

基于应变梯度的损伤局部化研究及应用¹⁾

赵吉东 周维垣 刘元高

(清华大学水电系, 北京 100084)

摘要 提出一种包含应变梯度项的损伤力学模型, 并将其应用于材料的局部化损伤模拟预测中. 有限元实现中使用 C_1 连续高精度单元以保证包含应变梯度的影响. 简单规则矩形网格情况下将结点处有限差分应变梯度结果与有限元方法结合, 可避免对传统有限元程序作较大改动, 同时能在不降低精度情况下提高计算效率. 计算表明该梯度损伤模型可较好避免有限元在局部化模拟时的网格依赖性, 预测出的局部化损伤与实际破坏情况非常相近.

关键词 应变梯度, 损伤局部化, 网格依赖性, C_1 连续高精度单元, 有限元与有限差分

引 言

岩土工程中局部化破坏现象非常常见并得到普遍地重视和研究. 对均匀率无关材料, 局部化剪切带的形成与材料内部不稳定特性密切相关. 局部化的产生标志着材料控制方程丧失了其椭圆性和解的唯一性以及应变场连续性的消失, 剪切带内还出现较大的应变流动率和应变梯度. 传统弹塑性模型中应变梯度项往往被忽略, 材料中的应力场仅仅与材料中的一点应变有关, 这将不能准确描述局部化破坏的根本力学机制. 在传统理论框架下, 材料控制方程正定特性的丧失, 就对应于能量分析中零能损耗现象和有限元实现过程中计算结果对网格的依赖性. Bažant 等^[1] 将这一现象归结于传统本构关系中缺少一个材料内禀长度所致, 采用非局部方法和微平面理论来解决这一难题, 并用以分析结构断裂损伤的尺寸效应. Peelings 以及 Geers 等^[2~4] 通过在局部等效应变和非局部等效应变之间建立联系, 建立了梯度损伤模型. 在此基础上, Kuhl 和 Ramm^[5] 进一步由微平面理论建立了各向异性模型. Tvergaard 和 Needleman^[6] 针对延性多孔材料建立了非局部本构模型, 并采用包含长度因子的非局部方法来减弱数值模拟过程网格敏感性问题. 非局部方法在于对空间应变的非局部均化, 虽能克服网格依赖性问题, 但是采用均化非局部方法会使材料整体刚度产生平均弱化, 发生局部化分岔的临界硬化模量值降低, 使计算结果偏于安全, 不能正确预测材料的真正破坏过程和极限荷载. 而且, 上述方法仍然没有将局部应变梯度对材料局部化破坏结果产生的影响考虑进来.

连续损伤力学对于刻画岩石类脆性材料的各向异性、剪胀、加载路径相关等特性非常有效, 常被应用于此类材料的局部化破坏研究中^[7]. 本文基于唯象应变梯度理论^[8~10], 考虑应变梯度项对整个应力场和位移场的影响, 结合连续损伤力学, 建立梯度损伤模型, 用有限元数值方法实现对材料局部化损伤模拟. 能克服传统模型对网格依赖性的缺陷, 使预测局部化损伤具有较强稳定性, 且能预测出局部化发生时的各项临界参数, 所反映出材料局部化破坏时的应力应变状态符合真实破坏水平, 在土木水利工程的极限破坏分析中有较大应用前景.

2000-10-22 收到第一稿, 2001-04-20 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (59919390) 资助项目.

1 应变梯度损伤模型

1.1 传统损伤模型的网格依赖性问题

在传统弹塑性或损伤本构关系中, 应变展开式中的高阶项对应力和位移场的影响往往被忽略. 当使用这样的本构关系借助有限元方法预测局部化现象时, 就会造成较大误差. 由图 1 可见, 材料最终损伤破坏结果与单元网格划分大小直接相关. 这就是因为局部化带内往往有较大的应变梯度, 如果不考虑其影响, 将造成破坏模拟结果对单元划分的依赖性.

