

靠近排列的两个交错方柱三维绕流的数值模拟¹⁾

朱祚金

(中国科学技术大学火灾科学国家重点实验室, 工程科学学院热科学和能源工程系, 合肥 230026)

摘要 通过用时间分裂算法求解 Navier-Stokes 方程, 对中等 Reynolds 数下靠近排列的两个交错方柱三维绕流进行了数值模拟, 其中, 中间速度场用四阶 Adams 格式计算, 压力场通过结合近似因子分解方法 AF1 与稳定的双共轭梯度方法 Bi-CGSTAB 进行迭代求解. 数值模拟发现当两个方柱靠得较近时, 有互相吸引趋势, 而且上游方柱的 Strouhal 数较大. 方柱的交错排列方式对绕流影响明显. 计算结果与实验定性吻合, 而且比用 MAC-AF1 方法计算的结果好.

关键词 方柱绕流, 交错排列, 近似因子分解, 稳定的双共轭梯度方法, 二次流动

引 言

由于在工程应用中的重要性, 关于绕柱流动问题已经研究了多年. Hayashi 等^[1] 实验研究了并列平板绕流的尾迹特征. 林胜天等^[2] 对矩形柱群绕流进行了实验. 凌国灿等^[3] 用一种区域分裂混合方法数值研究了圆柱绕流, 以寻找分离流动中涡诱导的流体动力, 得到了与实验符合良好的结果. 朱祚金等^[4] 用 MAC-AF1 方法数值模拟了矩形柱和柱群绕流, 但限于当时的计算条件, 所得结果有待改进. 最近, Sohankar 等^[5] 给出了单个方柱二维和三维绕流的数值研究结果, 发现三维计算结果与实验符合得比较好.

本文数值研究靠近排列的两个交错方柱的三维层流绕流 (见图 1). 为了得出文献 [4] 中报导的改进结果, 把近似因子分解方法 AF1^[6] 与稳定的双共轭梯度方法 Bi-CGSTAB^[7] 联合起来计算压力. 这样, 可以利用 AF1 迭代收敛快, Bi-CGSTAB 精度高的优点. 因为文献 [8] 用了 Bi-CGSTAB 方法, 文献 [4] 详细介绍了时间分裂方法, 文献 [6] 也介绍了 AF1 方法, 因此, 对算法部分, 文中只作简要说明, 主要介绍数值结果.

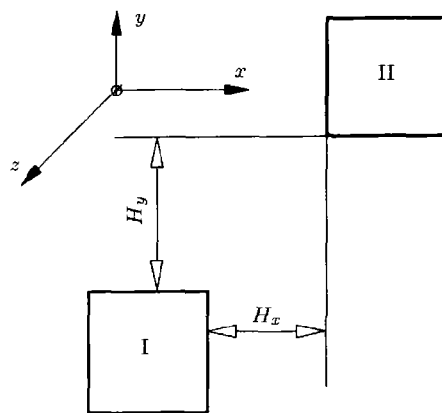


图 1 交错方柱示意图

Fig.1 The schematic of the two staggered square cylinders

1 控制方程和数值方法

对于靠近排列的两个交错方柱的三维层流绕流, 相应的控制方程是

2001-01-02 收到第一稿, 2001-12-18 收到修改稿.

1) 火灾科学国家重点实验室 (KF0101) 和国家自然科学基金 (19872062) 资助项目.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} / Re \quad (2)$$

其中, $Re(=u_\infty/\nu)$ 是计算用的单位长度尺度 Reynolds 数, ν 代表流体运动黏性系数; $\mathbf{u}$ 和 p 分别是用来流速度 u_∞ 和 ρu_∞^2 进行无量纲化的速度矢量和压力. 这时相应的时间尺度是 $1/u_\infty$.

