, \varphi) e^{-S^{C'}(\theta, \varphi)(z-z_n)} dz_n \\ \tilde{P}_n^S(z, \theta, \varphi) &= \int_0^z B_n^S(z_n, \theta, \varphi) e^{-S^{C'}(\theta, \varphi)(z-z_n)} dz_n \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} B_n^C(z, \theta, \varphi) &= \rho^0 \nu^3 \int_0^{+2\pi} \int_0^{+\pi/2} \int_0^z S^{CC'}(\theta, \varphi, \theta_1, \varphi_1) B_{n-1}^C(z_{n-1}, \theta_1, \varphi_1) \times \\ &\quad e^{-S^{C'}(\theta_1, \varphi_1)(z-z_{n-1})} \sin \theta_1 dz_{n-1} d\theta_1 d\varphi_1 \\ &\dots \dots \\ B_1^C(z, \theta, \varphi) &= \rho^0 \nu^3 \int_0^{+2\pi} \int_0^{+\pi/2} \tilde{P}_0^C(z, \theta_1, \varphi_1) S^{CC'}(\theta, \varphi, \theta_1, \varphi_1) \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1 = \\ &\rho^0 \nu^3 \int_0^{+2\pi} \int_0^{+\pi/2} \tilde{P}_0^C(0, \theta_1, \varphi_1) e^{-S^{C'}(\theta_1, \varphi_1)z} S^{CC'}(\theta, \varphi, \theta_1, \varphi_1) \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1 \end{aligned}$$

因此, 包含直至第  $n$  阶散射的全信号功率谱密度为

$$\tilde{P}^C(z, \theta, \varphi) = \tilde{P}_0^C(z, \theta, \varphi) + \tilde{P}_1^C(z, \theta, \varphi) + \dots + \tilde{P}_n^C(z, \theta, \varphi) \quad (26)$$

式 (26) 即大规模非均匀区散射功率谱密度表达式. 限于篇幅, 上述散射功率谱密度递推表达式的推导从略.

另外, 上述介质中第  $n$  阶散射功率密度可表为

$$\left. \begin{aligned} P_n^P &= \int_0^{+2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \tilde{P}_n^P(z, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \\ P_n^S &= \int_0^{+2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \tilde{P}_n^S(z, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

其中  $n = 1, 2, 3, \dots$ . 大延伸随机介质的总散射功率密度可表为

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{total}}^P(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n^P(z) = P_0^P(0) - P_0^P(z) \\ P_{\text{total}}^S(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n^S(z) = P_0^S(0) - P_0^S(z) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

并且多次散射功率密度可写为

$$\left. \begin{aligned} P_m^P(z) &= P_{\text{total}}^P(0) - P_1^P(z) \\ P_m^S(z) &= P_{\text{total}}^S(0) - P_1^S(z) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

由于内在衰减忽略不计, 式 (29) 未计入这部分能耗. 在我们的假设前提下, 这个近似是正确的. 若想得到更精确的结果, 则必须计入转换散射和后向散射.

#### 4 一阶散射衰减

对于  $\tilde{P}_0^C$ , 在形式上与其它同行给出的有关小尺度非均匀介质散射问题的公式相似<sup>[2]</sup>. 这些公式的物理意义为后向散射能量可忽略不计时的入射功率与散射辐射总功率之差. 由上述“零阶近似”理论得出的结果与相应条件下的数值及实验研究结果相符. 当然, 这些条件符合弱散射假设及散射路径的限定. 事实上, 无论散射角为何值, 表达式  $\tilde{P}_0^C(z, \theta, \varphi)$  仅表示  $z$  方向上的辐射能通密度. 早期的结果<sup>[6]</sup> 仅对法向入射时有限散射体周围的辐射能量计算有效, 而本文的方法则可计算延伸的非均匀层的一阶散射功率.