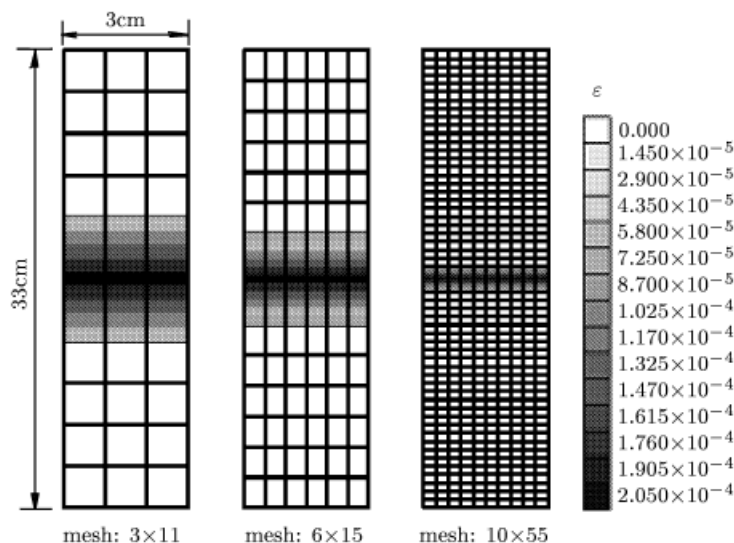


图 1 单轴拉伸试件传统本构关系应变局部化模拟的有限元网格依赖性
(中间单元材料参数有微小扰动)

Fig.1 Distribution of localized strain under uniaxial tension by traditional gradient-free model

1.2 基于应变梯度的损伤局部化模型

应变梯度理论早在 20 世纪 50 年代就已提出, 最初用于研究弹性材料应变梯度和偶应力作用对整个场的影响. 近来, Fleck 和 Hutchinson^[8,9] 提出了一种唯象应变梯度理论. 本文基于此唯象理论, 在小应变情况下采用如下应变和应变梯度张量与位移的关系^[9]

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad \eta_{ijk} = (u_{k,ij} + u_{k,ji})/2 \quad (1)$$

设 σ_{ij} 为与应变张量 ε_{ij} 功共轭的对称二阶 Cauchy 应力张量; τ_{ijk} 为与应变梯度张量 η_{ijk} 功共轭的高阶应力张量, 满足 $\tau_{ijk} = \tau_{jik}$. 假设可用单参数 d 来描述材料中的损伤微缺陷, 损伤以各向同性形式出现, Helmholtz 自由能函数为如下形式^[5]

$$\psi = \frac{1}{2}(1-d)\varepsilon : D^e : \varepsilon + \frac{1}{2}(1-d)\eta : A^e : \eta + \int_0^\kappa \phi(\kappa) d\kappa \quad (2)$$

此处, $D_{ijkl}^e = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ 为四阶各向同性弹性张量, λ, μ 为 Lamé 常数, $A_{ijklmn}^e = l^2 D_{ijlm}^e \delta_{kn}$ 为六阶梯度相关弹性张量, 其中 δ_{kn} 为 Kronecker 符号. κ 为附加内变量, 式 (2) 最后一项 $\int_0^\kappa \phi(\kappa) d\kappa$ 为使用附加内变量描述材料硬化 / 软化特性的项. l 为材料内禀长度因子, 量纲为长度量纲, 其大小与材料内部的损伤微结构尺寸有关. 随着内部微缺陷

和损伤的演化, 材料内禀长度也可能会发生变化. 但到目前为止, 还难以在它和材料的微观损伤演化之间建立联系. 为简单起见, 本文假设材料内禀长度 l 只与材料内部的初始缺陷有关, 而不随材料的损伤发生变化, 其值的选取参考一些试验研究结果. 应变梯度理论最初研究主要是针对金属材料: 铜的内禀长度为 $l \approx 4 \mu\text{m}$, 镍为 $l \approx 6 \mu\text{m}$. 对于岩石、混凝土等材料, 材料内禀长度因子主要与其内部不均匀微结构有关, 如微裂隙、微孔洞、材料颗粒大小等. 潘一山^[11]通过对冲击地压煤岩岩爆现象试验研究曾经得到煤岩的内禀长度因子为 $l \approx 0.53 \text{ mm}$, 砂岩岩体的内禀长度因子 $l \approx 0.47 \text{ mm}$. 研究表明其它较硬岩体的内禀长度因子值约为砂岩的 4~10 倍. 对于本文所研究岩石类材料, 取内禀长度因子为 $l \approx 1.5 \text{ mm}$.

