

求解非线性动力学方程的分段直接积分法¹⁾

袁春航 吕和祥 钟万颢

(大连理工大学工程力学系, 大连 116023)

摘要 针对 n 维未知向量 $\mathbf{v}$ 的一阶微分方程 $\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t = \mathbf{H}\mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{v}, t)$ 进行求解. 首先, 将非线性部分 $\mathbf{f}(\mathbf{v}, t)$ 在所论时刻 t_k 处用 $t - t_k = \tau$ 的 j 次多项式来近似, 然后借助分段直接积分法, 导出了各段内的、用 τ 的解析函数表达的求解公式, 通过选取 j 值, 可获得一系列具有不同精度的近似解, 便于研究非线性动力学行为与其物理参数的依赖关系. 为适应实际计算, 还全面讨论了上述多项式的确定方法, 其中包括避免求 $\mathbf{f}(\mathbf{v}, t)$ 导数的算法. 算例表明所提出的方法不仅可用于求解非线性动力响应问题, 而且对研究解的形态和稳定性, 如对吸引子、极限环、二次 Hopf 分岔等的分析也不失为一个有效的工具.

关键词 非线性动力学系统, 直接积分法, 吸引子, 极限环, Hopf 分岔

引 言

与通常的非线性数值积分方法相比, 解析法便于深入分析非线性动力学行为与其物理参数的依赖关系; 但由于解析法目前仍只能局限于分析某些特殊问题, 无法满足工程实际更为复杂的多自由度问题的求解需要. 为此, 本文在以前工作^[1,2]的基础上, 就一般形式的非线性动力学系统, 尝试提出了一种分段直接积分的求解方法, 简称 SDI 法.

如所周知, 不论是混沌控制^[3,4], 还是分析非线性微分方程的稳定性^[5,6], 往往需要在其平衡点(临界点)附近展开, 把右端项分离成线性与非线性两部分. 鉴于此, 本文将待求系统表示成如下的 n 维未知向量 $\mathbf{v}$ 的一阶微分方程: $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H}\mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{v}, t)$, 其中 $\mathbf{H}$ 为 $n \times n$ 维系数矩阵, 它的元素一般与系统的参数有关; n 维向量 $\mathbf{H}\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{f}(\mathbf{v}, t)$ 分别是右端项的线性齐次部分和非线性部分. 首先, 本文将 $\mathbf{f}(\mathbf{v}, t)$ 在所论时刻 t_k 用 $\tau = t - t_k$ 的 j 次多项式来近似, 并通过分段直接积分法, 获得了具有不同精度的各种近似解. 应用本文方法求解的算例表明, 除计算效率高、结果合理可靠外, 适用问题的范围也较广, 其中包括非线性多自由度系统的主共振分析, 求解对初值敏感的混沌吸引子等.

1 非线性动力方程的分段直接积分

现讨论非线性动力学系统

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H}\mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{v}, t) \quad (1)$$

的积分方法. 首先引入下列无穷矩阵级数, 并形式地记其和为 $\mathrm{e}^{\mathbf{H}t}$

$$\mathrm{e}^{-\mathbf{H}t} = \mathbf{I} + t\mathbf{H} + (t\mathbf{H})^2/2! + (t\mathbf{H})^3/3! + \cdots + (t\mathbf{H})^n/n! + \cdots \quad (2)$$

2000-08-28 收到第一稿, 2001-07-09 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金重大项目(19990510)资助.

其中 I 表示 n 阶单位阵, 将 (1) 改写为 $\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{H}\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{v}, t)$, 两边乘以 $e^{-\mathbf{H}t}$, 对其从 t_k 到 t 积分

$$e^{-\mathbf{H}t}(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{H}\mathbf{v}) = e^{-\mathbf{H}t}\mathbf{f}(\mathbf{v}, t), \quad \int_{t_k}^t d(e^{-\mathbf{H}t}\mathbf{v}) = \int_{t_k}^t e^{-\mathbf{H}t}\mathbf{f}(\mathbf{v}, t)dt \quad (3)$$

于是可将微分方程 (1) 转化为下列同解积分方程

$$e^{-\mathbf{H}t}\mathbf{v} - e^{-\mathbf{H}t_k}\mathbf{v}_{(k)} = \int_{t_k}^t e^{-\mathbf{H}t}\mathbf{f}(\mathbf{v}, t)dt \quad \text{或} \quad \mathbf{v} = e^{\mathbf{H}(t-t_k)}\mathbf{v}_{(k)} + e^{\mathbf{H}t} \int_{t_k}^t e^{-\mathbf{H}\xi}\mathbf{f}(\mathbf{v}, \xi)d\xi \quad (4)$$