在方柱表面上, 上下前后侧壁速度满足无滑移条件 (类似于风洞实验情况), 上游边界上速度大小给定但攻角为零, 下游出口边界上速度分量 u_1, u_3 对流动方向坐标 $x_1(=x)$ 的一阶偏导数为零, $x_2(=y)$ 方向的速度分量 u_2 为零. 根据文献 [9], 如果在边界上中间速度等于实际速度, 则求解压力时, 应当取第二类齐次边界条件. 因此, 如果用 $\tilde{u}_i^{n+1}$ 代表中间速度, δt 表示时间步长, 则时间分裂格式给出时间层 $n+1$ 上的速度

$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \delta t(\nabla p)^{n+1} \quad (3)$$

压力场先用近似因子分解方法 AF1 迭代求解, 取 α 为迭代加速参数, 则迭代格式为

$$(\alpha - \delta_{xx}/\delta x^2)(\alpha - \delta_{yy}/\delta y^2)(\alpha - \delta_{zz}/\delta z^2)\delta p^{m+1} = 2\alpha^2(\nabla^2 p^m - \nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (4)$$

其中略去了时间层标记. δ_{xx}, δ_{yy} 和 δ_{zz} 分别是 x, y 和 z 方向的中心差分算子. 比如, 如果 δ_{xx} 作用在格点 (i, j, k) 的压力迭代增量 δp 上, 则显然有 $\delta_{xx}(\delta p_{ijk}) = \delta p_{i+1,j,k} - 2\delta p_{ijk} + \delta p_{i-1,j,k}$. 而 m 是迭代次数, $\delta p^{m+1} = p^{m+1} - p^m$. 当 $m=0$ 时, p 的迭代初值取为时间层 n 上的压力 p^n , AF1 迭代收敛时的压力就暂定为 p^{n+1} , 收敛准则是残差的模与时间层 n 上压力场对应的残差模的比值小于 10^{-3} . 但是, 为了提高方柱附近的压力计算精度, 在两个方柱附近的两个子区内用 Bi-CGSTAB 方法继续迭代计算压力. 选择的子区在 z 方向的格点数保持不变, 而在 (x, y) 平面内, 子区包含的网格点处于两个交错方柱附近, 它的外边界到柱表面的网格点数为 5 个左右. 比如, 当网格为 $121 \times 71 \times 21$ 时, 在 (x, y) 平面内, 处于方柱 I 内的网格是 $\{i \in [10, 17], j \in [24, 30]\}$, 则相应的子区选择为 $\{i \in [5, 23], j \in [18, 36]\}$. 在子区内 Bi-CGSTAB 方法迭代收敛的条件是, 残差的模与迭代起始时残差模的比值小于 10^{-5} . 时间分裂方法求解 Navier-Stokes 方程要求 δt 的选择满足 Courant 条件.

2 数值结果与讨论

绕流的控制方程在均匀的交错网格上进行离散. 计算过程中空间步长取为 $\delta x = \delta y = 0.1$, 和 $\delta z = 0.5$, 时间步长是 $\delta t = 0.01$. 在方柱截面的边上布置了 7 个网格, 即 $d = 7\delta y$. 阻塞比是根据两个方柱的阻塞效应计算的. 对于表 1 和表 2 中的结果, 阻塞比分别是 $\beta = 2d/[(j_{\max}-1)\delta y] = 20\%$ 和 15.56% , 其中 $j_{\max}$ 是 y 方向总的网格点数. 计算在浪潮赛阳 466 微机上进行, 每个时间步 AF1 迭代大约为 6 步, 而 Bi-CGSTAB 迭代约为 9 步. 在表 2 中, $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \bar{D}_1$, 和 $\bar{D}_2$ 分别是关于方柱 I 和方柱 II 的展向平均升力和阻力系数均值. 带上标 “ r ” 时表示相应的 rms(均方根)值. r_{L1}, r_{L2}, r_{D1} , 和 r_{D2} 分别是关于升力和阻力系数的展向平均的相关系数. 对于表中列出的情况, $\delta t = 0.01$, 展向尺寸比 $A = z_{\max}/d = 14.3$. 这里需要说明的是展向平均的相关系数的定义. 为简单起见我们只考虑 r_{L1} , 因为其它的相关系数的定义是完全类似的. 对于给定的 $z = z_k$, k 为对应于任一 z 值的节点数, 存在升力的时间序列 $l_1^n(z_k) = l_{1,k}^n$, 时间层 $n = 1, \dots, N$. 考虑到展向网格均匀, 一定有 $r_{L1} = \sum_{k=1}^{k_{\max}} r_{L1,k}/k_{\max}$; 同时, $L_1^n = \sum_{k=1}^{k_{\max}} l_{1,k}^n/k_{\max}$. 因为