在零阶场的衰减中, 指数为  $S^{C'}(\theta_1, \varphi_1)$ . 该量 (即散射系数) 是入射角  $\theta_1$  和  $\varphi_1$  的函数. 因此, 法向入射的散射功率为峰值是不足为奇的. 另外, 散射衰减的增加还非常明显地依赖频率的增加;  $P$  波和  $S$  波散射衰减对频率的这种依赖是有差别的, 这种差别在数量上约为一个数量级. 这样, 便可比较容易地分离  $S$ - $S$  散射和较弱的  $P$ - $P$  散射. Knopoff 和 Hudson<sup>[22]</sup> 早在其数值实验中注意到了散射衰减的这一特征. 图 1 显示了很强的散射辐射 - 频率依赖. 其曲线斜率以近似于  $\omega^5$  的指数规律变化. 这个值稍大于 Rayleigh 散射. 严格地说, 在图 1 的两个图形中只有曲线的右半部分符合高频散射. Knopoff 和 Hudson<sup>[23]</sup> 认为: 在低频段, 散射能量及衰减的变化依赖  $\omega^4$ ; 而高频段则依赖  $\omega^2$ . 图 2(b) 实现了这两个极端间的过渡, 但未显示出散射能量及衰减在高频段的  $\omega^2$  依赖. 在图 1 中我们还发现,  $S$ - $S$  散射始终占优势并比  $P$ - $P$  散射高约一个数量级.

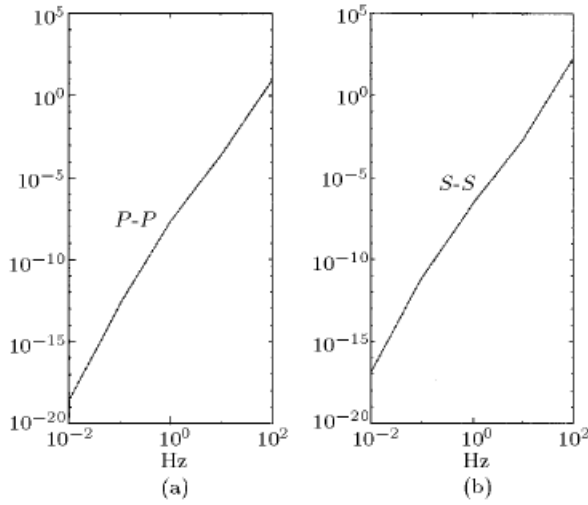


图 1 法向入射时散射系数  $S^{P'}$  和  $S^{S'}$  的频率特性.

各参数为: 纵波速度  $\alpha = 7$  km/s, 横波速度  $\beta = \alpha/\sqrt{3}$ , 横向非均匀相关长度  $a = 10$  km, 纵向非均匀相关长度  $b = 2$  km,  $\varepsilon_{\rho\rho}^2 = 0.0009$ ,  $\varepsilon_{\lambda\lambda}^2 = 0.0025$ ,  $\varepsilon_{\mu\mu}^2 = 0.0049$ ,  $\varepsilon_{\rho\lambda}^2 = 0.0015$ ,  $\varepsilon_{\rho\mu}^2 = 0.0021$ ,  $\varepsilon_{\lambda\mu}^2 = 0.0035$

Fig.1 Frequency dependences of scattering coefficients  $S^{P'}$  and  $S^{S'}$  for normal incidence when

$\alpha = 7$  km/s,  $\beta = \alpha/\sqrt{3}$ ,  $a = 10$  km,  $b = 2$  km,  $\varepsilon_{\rho\rho}^2 = 0.0009$ ,  $\varepsilon_{\lambda\lambda}^2 = 0.0025$ ,  $\varepsilon_{\mu\mu}^2 = 0.0049$ ,  $\varepsilon_{\rho\lambda}^2 = 0.0015$ ,  $\varepsilon_{\rho\mu}^2 = 0.0021$ ,  $\varepsilon_{\lambda\mu}^2 = 0.0035$