式中 $\mathbf{v}, \mathbf{v}_{(k)}$ 分别表示所求的解向量在时刻 t 和 t_k 的值. 由于被积函数 $\mathbf{f}(\mathbf{v}, t)$ 本身包含未知解向量 $\mathbf{v}$, 为运用直接积分法, 在 $t = t_k, \mathbf{v} = \mathbf{v}_{(k)}$ 处, 宜将非线性部分 $\mathbf{f}(\mathbf{v}, t)$ 用 $t - t_k$ 的 j 次多项式 $\mathbf{p}(\mathbf{v}, t)$ 来近似

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{v}, t) \approx \mathbf{p}(\mathbf{v}, t) \equiv \mathbf{c}_0 + (t - t_k)\mathbf{c}_1 + \frac{(t - t_k)^2}{2!}\mathbf{c}_2 + \frac{(t - t_k)^3}{3!}\mathbf{c}_3 + \cdots + \frac{(t - t_k)^j}{j!}\mathbf{c}_j \\ t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad t_{k+1} = t_k + \Delta t; \quad k = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中 $[t_k, t_{k+1}] = [t_k, t_k + \Delta t]$ 是第 k 个时间段, 其长度 Δt 称为步长, $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \cdots, \mathbf{c}_j$ 是 $j+1$ 个待定的 n 维分段常向量. 为以下推演方便, 引入相对于该段起始时刻 t_k 的时间坐标 τ

$$\tau = t - t_k \quad (6)$$

现用多项式 (5) 代替积分方程 (4) 中的 $\mathbf{f}(\mathbf{v}, t)$, 其中包含项 $\frac{c_l(t-t_k)^l}{l!}$ 的积分为

$$\begin{aligned} \frac{e^{\mathbf{H}t}}{l!} \int_{t_k}^t e^{-\mathbf{H}\xi} \mathbf{c}_l (\xi - t_k)^l d\xi &= \frac{1}{l!} \int_{t_k}^t e^{-\mathbf{H}(\xi-t)} \mathbf{c}_l (\xi - t_k)^l d\xi = \\ &= \frac{1}{l!} \int_0^\tau e^{\mathbf{H}\eta} \mathbf{c}_l (\tau - \eta)^l d\eta; \quad l = 1, \cdots, j \end{aligned} \quad (7)$$

积分时, 应遵守矩阵与向量相乘的不可交换性, 并注意下列公式

$$\int_0^\tau e^{\mathbf{H}\eta} \mathbf{c}_l d\eta = e^{\mathbf{H}\tau} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_l - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_l, \quad \int_0^\tau e^{\mathbf{H}\eta} \mathbf{c}_l \eta d\eta = e^{\mathbf{H}\tau} (\tau \mathbf{H}^{-1} - \mathbf{H}^{-2}) \mathbf{c}_l + \mathbf{H}^{-2} \mathbf{c}_l \quad (8)$$

$$\int_0^\tau e^{\mathbf{H}\eta} \mathbf{c}_l \eta^2 d\eta = e^{\mathbf{H}\tau} (\tau^2 \mathbf{H}^{-1} - 2\tau \mathbf{H}^{-2} + 2\mathbf{H}^{-3}) \mathbf{c}_l - 2\mathbf{H}^{-3} \mathbf{c}_l \quad (9)$$

$$\int_0^\tau e^{\mathbf{H}\eta} \mathbf{c}_l \eta^3 d\eta = e^{\mathbf{H}\tau} (\tau^3 \mathbf{H}^{-1} - 3\tau^2 \mathbf{H}^{-2} + 6\tau \mathbf{H}^{-3} - 6\mathbf{H}^{-4}) \mathbf{c}_l + 6\mathbf{H}^{-4} \mathbf{c}_l \quad (10)$$

.....