时间步长 δt 是固定的, 一定存在 $\bar{l}_{1,k} = \sum_{n=1}^N l_{1,k}^n / N$ 和 $\bar{L}_1 = \sum_{n=1}^N L_1^n / N$. 因此, 可以得出 $r_{L1,k} = \sum_{n=1}^N (l_{1,k}^n - \bar{l}_{1,k})(L_1^n - \bar{L}_1) / \{[\sum_{n=1}^N (l_{1,k}^n - \bar{l}_{1,k})^2][\sum_{n=1}^N (L_1^n - \bar{L}_1)^2]\}^{\frac{1}{2}}$.

表 1 网格为 $121 \times 71 \times 21$ 时的数值结果Table 1 The numerical results for grid $121 \times 71 \times 21$

$\beta = 20\%$	$H_x \times H_y = 0.7 \times 0.9$			$H_x \times H_y = 0.7 \times 2.5$		
Re_d	100	300	500	100	300	500
$\bar{L}_1$	0.0193	0.0268	0.0193	-0.0020	0.0081	-0.0120
$\bar{L}_2$	-0.0524	-0.0422	-0.0524	0.0048	-0.0039	-0.0011
$\bar{D}_1$	1.6998	1.7558	1.7792	1.6970	1.8396	1.9080
$\bar{D}_2$	1.5466	1.7110	1.7368	1.2917	1.3937	1.4342
L'_1	0.0677	0.1656	0.2041	0.1277	0.5948	0.7835
L'_2	0.3023	0.5428	0.5953	0.1635	0.4930	0.5824
D'_1	0.0268	0.0434	0.0494	0.0377	0.0683	0.0890
D'_2	0.0493	0.1438	0.1764	0.0393	0.0754	0.0923
r_{L1}	0.9885	0.9780	0.9835	0.9738	0.9660	0.9837
r_{L2}	0.9528	0.9544	0.9552	0.9526	0.9726	0.9752
r_{D1}	0.9801	0.9329	0.9760	0.9866	0.9717	0.9745
r_{D2}	0.9810	0.8518	0.9534	0.9851	0.9701	0.9709
St_1	0.2335	0.2335	0.2257	0.2023	0.2023	0.2023
St_2	0.1479	0.1479	0.1479	0.1634	0.1634	0.1712

表 2 网格为 $141 \times 91 \times 21$ 时的数值结果Table 2 The numerical results for grid $141 \times 91 \times 21$

$\beta = 15.56\%$	$H_x \times H_y = 0.7 \times 0.9$			$H_x \times H_y = 0.7 \times 2.5$		
Re_d	100	300	500	100	300	500
$\bar{L}_1$	0.0007	0.0276	0.0193	0.0062	0.0013	-0.0044
$\bar{L}_2$	-0.0242	-0.0416	-0.0506	-0.0040	-0.0112	-0.0076
$\bar{D}_1$	1.6790	1.7456	1.7685	1.6426	1.7572	1.8532
$\bar{D}_2$	1.4873	1.7130	1.7082	1.2042	1.3337	1.3709
L'_1	0.0680	0.1818	0.1976	0.1727	0.3757	0.6914
L'_2	0.2739	0.6349	0.6043	0.1823	0.4748	0.5563
D'_1	0.0461	0.0613	0.0641	0.0211	0.0551	0.0917
D'_2	0.0521	0.1798	0.1991	0.0308	0.0789	0.0956
r_{L1}	0.9981	0.9800	0.9813	0.9556	0.8277	0.9486
r_{L2}	0.9807	0.9699	0.9262	0.9587	0.9654	0.9670
r_{D1}	0.9999	0.9991	0.9988	0.9910	0.9863	0.9790
r_{D2}	0.9992	0.9837	0.9764	0.9932	0.9846	0.9854
St_1	0.2335	0.2257	0.2257	0.1868	0.1946	0.1946
St_2	0.1401	0.1479	0.1479	0.1479	0.1556	0.1634