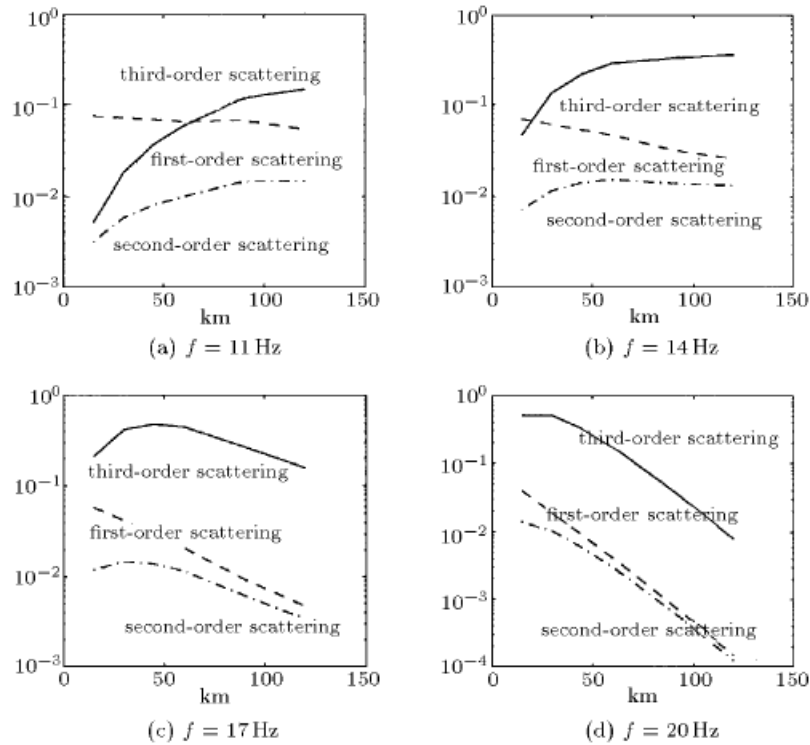


图 2(a)  $S$  波各阶散射功率密度与总散射功率密度之比的传播距离特性. 各参数为: 入射角  $\theta_1 = 0^\circ$ , 入射波水平极角  $\varphi_1 = 0^\circ$ , 纵波速度  $\alpha = 7$  km/s, 横波速度  $\beta = \alpha/\sqrt{3}$ , 横向非均匀相关长度  $a = 10$  km, 纵向非均匀相关长度  $b = 2$  km,  $\varepsilon_{\rho\rho}^2 = 0.00041$ ,  $\varepsilon_{\lambda\lambda}^2 = 0.001296$ ,  $\varepsilon_{\mu\mu}^2 = 0.002401$ ,  $\varepsilon_{\rho\lambda}^2 = 0.000756$ ,  $\varepsilon_{\rho\mu}^2 = 0.001029$ ,  $\varepsilon_{\lambda\mu}^2 = 0.001764$

Fig.2(a) Propagation distance dependences of proportions of each order scattered power densities of  $S$  waves to total scattered power density when the incident angle  $\theta_1 = 0^\circ$ , the polarization angle in the horizontal plane  $\varphi_1 = 0^\circ$ ,  $\alpha = 7$  km/s,  $\beta = \alpha/\sqrt{3}$ ,  $a = 10$  km,  $b = 2$  km,  $\varepsilon_{\rho\rho}^2 = 0.00041$ ,  $\varepsilon_{\lambda\lambda}^2 = 0.001296$ ,

$\varepsilon_{\mu\mu}^2 = 0.002401$ ,  $\varepsilon_{\rho\lambda}^2 = 0.000756$ ,  $\varepsilon_{\rho\mu}^2 = 0.001029$ ,  $\varepsilon_{\lambda\mu}^2 = 0.001764$

