

框架陀螺仪运动的混沌性态¹⁾

刘延柱 成 功

(上海交通大学工程力学系, 上海 200030)

摘要 讨论理想状态下框架支承陀螺仪的运动, 列出以框架转角及对应的广义动量为变量的正则方程. 应用 Melnikov 方法和 Poincaré 截面的数值方法证实, 转子对匀速旋转的微小偏离可导致混沌运动出现. 数值计算还证实, 基座的匀速转动亦可引起陀螺仪的混沌运动. 从而表明, 实验观测到的陀螺仪随机漂移现象也可来源于内禀随机性, 而不仅是外在随机因素的作用结果.

关键词 陀螺仪, 混沌, Melnikov 方法, Poincaré 截面

引 言

近期研究表明, 对经典刚体动力学可积情形的微小偏离可导致混沌运动^[1~4]. 在轴承为理想约束, 质心与支承中心重合, 转子匀速旋转等理想条件下, 框架支承的自由陀螺仪为可积的 Hamilton 系统. 本文应用 Melnikov 方法和 Poincaré 截面的数值方法证实, 转子对匀速旋转的微小偏离可导致混沌运动出现. 数值计算还证实, 基座的匀速转动亦可引起陀螺仪的混沌运动. 从而表明, 实验观测到的陀螺仪随机漂移现象也可来源于内禀随机性, 而不仅是外在随机因素的作用结果.

1 未扰运动的正则方程及其积分

设框架支承陀螺仪由内、外框架和转子组成. 以框架和转子的转轴交点 O 为原点, 建立基座坐标系 ($O-XYZ$), 设外环坐标系 ($O-x_0y_0z_0$) 相对基座绕 X 轴转动 α 角, 内环坐标系 ($O-xyz$) 相对外环绕 y_0 轴转动 β 角, 转子坐标系相对内环绕 z 轴转动 φ 角 (图1)^[5]. 设各部件的质心均与支承中心 O 重合, 外环、内环的主转动惯量分别为 A_0, B_0, C_0 和 A_1, B_1, C_1 , 轴对称转子的赤道和极转动惯量为 A_R, C_R . 为

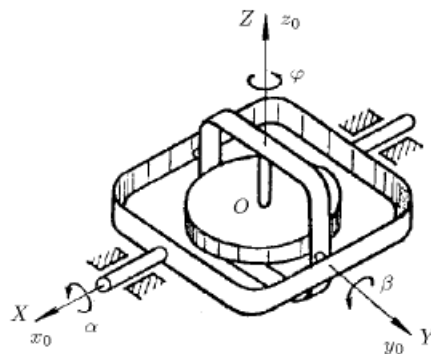


图 1 框架陀螺仪

Fig.1 Gimbal gyroscope

使计算适当简化, 设陀螺的质量几何满足 $A_1 + A_R - C_1 = 0$. 利用广义坐标 α, β, φ 及所对应的广义动量 $p_\alpha, p_\beta, p_\varphi$ 建立系统的 Hamilton 函数

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A} (p_\alpha - p_\varphi \sin \beta)^2 + \frac{1}{B} p_\beta^2 + \frac{1}{C_R} p_\varphi^2 \right] \quad (1)$$

2001-06-06 收到第一稿, 2001-12-16 收到修改稿.

1) 上海市科技发展基金 (98JC14032) 资助项目.

其中 $A = A_0 + C_1, B = B_1 + A_R$. 由于 Hamilton 函数不含 φ, α , 有以下循环积分

$$p_\varphi = C_R(\dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\varphi}) = G_0 \quad (2)$$

$$p_\alpha = A\dot{\alpha} + C_R(\dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\varphi}) \sin \beta = G_0 \sin \beta^* \quad (3)$$