表 1 和表 2 给出了 Reynolds 数为 $Re_d = d \cdot Re = 100, 300, 500$ 时, 对应于两种交错排列方式的 12 种计算情况的结果. 可以看出展向 (z 方向) 平均之后的方柱阻力系数时均值明显依赖于交错排列方式. 增加 H_y , 使两个方柱的阻力差别增大, 但 Strouhal 数的差别变小. 反之, 减小 H_y , 让两个方柱靠得更近些, 出现明显的相互吸引趋势, 因为此时 $\bar{L}_1 > 0, \bar{L}_2 < 0$. 增加 Reynolds 数, 使阻力系数的时均值略有增加, 但是阻力和升力系数的展向平均值明显增加. 在

表 2 中出现的一种例外情况, 是二次流动 (见图 2)(v, w) 引起的. 受侧壁影响, 在各个纵剖面内流场可以肯定有差别, 但为了保证流动的连续性, 在 (y, z) 平面内必然出现流动, 这里称它为二次流. 因为当 $\beta = 15.56\%$, $Re_d = 500$ 时, 二次流使相关系数的平均值降到 0.9262, 比 $Re_d = 300$ 时的计算值 0.9699 小几个百分点. 这说明二次流对阻力和升力系数大幅度脉动起抑制作用.

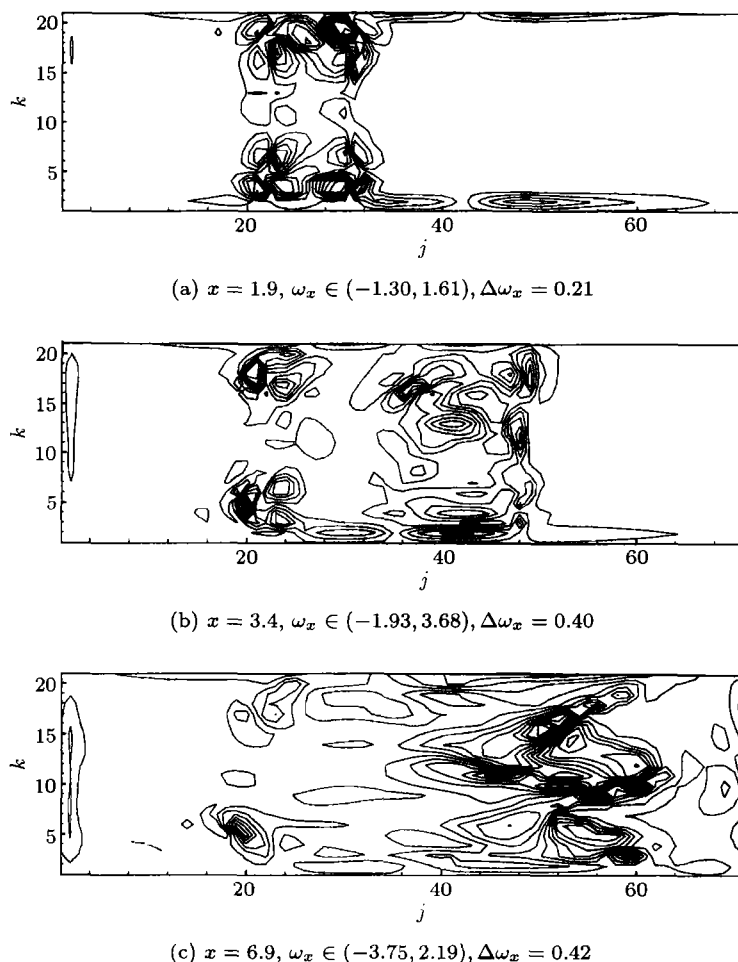


图 2 当 $Re_d = 500$, $H_x \times H_y = 0.7 \times 0.9$, 网格为 $121 \times 71 \times 21$, $t = 50$ 时, 流动方向涡量等值线