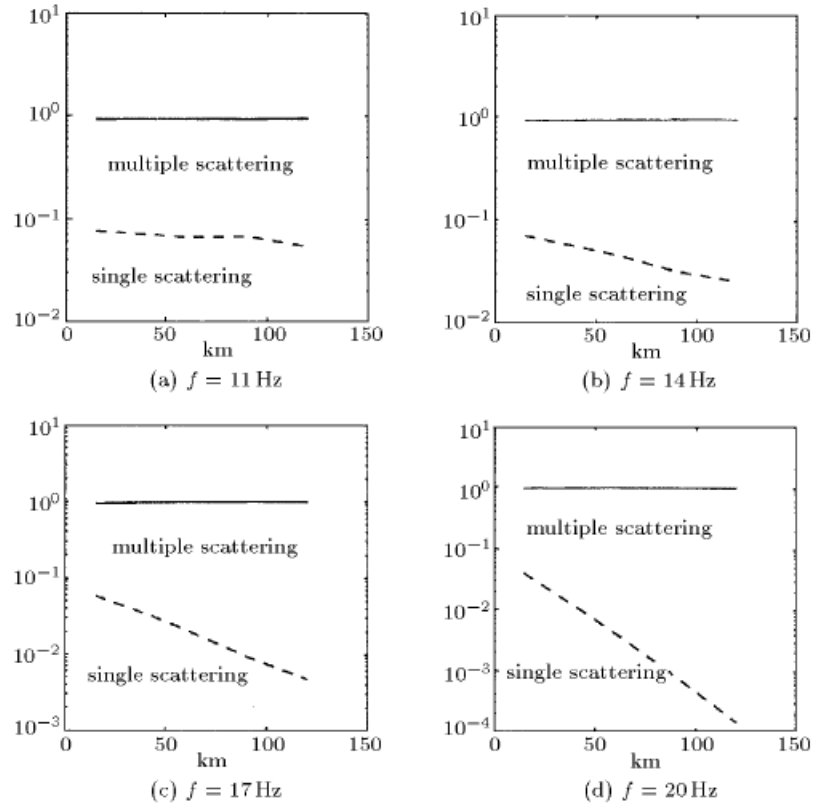


图 2(b)  $S$  波单次散射、多次散射功率密度与总散射功率密度之比的传播距离特性. 各参数为: 入射角  $\theta_1 = 0^\circ$ , 入射波水平极角  $\varphi_1 = 0^\circ$ , 纵波速度  $\alpha = 7 \text{ km/s}$ , 横波速度  $\beta = \alpha/\sqrt{3}$ , 横向非均匀相关长度  $a = 10 \text{ km}$ , 纵向非均匀相关长度  $b = 2 \text{ km}$ ,  $\varepsilon_{\rho\rho}^2 = 0.00041$ ,  $\varepsilon_{\lambda\lambda}^2 = 0.001296$ ,  $\varepsilon_{\mu\mu}^2 = 0.002401$ ,  $\varepsilon_{\rho\lambda}^2 = 0.000756$ ,  $\varepsilon_{\rho\mu}^2 = 0.001029$ ,  $\varepsilon_{\lambda\mu}^2 = 0.001764$

Fig.2(b) Propagation distance dependences of proportions of single and multiple scattered power densities of  $S$  waves to total scattered power density when the incident angle  $\theta_1 = 0^\circ$ , the polarization angle in the horizontal plane  $\varphi_1 = 0^\circ$ ,  $\alpha = 7 \text{ km/s}$ ,  $\beta = \alpha/\sqrt{3}$ ,  $a = 10 \text{ km}$ ,  $b = 2 \text{ km}$ ,  $\varepsilon_{\rho\rho}^2 = 0.00041$ ,  $\varepsilon_{\lambda\lambda}^2 = 0.001296$ ,  $\varepsilon_{\mu\mu}^2 = 0.002401$ ,  $\varepsilon_{\rho\lambda}^2 = 0.000756$ ,  $\varepsilon_{\rho\mu}^2 = 0.001029$ ,  $\varepsilon_{\lambda\mu}^2 = 0.001764$

## 5 高阶散射及其衰减

我们可以采用式 (23)~(25) 及 (27) 计算一阶散射和高阶散射. 图 2 (a) 和图 2(b) 为其数值结果. 图 2 (a) 给出了不同频率下,  $S$  波入射时各阶散射功率密度的传播距离特性. 从这个结果中, 我们发现一个很有意思的现象: 单次散射功率密度总是随着传播距离的增加而减弱. 当频率较低时 ( $f = 11 \text{ Hz}$  和  $f = 14 \text{ Hz}$ ),  $S$  波的二阶及三阶散射功率密度与  $S$  波总散射功率密度的比例将随着传播距离的增加而升高. 当频率较高时 ( $f = 17 \text{ Hz}$  和  $f = 20 \text{ Hz}$ ), 二阶及三阶散射功率密度将随着传播距离的增加而衰减. 频率越高, 衰减越快. 很明显, 随着频率和传播距离的增加, 更多的散射能量流向了更高阶的散射.

图 2(b) 显示了  $S$  波单次散射及多次散射功率密度与  $S$  波总散射功率密度的比例在不同频率下的传播距离特性. 从这一数值结果我们可以看出, 对于大延伸随机介质的强散射而言, 多次散射能量在尾波能量中占有很大的优势.