由 Clausius-Duhem 不等式, Cauchy 应力 σ_{ij} 和高阶应力 τ_{ijk} 有如下形式

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = (1-d) D_{ijkl}^e \varepsilon_{kl}, \quad \tau_{ijk} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta_{ijk}} = (1-d) l^2 D_{ijkl}^e \delta_{mn} \eta_{lmn} \quad (3)$$

无体力时, 上述应力和高阶应力张量满足如下的平衡方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nabla \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0} \quad (4)$$

我们还可以得到与损伤变量 d 共轭的热力学共轭力 Y

$$Y = -\frac{\partial \psi}{\partial d} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{A}^e : \boldsymbol{\eta} \quad (5)$$

在应力空间取如下损伤面^[12,13]

$$F = G(Y) - r_t(d, \kappa) = 0 \quad (6)$$

上式中 $G(Y)$ 表示等效断裂扩展力, $r_t(d, \kappa)$ 为一个表示损伤面的“表征半径”, 它表征了断裂硬化性能对当前体内累积损伤的依赖性. 上式表示在损伤面内 $\dot{d} = 0$, 即在损伤面内任一应力状态均不引起损伤耗散. 类比塑性理论中的流动法则, 定义如下损伤流动法则

$$\dot{d} = \dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial Y}, \quad \dot{\gamma} = -\varsigma \dot{Y} \left(\frac{\partial F}{\partial d} + \frac{\partial F}{\partial r_t} \frac{\partial r_t}{\partial d} \right)^{-1}, \quad \varsigma = \begin{cases} 1, & \text{当 } F = 0, \frac{\partial F}{\partial Y} \dot{Y} \geq 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases} \quad (7)$$

可得损伤演化的一般形式

$$\dot{d} = -\varsigma \dot{Y} \left(\frac{\partial F}{\partial d} + \frac{\partial F}{\partial r_t} \frac{\partial r_t}{\partial d} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial Y} \quad (8)$$

为方便计算, 本文借用 Peelings 等^[2~4] 极分布模型来描述材料应变软化特征和损伤演化率

$$d = 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} \{1 - \alpha + \alpha \exp[-\xi(\kappa - \kappa_0)]\} \quad (9)$$

此处 $\kappa = \max_{-\infty < t < \tau} (Y, \kappa^0)$, 表示内变量 κ 可由损伤阈值 κ^0 和加载历史过程中的最大能量释放率这两值中的大者来决定. $\xi = 1/(\kappa_c - \kappa_0)$, κ_c 为硬化历史内变量. 损伤阈值 κ_0 主要影响荷载位移曲线峰值, κ_c 表征材料损伤达到极值 1 时的上限值, 指数 α 为可影响应力应变软化曲线斜率和形状的参数.

2 有限元数值模拟实现

2.1 单元连续性研究

在有限元实现中要考虑应变梯度的影响, 就有必要对所采用单元的连续性进行研究. 根据几何非线性有限元理论^[14], 包含应变梯度的单元应具有 C_1 阶连续性. Xia 和 Hutchinson^[15]曾提出三角形 C_1 连续单元来考虑应变梯度, 并推广到更多结点的情况. Wei 和 Hutchinson^[16]使用这种单元来研究稳态裂尖场的应变梯度效应. 要保证单元具有 C_1 连续性, 需使位移场一