其中积分常数 G_0 为转子稳态旋转时的常值动量矩, 常数 β^* 由内环转角和外环角速度的初值 $\beta_0, \dot{\alpha}_0$ 确定, $\sin \beta^* = \sin \beta_0 + (A/G_0)\dot{\alpha}_0$. G_0 足够大时, β^* 与 β_0 的值接近. 循环积分的存在使系统的自由度减为 1, 以 β, p_β 为独立变量列出正则方程

$$\dot{\beta} = -\frac{\partial H}{\partial p_\beta} = \frac{\nu^2}{B} \cos \beta (\sin \beta^* - \sin \beta) \quad (4a)$$

$$\dot{p}_\beta = \frac{\partial H}{\partial \beta} = \frac{p_\beta}{B} \quad (4b)$$

其中参数 $\nu^2 = G_0^2 B/A$. 从上式消去时间变量, 导出 (β, p_β) 相平面内的微分方程

$$\frac{dp_\beta}{d\beta} = \frac{\nu^2 \cos \beta (\sin \beta^* - \sin \beta)}{p_\beta} \quad (5)$$

内环无初始角速度时 p_β 的初值为零, 从方程 (5) 积分得到以 $\dot{\alpha}_0$ 为参变量的相轨迹曲线族

$$p_\beta^2 + \nu^2 (\sin \beta^* - \sin \beta)^2 = AB\dot{\alpha}_0^2 \quad (6)$$

方程 (5) 在 β 的 $[-\pi/2, \pi/2]$ 区间内存在 2 个鞍点 $S_{1,3}$ 和 1 个中心 S_2 (见图 2)

$$\left. \begin{aligned} S_1: \beta_s = \pi/2, p_{\beta_s} = 0 \text{ (鞍点)} \\ S_2: \beta_s = \beta^*, p_{\beta_s} = 0 \text{ (中心)} \\ S_3: \beta_s = -\pi/2, p_{\beta_s} = 0 \text{ (鞍点)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

沿过鞍点 S_1 的同宿轨道和过鞍点 S_3 的异宿轨道的时间积分为

$$t = \pm \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{B d\beta}{\nu \sqrt{\cos^2 \beta \mp 2 \sin \beta^* (1 \mp \sin \beta)}} \quad (8)$$

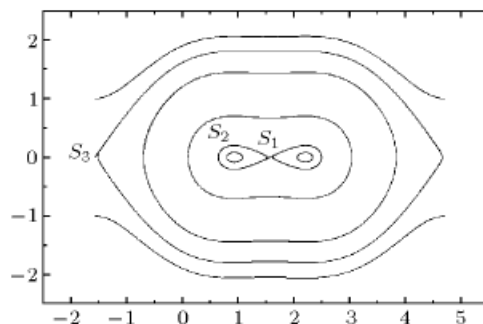


图 2 未扰运动的相轨迹图

Fig.2 Phase trajectories of undisturbed motion

2 转子转速的微小扰动引起的混沌运动

设由于陀螺仪驱动的周期扰动, 转子动量矩产生微小周期分量. 式 (2) 改为

$$p_{\varphi} = C_R(\dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\varphi}) = G_0(1 + \epsilon \sin \omega t) \quad (9)$$

代入式 (1) 计算受扰后陀螺的 Hamilton 函数, 只保留 ϵ 的一次项, 得到

$$H = H_0 + \epsilon H_1 \quad (10)$$

其中 H_0 为无扰情形的 Hamilton 函数, H_1 为扰动引起的增量

$$H_0 = \frac{1}{2B}[p_{\beta}^2 + \nu^2(\sin \beta^* - \sin \beta)^2] \quad (11)$$

$$H_1 = \frac{\nu^2}{B}[\sin \beta(\sin \beta - \sin \beta^*) + \lambda] \sin \omega t \quad (12)$$

常数 $\lambda = A/C_R$ 为转动惯量比. 利用式 (10) 列出受扰运动的正则方程

$$\dot{p}_{\beta} = \frac{\nu^2}{B} \cos \beta [\sin \beta^* - \sin \beta + \epsilon(2 \sin \beta - \sin \beta^*) \sin \omega t] \quad (13a)$$

$$\dot{\beta} = \frac{p_{\beta}}{B} \quad (13b)$$

利用式 (8) 和 (4b) 将同宿轨道表示为以 t 为参变量的函数 $\beta = \beta^{(1)}(t)$, $p_{\beta} = p_{\beta}^{(1)}(t)$, 写出与同宿轨道对应的 Melnikov 函数

$$M_1(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\beta}^{(1)}(t) \cos \beta^{(1)}(t) [2 \sin \beta^{(1)}(t) - \sin \beta^*] \sin \omega(t + t_0) dt \quad (14)$$