这样, 最终可从式 (4) 推演出由时刻 t_k 的解向量 $\mathbf{v}_{(k)}$, 求时刻 $t = t_k + \tau$ 的解向量 $\mathbf{v}$ 的表达式

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}(t) \equiv \mathbf{v} = e^{\mathbf{H}t} \left(\mathbf{v}_{(k)} + \sum_{l=0}^j (\mathbf{H}^{-1})^{l+1} \mathbf{c}_l \right) - \sum_{l=0}^j \left(\sum_{m=1}^{l+1} \frac{\tau^{l+1-m}}{(l+1-m)!} \mathbf{H}^{-m} \right) \mathbf{c}_l \\ t_k \leq t \leq t_k + \Delta t, \quad 0 \leq \tau \leq \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

当多项式 $p(v, t)$ 的次数为 $j = 0, 1, 2, \dots$ 时, 为方便计, 我们称相应求解公式 (11) 分别为一次近似, 二次近似和三次近似, …… 等等, 具体为

$$v = e^{H\tau}(v_{(k)} + H^{-1}c_0) - H^{-1}c_0 \quad (\text{一次近似式}) \quad (12)$$

$$v = e^{H\tau}(v_{(k)} + H^{-1}c_0 + H^{-2}c_1) - (H^{-1}c_0 + (\tau H^{-1} + H^{-2})c_1) \quad (\text{二次近似式}) \quad (13)$$

$$v = e^{H\tau}(v_{(k)} + H^{-1}c_0 + H^{-2}c_1 + H^{-3}c_2) - \left(H^{-1}c_0 + (\tau H^{-1} + H^{-2})c_1 + \left(\frac{\tau^2}{2} H^{-1} + \tau H^{-2} + H^{-3} \right) c_2 \right) \quad (\text{三次近似式}) \quad (14)$$

等. 下文将讨论如何用 $j+1$ 个条件确定各分段常向量 $c_0, c_1, c_2, \dots, c_j$. 注意 H^{-1} 的各次幂一般仅与系统的参数有关, 在整个时程中只需算一次; 作为无穷矩阵级数之和的 $e^{H\tau}$ 各元素, 可用 τ 和包含在矩阵 H 中的参数解析地表示, 计算更方便. 从数值计算来看, 还可采取 2^N 类算法^[5], 精确地算出 $e^{H\tau}$ 的元素值.

当取 τ 等于步长 Δt 时, 由初值 $v_{(0)}$, 可用式 (11) 逐步计算 $v_{(1)}, v_{(2)}, \dots, v_{(k)}, v_{(k+1)}$

$$v_{(k+1)} = e^{H\Delta t} \left(v_{(k)} + \sum_{l=0}^j (H^{-1})^{l+1} c_l \right) - \sum_{l=0}^j \left(\sum_{m=1}^{l+1} \frac{\Delta t^{l+1-m}}{(l+1-m)!} H^{-m} \right) c_l; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

2 $f(v, t)$ 充分光滑的情形

现要求用条件“在 $t = t_k$ 时, 多项式 $p(v, t)$ 及其各阶导数的值与 $f(v, t)$ 的相应值都相同”来确定 $j+1$ 个待定的 n 维向量 $c_0, c_1, c_2, \dots, c_j$, 由此不难推得

$$c_0 = f_{(k)}, \quad c_1 = \dot{f}_{(k)}, \quad c_2 = \ddot{f}_{(k)}, \quad \dots, \quad c_j = f_{(k)}^{(j)} \quad (16)$$

而当 j 趋于无穷大时, 相应的多项式 $p(v, t)$ 即演变成非线性右端项 $f(v, t)$ 的 Taylor 级数

$$f(v, t) = f_{(k)} + (t - t_k) \dot{f}_{(k)} + \frac{(t - t_k)^2}{2!} \ddot{f}_{(k)} + \frac{(t - t_k)^3}{3!} f_{(k)}^{(3)} + \dots + \frac{(t - t_k)^j}{j!} f_{(k)}^{(j)} + \dots \quad (17)$$

$f(v, t)$ 其各阶导数在时刻 t_k 的值 $f_{(k)}, \dot{f}_{(k)}, \ddot{f}_{(k)}, \dots, f_{(k)}^{(j)}, \dots$ 可由下式计算

$$f_{(k)} = f(v_{(k)}, t_k), \quad \dot{f}_{(k)} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{t=t_k} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial v_i} \cdot (Hv + f)_i \right)_{t=t_k}, \quad \ddot{f}_{(k)} = \left(\frac{d\dot{f}}{dt} \right)_{t=t_k} \dots \quad (18)$$

其中未知解向量 v 的各个分量 v_i 对时间的导数 $\dot{v}_i$ 恰好由微分方程本身给出, 即

$$\dot{v}_i = (Hv + f)_i; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

这样, 将式 (16) 代入式 (11), 可得如下级数形式下的解

$$v(t) \equiv v = e^{H\tau} \left(v_{(k)} + \sum_{l=0}^{\infty} (H^{-1})^{l+1} f_{(k)}^{(l)} \right) - \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{l+1} \frac{\tau^{l+1-m}}{(l+1-m)!} H^{-m} \right) f_{(k)}^{(l)} \quad (20)$$

在实际计算时, 式 (20) 只取有限项. 为求第 $j+1$ 次近似式, 只要在第 j 次近似式基础上增添

$$\Delta_{j+1,j} = e^{H\tau} (H^{-1})^{j+1} f_{(k)}^{(j)} - \left(\sum_{m=1}^{j+1} \frac{\tau^{j+1-m}}{(j+1-m)!} H^{-m} \right) f_{(k)}^{(j)} \quad (21)$$

即可获得, 其余部分不需重算.