每一结点分别需要另外增加 4 个和 6 个自由度. 图 2 为文献 [15] 采用的 N3U18 平面应变单元. 在这种单元中, 设 $L_i (i = 1, 2, 3)$ 为三部分的面积

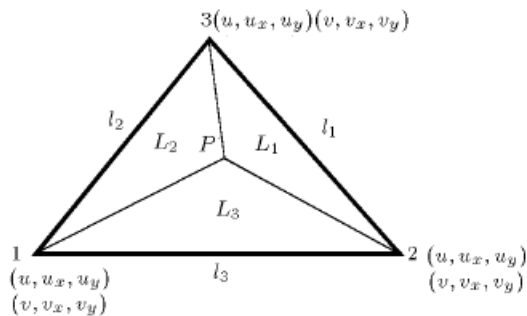


图 2 C_1 阶连续 N3U18 三角形单元

Fig.2 N3U18 triangular element with C_1 continuum for strain gradient

$$b_i = y_j - y_k, \quad c_i = y_k - y_j,$$

$$N_i = (N_i^1 N_i^2 N_i^3) =$$

$$\begin{Bmatrix} 3L_i^2 - 2L_i^3 - 2L_i L_j L_k \\ -c_j(L_i^2 L_k + L_i L_j L_k) + c_k L_i^2 L_j \\ b_j(L_i^2 L_k + L_i L_j L_k) - b_k L_i^2 L_j \end{Bmatrix}^T$$

阶梯度的连续性得到保证. 对二维和三维问题

(i, j, k) 按照 $(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1)$ 进行轮换, 则包含梯度的总体应变向量有如下形式

$$\mathbf{E} = (\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \quad \eta_{xx3} \quad \eta_{xy3} \quad \eta_{yy3})^T = \mathbf{B}\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 \begin{Bmatrix} \frac{2}{3}N_{i,x}^1 & \frac{2}{3}N_{i,x}^2 & \frac{2}{3}N_{i,x}^3 & -\frac{1}{3}N_{i,y}^1 & -\frac{1}{3}N_{i,y}^2 & -\frac{1}{3}N_{i,y}^3 \\ -\frac{1}{3}N_{i,x}^1 & -\frac{1}{3}N_{i,x}^2 & -\frac{1}{3}N_{i,x}^3 & \frac{2}{3}N_{i,y}^1 & \frac{2}{3}N_{i,y}^2 & \frac{2}{3}N_{i,y}^3 \\ N_{i,y}^1 & N_{i,y}^2 & N_{i,y}^3 & N_{i,x}^1 & N_{i,x}^2 & N_{i,x}^3 \\ \frac{1}{2}N_{i,xx}^1 & \frac{1}{2}N_{i,xx}^2 & \frac{1}{2}N_{i,xx}^3 & -\frac{1}{2}N_{i,xy}^1 & -\frac{1}{2}N_{i,xy}^2 & -\frac{1}{2}N_{i,xy}^3 \\ \frac{1}{2}N_{i,yy}^1 & \frac{1}{2}N_{i,yy}^2 & \frac{1}{2}N_{i,yy}^3 & \frac{1}{2}N_{i,xx}^1 & \frac{1}{2}N_{i,xx}^2 & \frac{1}{2}N_{i,xx}^3 \\ -\frac{1}{2}N_{i,xy}^1 & -\frac{1}{2}N_{i,xy}^2 & -\frac{1}{2}N_{i,xy}^3 & \frac{1}{2}N_{i,yy}^1 & \frac{1}{2}N_{i,yy}^2 & \frac{1}{2}N_{i,yy}^3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_i \\ (u,x)_i \\ (u,y)_i \\ v_i \\ (v,x)_i \\ (v,y)_i \end{Bmatrix} \quad (10)$$