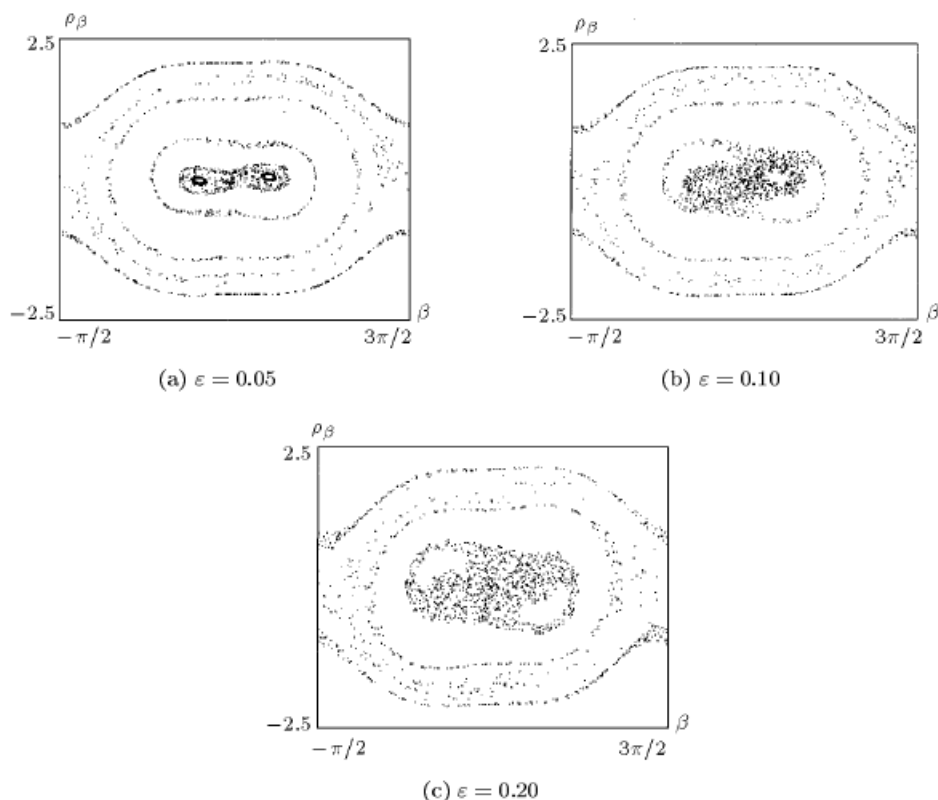
由于 $\beta^{(1)}(t)$ 为偶函数, $p_{\beta}^{(1)}(t)$ 为奇函数, 可将上式简化为

$$M_1(t_0) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} p_{\beta}^{(1)}(t) \cos \beta^{(1)}(t) [2 \sin \beta^{(1)}(t) - \sin \beta^*] \sin \omega(t) dt \right\} \cos \omega t_0 \quad (15)$$

与此类似, 利用异宿轨道的参数方程 $\beta = \beta^{(2)}(t)$, $p_{\beta} = p_{\beta}^{(2)}(t)$, 写出与异宿轨道对应的 Melnikov 函数

$$M_2(t_0) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} p_{\beta}^{(2)}(t) \cos \beta^{(2)}(t) [2 \sin \beta^{(2)}(t) - \sin \beta^*] \sin \omega(t) dt \right\} \cos \omega t_0 \quad (16)$$