3 避免使用 $f(v, t)$ 导数的方法

由式 (20) 可知, 除了其一次近似式外, 其余的各近似式或多或少要用到 $f(v, t)$ 的各阶导数在时刻 t_k 的值. 但对某些问题, 由于种种原因, 要求只使用 $f(v, t)$ 的函数值. 下面讨论在这种情况下, 如何确定式 (5) 中的 $c_0, c_1, c_2, \dots, c_j$. 为讨论方便, 不失一般性, 不妨将 t_k 至 $t_k + \Delta t$ 的区间分成 j 等份, 并把对应 $t_k, t_k + \frac{\Delta t}{j}, \dots, t_k + \frac{(j-1)\Delta t}{j}, t_k + \Delta t$ 的量, 分别用 $k, k + \frac{1}{j}, \dots, k + \frac{j-1}{j}, k+1$ 标记. 这时, 可用“在 $j+1$ 个不同的时刻 $t_k + \frac{m}{j}\Delta t (m=0, 1, \dots, j)$, 多项式 $p(v, t)$ 的值与 $f(v, t)$ 的相应值相同”的条件, 求得

$$p(v, t) = f_{(k)} + f[k, k+1/j](t-t_k) + \dots + f[k, k+1/j, \dots, k+m/j](t-t_k)(t-t_{k+1/j}) \dots (t-t_{k+m/j}) + \dots + f[k, k+1/j, \dots, k+1](t-t_k)(t-t_{k+1/j}) \dots (t-t_{k+1}) \quad (22)$$

其中 $f_{(k)}$ 为 f 在 t_k 的值, $f[k, k+1/j, \dots, k+m/j]$ 是 f 关于 $t_k, t_k + \frac{\Delta t}{j}, \dots, t_k + \frac{m\Delta t}{j}$ 的 m 阶差商. 这样, 只要把式 (22) 的基底转换成 $\{1, (t-t_k), (t-t_k)^2, \dots, (t-t_k)^j\}$, 即可将其表示成式 (5) 的形式, 从而定出 $c_0, c_1, c_2, \dots, c_j$. 例如, 当 $j=3$ 时, 有

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= f_{(k)}, & c_1 &= \frac{2f_{(k+1)} - 9f_{(k+2/3)} + 18f_{(k+1/3)} - 11f_{(k)}}{2\Delta t} \\ c_2 &= \frac{9(-f_{(k+1)} + 4f_{(k+2/3)} - 5f_{(k+1/3)} + 2f_{(k)})}{\Delta t^2} \\ c_3 &= \frac{27(f_{(k+1)} - 3f_{(k+2/3)} + 3f_{(k+1/3)} - f_{(k)})}{\Delta t^3} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

另外, 值得注意仅避免使用 f 的高阶导数值的情形. 仍以三次多项式 ($j=3$) 为例, 但步长 Δt 只分成 $j-1$ 等份, 假定确定 c_0, c_1, c_2, c_3 的条件为: “在时刻 $t_k, p(v, t)$ 及其一阶导数的值等于 $f(v, t)$ 的相应值; 在 $t_k + \frac{\Delta t}{2}, t_k + \Delta t$ 时, $p(v, t)$ 的值与 $f(v, t)$ 的值相同.” 可得

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= f_{(k)}, & c_1 &= \dot{f}_{(k)}, & c_2 &= \frac{16f_{(k+1/2)} - 2f_{(k+1)} - 14f_{(k)} - 6\Delta t \dot{f}_{(k)}}{\Delta t^2} \\ c_3 &= \frac{12f_{(k+1)} - 48f_{(k+1/2)} + 36f_{(k)} + 12\Delta t \dot{f}_{(k)}}{\Delta t^3} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