$Q_s^{-1}$  是描述非均匀介质中波的散射衰减特性的一个重要参数. 对弱散射而言, 在  $Q_s$  值计算中可将单次散射功率密度视为观测能量耗损<sup>[24,25]</sup>

$$Q_s^{-1} = \frac{P_1^C(z)}{P_1^C(0)\omega} \quad (30)$$

然而, 这仅是对弱散射情况的一个近似. 在强散射和大延伸非均匀介质的情况下, 上式是不精确的. 因此, 在  $Q_s$  值计算中, 式 (30) 中的能量耗损必须考虑成总散射功率密度

$$Q_s^{-1} = \frac{P_{\text{total}}^C(z)}{P_1^C(0)\omega} \quad (31)$$

图 3(a) 和图 3(b) 给出了不同传播距离下的  $S$  波单次散射及总散射  $Q_s^{-1}$  值的频率特性, 不同频率下的  $S$  波单次散射及总散射  $Q_s^{-1}$  值传播距离特性. 这些结果表明, 由单次散射近似得到的  $Q_s^{-1}$  值与用总散射方法得出的  $Q_s^{-1}$  值是有很大的差别的. 在强散射和大延伸非均匀介质的情况下, 用总散射方法得出的  $Q_s^{-1}$  值比用单次散射近似得到的  $Q_s^{-1}$  值高. 另外, 随着频率和传播距离增加, 用总散射方法得出的  $Q_s^{-1}$  值平滑地升高并趋近一常数值; 而由单次散射近似得到

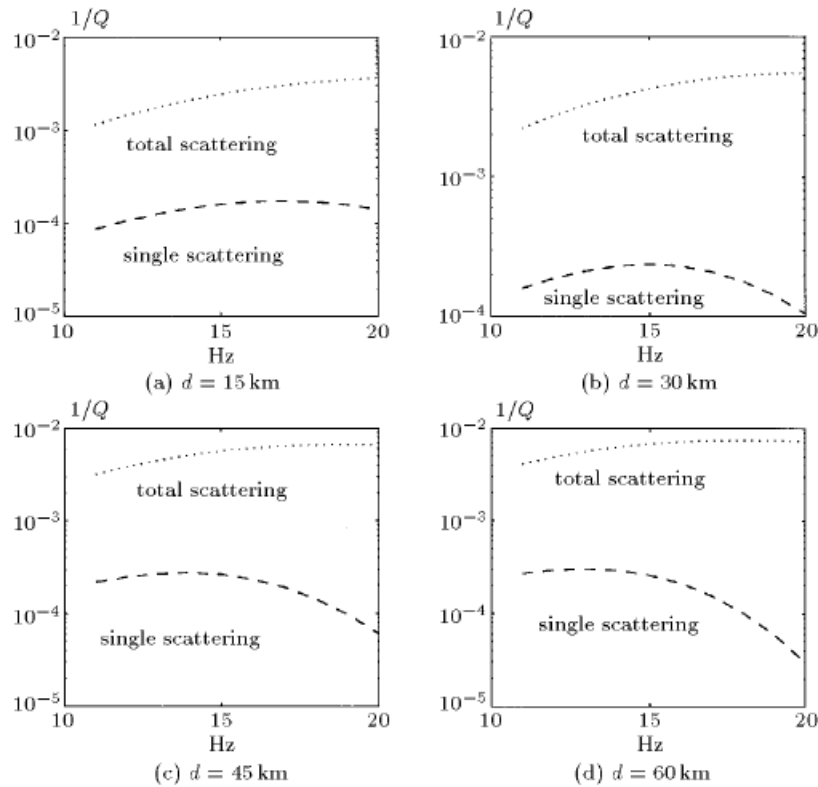


图 3(a)  $S$  波单次散射及多次散射衰减因子  $Q^{-1}$  的频率特性. 各参数为: 入射角  $\theta_1 = 0^\circ$ , 入射波水平极角  $\varphi_1 = 0^\circ$ , 纵波速度  $\alpha = 7 \text{ km/s}$ , 横波速度  $\beta = \alpha/\sqrt{3}$ , 横向非均匀相关长度  $a = 10 \text{ km}$ , 纵向非均匀相关长度  $b = 2 \text{ km}$ ,  $\varepsilon_{\rho\rho}^2 = 0.00041$ ,  $\varepsilon_{\lambda\lambda}^2 = 0.001296$ ,  $\varepsilon_{\mu\mu}^2 = 0.002401$ ,  $\varepsilon_{\rho\lambda}^2 = 0.000756$ ,  $\varepsilon_{\rho\mu}^2 = 0.001029$ ,  $\varepsilon_{\lambda\mu}^2 = 0.001764$