Fig.2 Streamwise vorticity contours $Re_d = 500$, $H_x \times H_y = 0.7 \times 0.9$, grid $121 \times 71 \times 21$, and $t = 50$

图 3 给出了 $Re_d = 500$, $H_x \times H_y = 0.7 \times 0.9$ 时展向平均阻力和升力系数的时间变化曲线. 根据这些曲线对应的时间序列数据进行离散 Fourier 变换, 可以得出如图 4 所示的能谱曲线. 从中可知方柱 I 和 II 绕流的 St 数分别为 0.2335 和 0.1478 (也可见表 1). 图 5 给出了相关系数沿展向 (z 方向, 用网格节点号 k 表示, $z = (k-1)\delta z$) 的分布. 显然, 二次流造成了 L_2 和 D_2 对应的相关系数出现波形状分布. 前后侧壁效应也非常明显.

林胜天等^[4]的实验表明, 当 $H_x \times H_y = 1.12d \times 1.12d$ 时 (d 是方柱截面正方形边长), 方柱 I 的阻力平均值为 2.0, 方柱 II 的阻力平均值为 1.5. 与此相比, 发现本文的计算结果是定性吻合的. 因为计算用的 Re_d 数与实验情况不同, 定量比较的条件不成立. 为了进一步表明计算结果

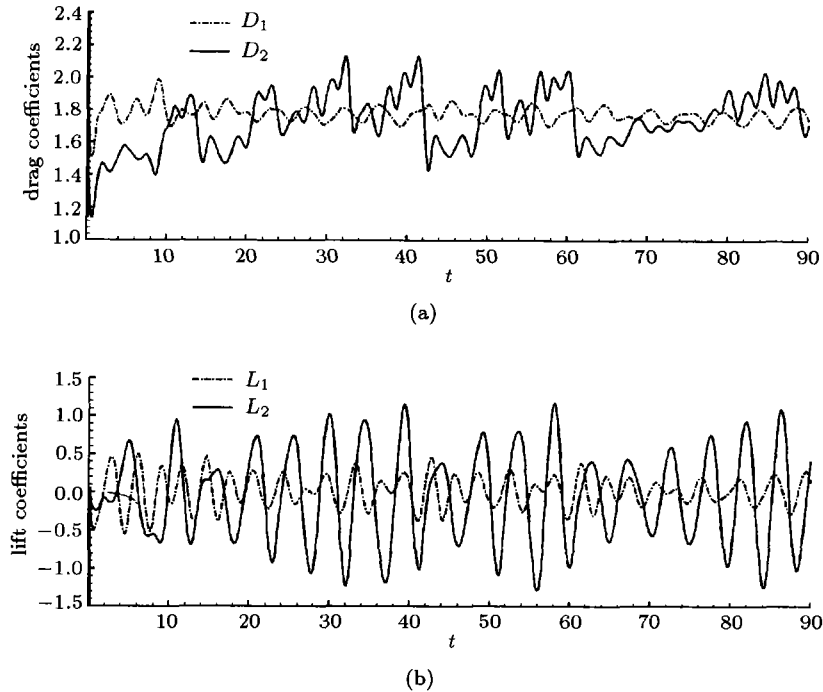


图 3 当 $Re_d = 500$, $H_x \times H_y = 0.7 \times 0.9$ 时, 展向平均的阻力系数 (a), 和升力系数 (b)

Fig.3 Spanwise-averaged drag (a) and lift (b) coefficients versus time for $Re_d = 500$, and $H_x \times H_y = 0.7 \times 0.9$