数值计算证实式 (15), (16) 中括号内的积分式不恒等于零, 因此 Melnikov 函数 $M_1(t_0)$ 和 $M_2(t_0)$ 有简单零点, 表明系统的受扰运动存在 Smale 马蹄映射意义下的混沌^[1,6]. 为证实此结论, 定义 Poincaré 截面: $\Sigma = \{(\beta, p_{\beta}) | t = 2k\pi; k = 1, 2, \dots\}$, 令 $B = 1, \sin \beta^* = 0.8, \omega = 1, \nu^2 = 1$, 取 9 个初始点, 每点计算 120 000 步, 应用四阶 Runge-Kutta 法对方程组 (13) 作数值积分. 计算结果 (图 3) 显示出在周期扰动作用下陀螺仪运动的混沌性态.

图 3 Poincaré 截面 (β, p_β) Fig.3 Poincaré surface of section (β, p_β)

3 基座匀速转动引起的混沌运动

设陀螺仪的基座绕垂直轴 Z 以角速度 ω_0 匀速转动, 则系统的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A} (p_\alpha - p_\varphi \sin \beta)^2 + \frac{1}{B} (p_\beta - B\omega_0 \sin \alpha)^2 + \frac{1}{C_R} (p_\varphi - C_R \omega_0 \cos \alpha \cos \beta)^2 \right] - \frac{1}{2} \omega_0^2 [(B + B_0) \sin^2 \alpha + (C_1 + C_0) \cos^2 \alpha + C_R \cos^2 \alpha \cos^2 \beta] \quad (17)$$

由于 Hamilton 函数不含 φ , 有以下循环积分

$$p_\varphi = C_R(\dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\varphi} + \omega_0 \cos \alpha \cos \beta) = G_0 \quad (18)$$

导出系统的 Hamilton 正则方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{1}{A} (p_\alpha - G_0 \sin \beta) \\ \dot{p}_\alpha &= \omega_0 (p_\beta \cos \alpha - G_0 \sin \alpha \cos \beta - A^* \omega_0 \sin \alpha \cos \alpha) \\ \dot{\beta} &= \frac{1}{B} (p_\beta - B\omega_0 \sin \alpha) \\ \dot{p}_\beta &= \frac{G_0}{A} \cos \beta (p_\alpha - G_0 \sin \beta) - \omega_0 G_0 \cos \alpha \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其中 $A^* = C_0 + C_1 - B_0$. 令 $A = 2, G_0 = 1, A^* = 1, B = 1, p_\alpha = 0.8$, 应用四阶 Runge-Kutta 法作数值积分, 取 16 个初始点, 每点计算 400 000 步, 计算得到的 Poincaré 截面如图 4 所示.