Fig.3(a) Propagation distance dependences of the scattering attenuation factor  $Q^{-1}$  for single and multiple scattering of  $S$  waves when the incident angle  $\theta_1 = 0^\circ$ , the polarization angle in the horizontal plane  $\varphi_1 = 0^\circ$ ,  $\alpha = 7 \text{ km/s}$ ,  $\beta = \alpha/\sqrt{3}$ ,  $a = 10 \text{ km}$ ,  $b = 2 \text{ km}$ ,  $\varepsilon_{\rho\rho}^2 = 0.00041$ ,  $\varepsilon_{\lambda\lambda}^2 = 0.001296$ ,

$$\varepsilon_{\mu\mu}^2 = 0.002401, \varepsilon_{\rho\lambda}^2 = 0.000756, \varepsilon_{\rho\mu}^2 = 0.001029, \varepsilon_{\lambda\mu}^2 = 0.001764$$

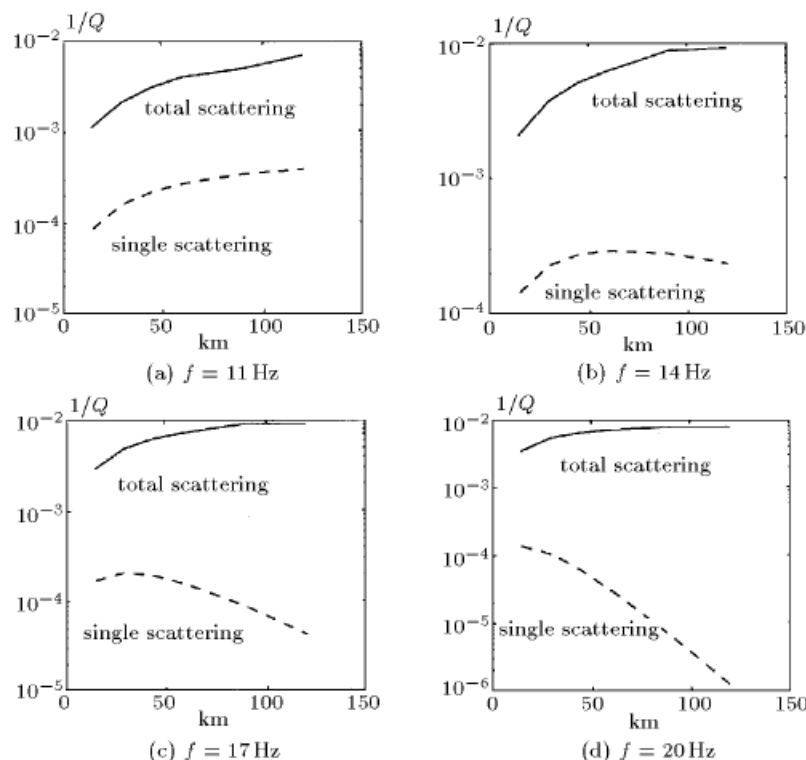


图 3(b)  $S$  波单次散射及多次散射衰减因子  $Q^{-1}$  的距离特性. 各参数为: 入射角  $\theta_I = 0^\circ$ , 入射波水平面极角  $\varphi_I = 0^\circ$ , 纵波速度  $\alpha = 7 \text{ km/s}$ , 横波速度  $\beta = \alpha/\sqrt{3}$ , 横向非均匀相关长度  $a = 10 \text{ km}$ , 纵向非均匀相关长度  $b = 2 \text{ km}$ ,  $\varepsilon_{\rho\rho}^2 = 0.00041$ ,  $\varepsilon_{\lambda\lambda}^2 = 0.001296$ ,  $\varepsilon_{\mu\mu}^2 = 0.002401$ ,  $\varepsilon_{\rho\lambda}^2 = 0.000756$ ,  $\varepsilon_{\rho\mu}^2 = 0.001029$ ,  $\varepsilon_{\lambda\mu}^2 = 0.001764$