上述方法虽能将应变梯度影响考虑进来, 但却使得位移场表达式中增加许多高次项, 形函数表达式变得极复杂. 自由度的增加又使得计算量大大增加. 但如果选用单元比较简单, 如采用规则矩形单元, 就可考虑应用有限差分法来计算各结点的应变梯度, 而传统应变仍按照有限元方法得到, 最终再将两部分应变综合考虑进有限元计算中. 这样做好处在于节省工作量, 不需要对原有有限元程序作过大的改动, 同时计算效率大为提高, 精度没有显著下降. 下面我们以矩形单元为例, 给出由周边单元位移差分得到应变梯度的过程. 如图 3 矩形单元, 在平面应变情况下应变梯度 η_{ijk} 在每一个结点只有 $\eta_{113}, \eta_{223}, \eta_{123}, \eta_{213}$ 不为零. 设单元位移场为 (u, v) ,

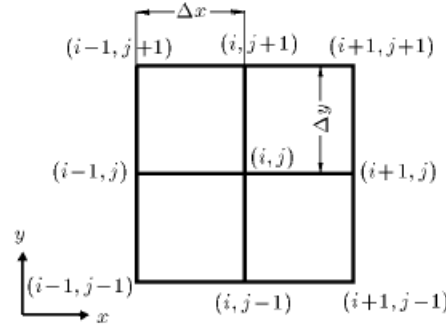


图 3 各结点应变梯度有限差分求解示意图

Fig.3 Sketch of F.D.M. for nodal strain gradient

由应变梯度的定义, 可得 (i, j) 结点处的应变梯度

$$\eta_{113}^{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}, \quad \eta_{223}^{i,j} = \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \quad (11)$$

$$\eta_{123}^{i,j} = \eta_{213}^{i,j} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1} + v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j+1} + v_{i-1,j-1}}{8\Delta x\Delta y} \quad (12)$$

在得到各单元结点处的应变梯度值后, 其余过程与传统有限元计算过程比较相近, 仍可采用传统应变的插值模式. 在有限元后处理时, 为了能够与不包含应变梯度项的模型进行比较, 需要显示应变项与应变梯度项的综合分布效果, 故采用 Fleck 和 Hutchinson^[9] 如下形式的等效应变定义形式

$$E = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + l^2\eta_{ijk}\eta_{ijk}} \quad (13)$$

2.2 有限元数值模拟

图 4 为对于使用矩形 C_1 连续单元 (N4U24) 和本文梯度损伤模型对比图 1 所示算例计算得到的等效应变分布图. 图 1 和图 4 算例均采用如下计算参数: 试件长 33 cm, 宽 3 cm, Lamé 常数取 $\mu = 9.0 \times 10^9$ MPa, $\lambda = 6.0 \times 10^9$ MPa. 式 (10) 中的参数 α 取 0.94, ζ 取 400. 另外, 所有单元的损伤阈值 κ_0 假定为 0.000 1, 最中间一横排单元的损伤阈值假定为 0.000 09, 作为扰动以产生局部化效果. 由计算结果可看出, 使用本文提出的包含应变梯度的损伤模型后, 计算得到的应变分布图, 与传统损伤模型得到的结构相比, 不再具有与单元网格划分强烈的相关性, 三种不同网格数目情况下得到的结果相差不大. 因此, 在损伤模型中包含应变的高阶梯度项后, 材料数值模拟的应变分布及应变局部化效果就会具有相对较强的稳定性, 从而使得数值模拟结果能较为真实地反映实际材料的破坏情况.

图 5 为比较 C_1 连续单元和 FEM-FDM 混合方法计算结果精度及计算效率差别. 计算均采用 10×55 网格单元. 图为两种方法计算所得局部化发生时拉伸方向单元结点等效应变对比曲线 (图中, 横坐标为单元结点距离中心的距离, 纵坐标为有效应变). 由图可见, 使用 FEM-FDM 混合方法并未使计算精度下降很多. 两种方法对此算例在 PIII550 计算机上耗时量分别为 124 s 和 87 s, 采用 FEM-FDM 混合方法要比使用 C_1 连续单元方法提高效率近 43%.