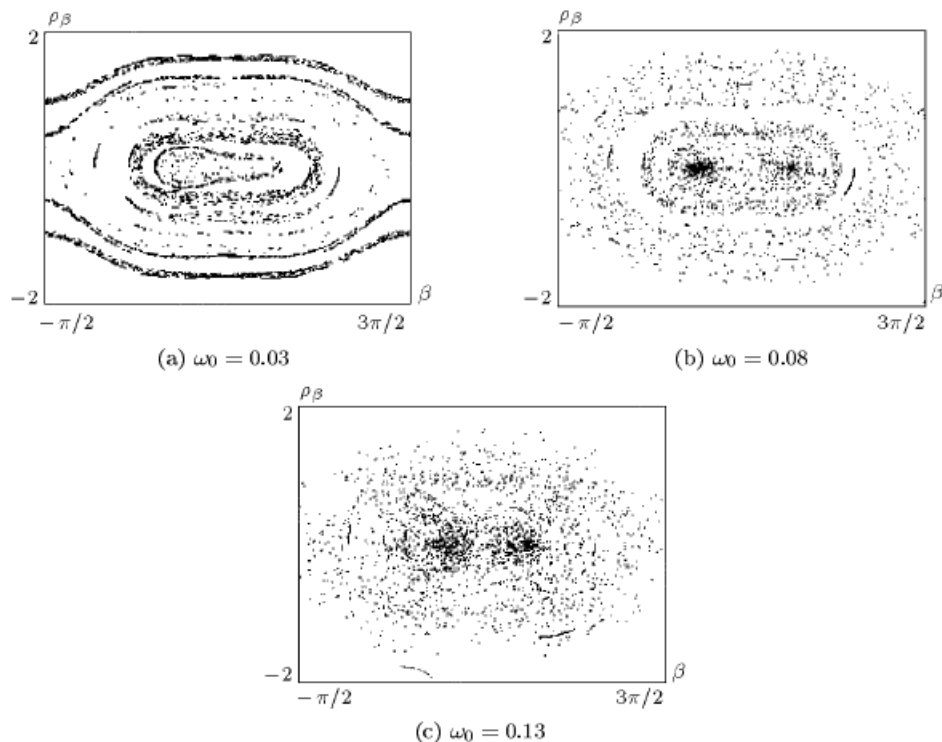


图 4 Poincaré 截面 (β, p_β)

Fig.4 Poincaré surface of section (β, p_β)

4 结 论

传统认为, 实验观测到的陀螺仪随机漂移现象来源于外在随机因素. 本文的分析表明, 转子对匀速旋转的微小偏离或基座的匀速转动均可使陀螺仪运动呈现混沌状态. 从而证明陀螺仪的随机漂移也可来源于内禀随机性, 而不仅是外在随机因素的作用结果.

参 考 文 献

- 1 Holmes PJ, Marsden J. Horseshoe and Arnold diffusion for Hamiltonian system on Lie groups. *Indiana Univ Math Journal*, 1983, 32(2): 273~309
- 2 Broucke RA. On the use of Poincaré surface of section in rigid-body motion. *J Astronaut Science*, 1993, 41(4): 593~602
- 3 彭建华, 刘延柱. 准 Lagrange 陀螺的混沌运动. 非线性动力学学报, 1996, 3(4): 333~337 (Peng Jianhua, Liu Yanzhu. Chaotic motion of a quasi-Lagrange top. *J of Nonlinear Dynamics*, 1996, 3(4): 333~337 (in Chinese))
- 4 彭建华, 刘延柱. 参数激励的刚体混沌运动. 固体力学学报, 1997, 18(3): 279~282 (Peng Jianhua, Liu Yanzhu. Chaotic motion of rigid body under parametric excitation. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1997, 18(3): 279~282 (in Chinese))
- 5 刘延柱. 陀螺力学. 北京: 科学出版社. 1986 (Liu Yanzhu. Gyrodynamics. Beijing: Science Press, 1986 (in Chinese))

- 6 刘延柱, 陈立群. 非线性振动. 北京: 高等教育出版社. 2001 (Liu Yanzhu, Chen Liqun. Nonlinear vibration. Beijing: High Education Press, 2001 (in Chinese))

CHAOTIC BEHAVIOR OF GIMBAL GYROSCOPE MOTION¹⁾

Liu Yanzhu Cheng Gong

(Shanghai Jiao Tong University, Department of Engineering Mechanics, Shanghai 200030, China)

Abstract The motion of a gimbal gyroscope is discussed in the present paper. The gyroscope is composed of gimbals and rotor, and is regarded as a Hamilton system when the mass centers of gimbals and rotor coincide with the center of suspension and the bearings of gimbals are ideal constraints. The Hamilton's canonical equations with the rotational angles of gimbals and its generalized momentums as variables are derived. When the spin of rotor is slightly deviated from the stationary rotation with uniform speed, the gimbals may perform a chaotic motion, which can be predicted by using the Melnikov's method and verified by numerical calculation of the Poincaré surface of section. In another case when the base of gyroscope rotates uniformly, the chaotic behavior of gimbal's motion can be demonstrated by the Poincaré maps too. It is shown that the gyro's random drift phenomenon observed in the experiment can also be caused by the intrinsic stochasticity in addition to the action of external stochastic factors.

Key words gyroscope, chaos, Melnikov's method, Poincaré's section

Received 6 June 2001, revised 16 December 2001.

1) The project supported by the Shanghai Science and Technology Development Foundation (98JC14032).