Fig.3(b) Propagation distance dependences of the scattering attenuation factor  $Q^{-1}$  for single and multiple scattering of  $S$  waves when the incident angle  $\theta_I = 0^\circ$ , the polarization angle in the horizontal plane  $\varphi_I = 0^\circ$ ,  $\alpha = 7 \text{ km/s}$ ,  $\beta = \alpha/\sqrt{3}$ ,  $a = 10 \text{ km}$ ,  $b = 2 \text{ km}$ ,  $\varepsilon_{\rho\rho}^2 = 0.00041$ ,  $\varepsilon_{\lambda\lambda}^2 = 0.001296$ ,  $\varepsilon_{\mu\mu}^2 = 0.002401$ ,  $\varepsilon_{\rho\lambda}^2 = 0.000756$ ,  $\varepsilon_{\rho\mu}^2 = 0.001029$ ,  $\varepsilon_{\lambda\mu}^2 = 0.001764$

的  $Q_s^{-1}$  值则先升后降. 以上现象表明, 散射能量的耗损主要来源于大延伸非均匀介质的多次散射. 因此, 在  $Q_s$  值计算中, 相关情况下的式 (31) 是精确的.

应该指出的是, 上述计算方法仅适用于高频及大规模非均匀区的情况; 对于低频及小尺度非均匀体问题, 则必须考虑后向散射及转换散射.

## 6 总 结

为了得到波场中的能量传输及损耗表达式, 并建立适用于大延伸非均匀连续介质散射及散射衰减问题的方法, 我们发展了一个弹性动力学能量传递理论. 在此基础上, 建立了弹性多次散射模型. 我们采用此模型计算了多次散射的能通量, 并处理了相应的散射衰减问题. 该理论既适用于强散射, 也适用于弱散射; 既适用于普通散射, 也适用于转换散射.

由于入射波场与介质非均匀性在空间及波数域内的相互影响不是局部的, 因此弹性非均匀区的多次散射难以完全公式化. 但我们可采用数值与解析相结合的方法研究多次散射问题. 本文数值结果表明, 强散射与大延伸非均匀介质情形中的多次散射作用占优势, 而单次散射作用小得足以忽略不计. 因此, 在上述情况下, 单次散射功率密度不能用于散射衰减因子  $Q_s^{-1}$  的计

算, 只有总散射功率密度才可用于这项计算. 这些数值结果还表明, 地震图上的尾波主要来源于散射  $S$  波.

需要特别指出的是, 当非均匀区域为整个研究空间时, 本文的介质模型可等效于变背景非均匀介质. 为了便于计算, 背景各参数可近似地取介质内该参数的平均值.

文中我们以本文第 I 部分<sup>[18]</sup>给出的单次散射理论为基础, 发展了大延伸非均匀介质的弹性波多次散射理论. 这一进展使得全弹性散射理论更为广义、完整和实用.