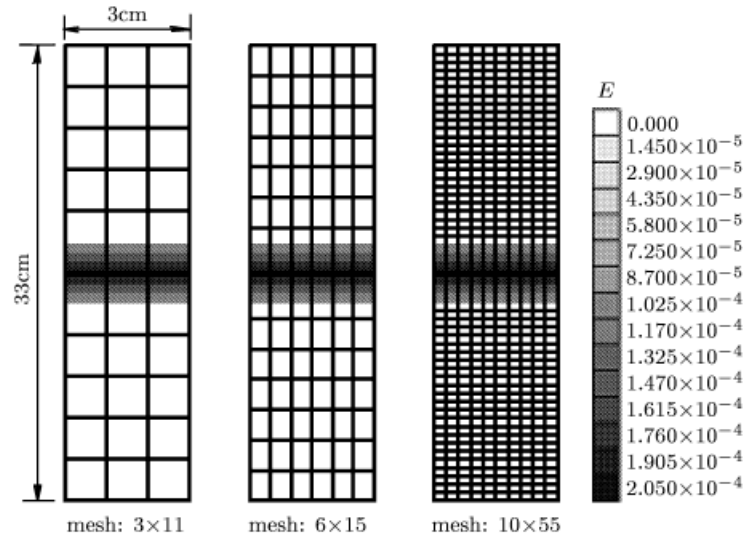


图 4 单拉试件梯度损伤模型有效应变分布图

Fig.4 Distribution of effective strain for uniaxial gradient damage model

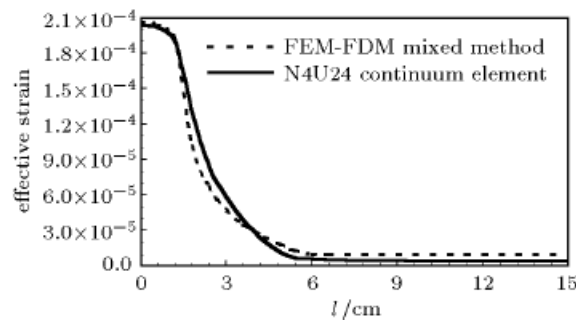


图 5 FEM-FDM 混合方法与 N4U24 元计算结点有效应变对比图 (网格 11x55)

Fig.5 Comparison of nodal effective strain tension by between FEM-FDM mixed method and N4U24 continuum element method (Mesh: 11x55)

3 结论与讨论

本文提出的应变梯度损伤模型, 能避免传统模型有限元局部化模拟的网格依赖性. 采用 N3U18 和 N4U24 类型的 C_1 连续单元可保证位移场一阶梯度连续性. 规则矩形单元的有限差分应变梯度结果与有限元的结合可在没有明显降低计算精度的前提下, 避免对有限元程序作过大的改动, 又可大大提高计算效率. 但是, 应变梯度的存在也可使局部刚度出现强化, 并导致临界分岔硬化模量阈值提高, 从而使结构整体破坏极限变大. 另外, 对于应变梯度项相关的材料内禀长度因子及其与损伤之间的关系需要进一步的实验研究和确定. 鉴于岩石类材料具有较强的各向异性特征, 基于应变梯度的各向异性梯度损伤模型正在研究中.

参 考 文 献

- 1 Bažant ZP, Planas J. Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasi-brittle Materials. Boca Raton: CRC Press, 1998