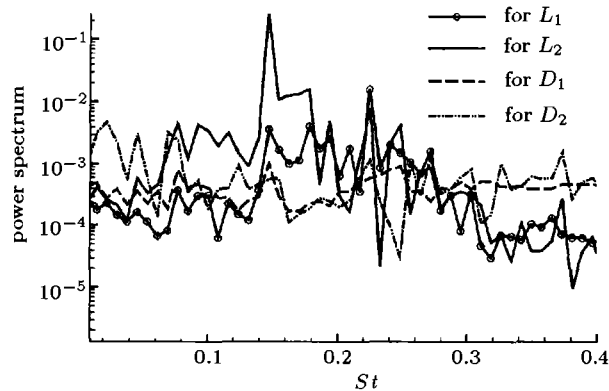


图 4 展向平均的升力和阻力系数的能谱, 绕流情况与图 2 相同

Fig.4 The power spectra for spanwise-averaged lift and drag coefficients for the case given in Fig.2

的合理性, 取空间网格步长 $\delta x = \delta y = 0.1$, 和 $\delta z = 0.42$, 时间步长 $\delta t = 0.01$, 让 $d = 7\delta y$, 对单个方柱绕流进行数值模拟, 得出的结果列在表 3 中 (表中 “*” 表示摘自文献 [5], 其中实验采用的阻塞比 $\beta < 3.6\%$). 为易于比较, 表 3 中还给出了六个 Re_d 下单个方柱绕流流动的实验结果, 它们用了下标 ‘ex’ 以示区别. 可见, 尽管计算得到的 Strouhal 数偏大, 但阻力值比较吻合. 要说明的是, 计算的阻塞比 ($=7.78\%$) 比相应的实验值 ($\leq 3.6\%$) 大.

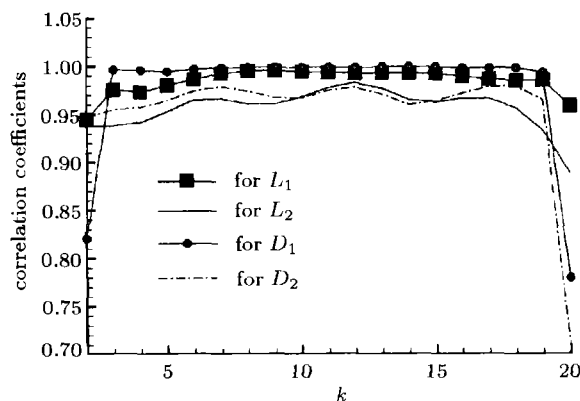


图 5 相关系数沿展向的分布, 绕流情况与图 2 相同

Fig.5 The distribution of correlation coefficients for lifts and drags in spanwise direction for the case given in Fig.2

表 3 网格为 $121 \times 91 \times 21$ 时单个方柱绕流的数值结果Table 3 The numerical results in case of flow around a square cylinder for grid $121 \times 91 \times 21$

Re_d	100	200	300	400	500	600
$\overline{D}$	1.560	1.609	1.622	1.615	1.721	1.763
$\overline{D}_{ex}^*$	1.60	1.45	1.52	1.60	1.90	2.00
St	0.160	0.163	0.163	0.167	0.171	0.171
St_{ex}	0.140	0.140	0.135	0.128	0.135	0.125

3 结 论

本文结合迭代法 AF1 与 Bi-CGSTAB, 对压力 Poisson 方程进行求解. 用时间分裂法解 Navier-Stokes 方程得出的结果表明, 对于靠近排列的两个交错方柱绕流流动:

- 1) 当两个方柱靠得较近时, 出现相互吸引的趋势. 侧壁对阻力和升力的相关系数影响明显. 上游方柱受到的阻力较大, 但阻力和升力的脉动较小.
- 2) 对于计算情况, 把两个方柱在 y 方向的距离加大些, 出现两个方柱阻力平均值的差别增加, 但旋涡脱落的频率差减小.
- 3) 二次流动 (v, w) 造成方柱 II 的阻力和升力相关系数沿展向分布出现波动, 且当方柱 II 向方柱 I 靠近 (只减小 H_y) 时, 二次流动对方柱 II 的升力脉动有一定的抑制作用.
- 4) 联合的 AF1-Bi-CGSTAB 算法可望在其它工程问题的计算中得到应用.