### 参 考 文 献

- 1 Aki K. Analysis of the seismic coda of local earthquakes as scattered waves. *J Geophys Res*, 1969, 74: 615~631
- 2 Wu RS, Aki K. Elastic wave scattering by a random medium and the small-scale inhomogeneities in the lithosphere. *J Geophys Res*, 1985, 90: 10261~10273
- 3 Li XF, Hudson JA. Time-domain computation of elastic scattering from a heterogeneous layer. *Geophys J Int*, 1997, 128: 197~203
- 4 Bostok MG, Rondenay S. Migration of scattered teleseismic body waves. *Geophys J Int*, 1999, 137: 732~746
- 5 Ishimaru A. Theory and application of wave propagation and scattering in random media. *Proc IEEE*, 1997, 65: 1030~1061
- 6 Wu RS. Multiple scattering and energy transfer of seismic waves—separation of scattering effect from intrinsic attenuation—I. Theoretical modelling. *Geophys J R Astron Soc*, 1985, 82: 57~80
- 7 Frankel A, Clayton RW. Finite difference simulation of seismic scattering: implications for the propagation of short-period seismic waves in the crust and models of crustal heterogeneity. *J Geophys Res*, 1986, 91: 6465~6489
- 8 Jannaud LR, Adler PM, Jacquim CG. Spectral analysis and inversion of codas. *J Geophys Res*, 1991, 96: 18215~18231
- 9 Korn M.  $P$ -wave coda analysis of short-period array data and the scattering and absorptive properties of the lithosphere. *Geophys J Int*, 1988, 93: 437~449
- 10 Frankel A, Wennerberg L. Energy-flux model of seismic coda: scattering and intrinsic attenuation. *Bull Seism Soc Am*, 1987, 77: 1223~1225
- 11 Shapiro SA, Kneib G. Seismic attenuation by scattering: theory and numerical results. *Geophys J Int*, 1993, 114: 373~391
- 12 Uscinski BJ. Mean field and scattered field. *Phil Trans Roy Soc*, 1968, A262: 609
- 13 Uscinski BJ. The multiple scattering of waves in irregular media (part II). *Phil Trans Roy Soc London*, 1968, A307: 609
- 14 Uscinski BJ. The propagation and broadening of pulses in weakly irregular media. *Proc Roy Soc London*, 1974, A336: 379~392
- 15 Uscinski BJ. The Elements of Wave Propagation in Random Media. London: McGraw-Hill International Book Company, 1977
- 16 Li XF. Elastic scattering of  $P$  and  $S$  wave from a continuous and heterogeneous layer. R. R. University of Cambridge, 1993, 8: 1~61
- 17 Li XF, Hudson JA. Elastic scattered waves from a continuous and heterogeneous layer. *Geophys J Int*, 1995, 121: 82~102
- 18 李小凡. 大延伸非均匀介质中地震波全弹性散射理论 I——弹性波单次散射理论. 力学学报, 2002, 34(4): 559~568 (Li Xiaofan. Theory of full elastic scattering of seismic waves for heterogeneous media of large extent I——Theory of elastic waves of single scattering. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, 34(4): 559~568 (in Chinese))
- 19 Hudson JA, Heritage JR. The use of the Born approximation in seismic scattering problems. *Geophys J R Astron Soc*, 1981, 66: 221~240
- 20 Fejer JA. The diffraction of waves in passing through an irregular refracting medium. *Proc Roy Soc London*, 1953, 220: 455~471

- 21 Roth M, Korn M. Single scattering theory versus numerical modeling in 2-D random media. *Geophys J Int*, 1993, 112: 124~140
- 22 Knopoff L, Hudson JA. Scattering of elastic waves by small inhomogeneities. *J Acoust Soc Am*, 1964, 36: 338~343
- 23 Knopoff L, Hudson JA. Frequency dependence of scattered elastic waves. *J Acoust Soc Am*, 1967, 42: 18~20
- 24 Wu RS. Attenuation of short period seismic waves due to scattering. *Geophys Res Lett*, 1982, 9: 9~12
- 25 Dnbendroff B, Menke W. Time-domain apparent-attenuation operators for compressional and waves: experiment versus single-scattering theory. *J Geophys Res*, 1986, 91: 14023~14032

## THEORY OF FULL ELASTIC SCATTERING OF SEISMIC WAVES FOR HETEROGENEOUS MEDIA OF LARGE EXTENT——II THEORY OF ELASTIC WAVES OF MULTIPLE SCATTERING<sup>1)</sup>

Li Xiaofan

(Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101, China)

**Abstract** In this paper, an elastodynamic energy transport theory to form expressions for energy transmission through a heterogeneous continuum of large extent is developed. A model of multiple scattering for a random elastic continuum is constructed by an iterative method based on single scattering by a thin heterogeneous layer or screen. This model is available both for strong scattering and for weak scattering, and both for common-type scattering ( $P$ - $P$  and  $S$ - $S$ ) and converted scattering ( $P$ - $S$  and  $S$ - $P$ ), although here we assume high frequencies so that only forward scattering and common-type scattering are considered. Using this model, the energy flux of multiple scattering is calculated and the scattering attenuation is treated. Some numerical results have been obtained. These results show that coda waves in seismograms mainly come from the scattering of  $S$  waves.

**Key words** attenuation, energy transport, heterogeneous media, scattering, multiple scattering, elastodynamics, seismic coda

---

Received 25 January 2000, revised 9 July 2002.

1) The project supported by the National Outstanding Young Investigator Grant of China (40025412), the Chinese Academy of Sciences (10010120, KZCX-07 and 1980338), the Committee of Vice-Chancellors and Principals of the Universities of the United Kingdom and the Cambridge Overseas Trust.