- 2 Peerlings RHJ, de Borst R, Brekelmans WAM, et al. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *Int J for Num Methods in Eng*, 1996a, 39: 3391~3404
- 3 Peerlings RHJ, de Borst R, Brekelmans WAM, et al. Some observations on localization in non-local and gradient damage models. *Eur J of Mech, Part A/Solids*, 1996b, 15: 937~953
- 4 Peerlings RHJ, de Borst R, Brekelmans WAM, et al. Gradient enhanced modeling of concrete fracture. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 1998, 3: 323~342
- 5 Kuhl E, Ramm E. Simulation of strain localization with gradient with gradient enhanced damage models. *Computational Materials Sciences*, 1999, 16: 176~185
- 6 Tvergaard V, Needleman A. Effects of nonlocal damage in porous plastic solids. *Int J Solids Structures*, 1995, 32(8/9): 1063~1077
- 7 余寿文, 冯西桥. 损伤力学. 北京: 清华大学出版社, 1997(Yu Shouwen, Feng Xiqiao. Damage Mechanics. Beijing: Tsinghua University Press, 1997(in Chinese))
- 8 Fleck NA, Hutchinson JW. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. *J Mech Phys Solids*, 1993, 41(12): 1825~1857
- 9 Fleck NA, Hutchinson JW. Strain gradient plasticity. In: Hutchinson JW, Wu TY eds., *Advances in Applied Mechanics*, New York: Academic Press, 1999, 33: 295~361
- 10 Shu JY, Fleck NA. Strain gradient crystal plasticity: size-dependent deformation of bicrystals. *J Mech Phys Solids*, 1999, 47: 297~324
- 11 潘一山. 冲击地压发生和破坏过程研究. [博士论文]. 北京: 清华大学力学系, 1999(Pan Yishan. Studies on rock burst and progress of failure. [Doctoral Thesis]. Beijing: Tsinghua University, 1999(in Chinese))
- 12 Simo J, Ju JW. Strain and stress based continuum damage models: Part I——Formulation, Part II——Computational aspects. *Int J Solids and Structures*, 1987, 23: 821~869
- 13 Ju JW. On energy-based coupled elasto-plastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects. *Int J Solids Structures*, 1989, 25: 803~833
- 14 Zienkiewicz OC, Taylor RL. *The Finite Element Method*, Fourth edition. McGraw-Hill, Inc. 1987
- 15 Xia ZC, Hutchinson JW. Crack tip fields in strain gradient plasticity. *J Mech Phys Solids*, 1996, 44(10): 1621~1648
- 16 Wei Y, Hutchinson JW. Steady-state crack growth and work of fracture for solids characterized by strain gradient plasticity. *J Mech Phys Solids*, 1997, 45(8): 1253~1273

ON THE STRAIN-GRADIENT-ENHANCED DAMAGE MODEL AND ITS APPLICATION TO THE LOCALIZATION ANALYSIS¹⁾

Zhao Jidong Zhou Weiyuan Liu Yuangao

(*Department of Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

Abstract This paper presents a strain-gradient-enhanced damage model for the analysis of localization for rock-concrete-like brittle materials. Unlike the massive work on non-local model, which focus on the spatial average of strain of other variables and a concomitant intrinsic length to solve the problems of zero-dissipation and mesh-dependence, the model in this paper introduces the strain gradient and an intrinsic length scalar of the material into the constitutive law and makes use of isotropic damage. This strain-gradient-enhanced damage model is applied to the FEM simulation of damage localization. Comparison with conventional models illustrates the problem of mesh-dependence can be properly solved by this model. Upon the implementation of F.E.M., C_1 -continuum N3U18 and N4U24 elements are adopted to reserve the continuum of the first-order of displacement, and thus the existence of strain gradient. When rectangular elements are used, the combination of nodal strain gradient determined by finite deferential method (F.D.M.) mixed by traditional F.E.M. avoids large modification of the original F.E.M. codes, with the advantage of high efficiency and without any large damage to the precision. Simulation of uniaxial tension verifies the conclusion drawn above.

However, several problems remain unresolved for this model. First, by introducing of strain gradient, the hardening of local stiffness is intensified, which results in a higher critical value of the bifurcation hardening modulus. Second, the mechanical mechanism of intrinsic length of material has no clear and universal illustrations by experiments, and the interrelation between intrinsic length and damage evaluation is not yet verified. Finally, the isotropic model of this paper is much too simplified to account for the anisotropic behaviors of rock-concrete-like material, and thus a more general anisotropic strain-gradient-enhanced damage model is under study.

Key words strain-gradient-enhanced, damage model localization, mesh dependence, C_1 -continuum elements, F.E.M. & F.D.M.

Received 22 October 2000, revised 20 April 2001.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (59919390).