参 考 文 献

- 1 Hayashi M, Sakurai A, Ohya Y. Wake interference of a row of normal flat plates arranged side by side in a uniform flow. *J Fluid Mech*, 1986, 164: 1~25
- 2 林胜天, 孙天凤. 绕经双矩形柱的流动. [博士论文]. 北京大学, 1988 (Lin Shengtian, Sun Tianfeng. Flow around two rectangular cylinders. [PhD Thesis]. Peking University, 1988 (in Chinese))
- 3 凌国灿, 凌国平, 王运平. 用分区和混合方法数值模拟绕钝体的涡分离流动. 中国科学, A 辑, 1992, 1: 71~79 (Ling Guocan, Ling Guoping, Wang Yunping. Numerical simulation of separation vortex flow around a bluff body with domain splitting and mixing approach. *Science of China, Series A*, 1992, 1: 71~79 (in Chinese)).

- 4 朱祚金, 刘应中, 刘岳元. 柱和柱群绕流的数值模拟. [博士论文]. 上海交通大学, 1990 (Zhu Zuojin, Liu Yingzhong, Liu Yueyuan. Numerical simulation of flow around cylinders. [PhD Thesis], Shanghai Jiao Tong University, 1990 (in Chinese))
- 5 Sohankar A, Norberg C, Davidson L. Simulation of three-dimensional flow around a square cylinder at moderate Reynolds numbers. *Physics of Fluids*, 1999, 11(2): 288~306
- 6 Baker TJ. The computation of transonic potential flows. In: Essers JA. ed. HEMISHPERE, 1983. 213~289
- 7 Von Der Vorst H. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BICG for the solution of non-symmetric linear systems. *SIAM, Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1992, 13: 631~644
- 8 Yang HX, Zhu ZJ, Gilleard J. Numerical simulation of thermal fluid instability between two horizontal parallel plates. *Int J of Heat and Mass Transfer*, 2001, 44(8): 1485~1493
- 9 吴江航, 韩庆书. 计算流体动力学的理论, 方法及其应用. 北京: 科学出版社, 1988 (Wu Jianghang, Han Qingshu. Theory, approach, and application of computational fluid dynamics. Beijing: Science Press, 1988 (in Chinese))

NUMERICAL SIMULATION OF 3D VISCOUS LAMINAR FLOW AROUND TWO SQUARE CYLINDERS IN CLOSELY STAGGERED ARRANGEMENT

Zhu Zuojin

(The State Key Laboratory of Fire Science, Department of Thermal Science and Energy Engineering, Institute of Engineering Science, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract The transient 3D viscous laminar flow around two identical square cylinders in closely staggered arrangement at moderate Reynolds numbers has been simulated numerically by solving the incompressible Navier-Stokes equations with a fractional algorithm, where the fourth order Adams scheme were used to evaluate the intermediate velocity field, and the AF1 (approximate factorization one) as well as the stablized bi-conjugate gradient (Bi-CGSTAB) algorithm were combined to obtain the pressure field by solving the derived pressure Poisson's equation, from which the velocity at the new time level was evaluated. It was found that, when the square cylinders are closely stagger arrangement, the values for the spanwise-averaged mean lift indicate that the hydrodynamic forces due to vortex motion will make them attracted each other. In addition, the Strouhal number for upstream cylinder is found larger than that for the downstream one. The stagger arrangement appears a significant effect on the flow pattern. The results obtained in the current study are qualitatively in a good agreement with experiments, and more elegant than those obtained by MAC-AF1 method.

Key words flow around square cylinders, stagger arrangement, approximate factorization, bi-cgstab algorithm, secondary flow

Received 02 January 2001, revised 18 December 2001.

1) The project supported by the State Key Laboratory of Fire Science with Grant (KF0101), and Chinese Science Foundation with Grant (19872062).