由以上分析可知, 不论用式 (16), 还是用式 (23) 或式 (24) 来确定各向量 $c_0, c_1, c_2, \dots, c_j$, 均可应用本文给出的统一公式 (11) 进行求解. 使用式 (16) 确定 $c_0, c_1, c_2, \dots, c_j$, 虽然需求 f 的导数, 但它是一种典型的“自启动型”算法. 而使用式 (23) 或式 (24) 的优点是可避免求 f 的高阶导数, 但却要用到本身尚需待求的值, 如 $v_{(k+1/3)}, v_{(k+2/3)}, v_{(k+1)}$ 或 $v_{(k+1/2)}, v_{(k+1)}$ 等,

在实际计算中, 可利用当前时刻 t_k 的值 $\mathbf{v}$ 来预估它们, 本文简单地采用

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{(k+\frac{m}{j})} = & \mathbf{v}_{(k+\frac{m-1}{j})} + \frac{\Delta t}{2j} \left\{ \mathbf{H}\mathbf{v}_{(k+\frac{m-1}{j})} + \mathbf{f}_{(k+\frac{m-1}{j})} + \mathbf{H} \left[\mathbf{v}_{(k+\frac{m-1}{j})} + \frac{\Delta t}{j} \left(\mathbf{H}\mathbf{v}_{(k+\frac{m-1}{j})} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \mathbf{f}_{(k+\frac{m-1}{j})} \right) \right] + \mathbf{f}_{(k+\frac{m-1}{j})} + \frac{\Delta t}{j} \left(\mathbf{H}\mathbf{v}_{(k+\frac{m-1}{j})} + \mathbf{f}_{(k+\frac{m-1}{j})} \right), t_{k+\frac{m}{j}} \right\}, \\ & (m = 1, 2, \dots, j) \end{aligned} \quad (25)$$

逐步求出式 (23) 或式 (24) 中需要的 $\mathbf{v}_{(k+m/j)}$ 及其函数 $\mathbf{f}_{(k+m/j)} = \mathbf{f}(\mathbf{v}_{(k+m/j)}, t_{k+m/j})$ 的预估
值, 借以求得相应的 $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_j$, 然后用式 (11) 求出最终的校正值 $\mathbf{v}_{(k+1)}$.

4 算 例

例 1 为便于与解析解进行比较, 首先考虑单摆的非线性振动, 幅角 v_1 应满足方程 $\ddot{v}_1 = -\omega^2 \sin v_1$. 将右端项分离成 $-\omega^2 \sin v_1 = -\omega^2 v_1 + \omega^2(v_1 - \sin v_1)$, 参数 $\omega = (g/l)^{1/2}$. 相应的一阶微分方程组 $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H}\mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{v}, t)$ 为

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega^2(v_1 - \sin v_1) \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

由于特征方程 $\det(\mathbf{H} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ 有两个纯虚根 $\pm i\omega\sqrt{-1}$, 可以预测其平衡状态是稳定的. 本例的 $\mathbf{H}$ 之逆的各次幂、非线性右端项 $\mathbf{f}$ 以及由无穷矩阵级数 (2) 定义的 $\mathbf{e}^{\mathbf{H}\tau}$ 为

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\omega^2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega^2(v_1 - \sin v_1) \end{bmatrix}, \mathbf{e}^{\mathbf{H}\tau} = \begin{bmatrix} \cos \omega\tau & \frac{1}{\omega} \sin \omega\tau \\ -\omega \sin \omega\tau & \cos \omega\tau \end{bmatrix}$$

注意本例的 $\mathbf{f}$ 的第一个分量全为零, 只需考虑第二个分量 f_2 , 因此各向量 $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_j$ 也仅有非零分量 $c_{0,2}, c_{1,2}, \dots, c_{j,2}$. 当取 $j = 3$ 时, 幅角 $v_1(v_2$ 即 $\dot{v}_1$, 省略. $v_{k,1}, v_{k,2}$ 表示 $\mathbf{v}_{(k)}$ 的两个分量) 的求解公式 (11) 即为

$$\begin{aligned} v_1 = & \frac{c_{0,2}}{\omega^2} - \frac{c_{2,2}}{\omega^4} + \left(\frac{c_{1,2}}{\omega^2} - \frac{c_{3,2}}{\omega^4} \right) \tau + \frac{c_{2,2}}{2\omega^2} \tau^2 + \frac{c_{3,2}}{6\omega^2} \tau^3 + \left(v_{k,1} - \frac{c_{0,2}}{\omega^2} + \frac{c_{2,2}}{\omega^4} \right) \cos \omega\tau + \\ & \frac{1}{\omega} \left(v_{k,2} - \frac{c_{1,2}}{\omega^2} + \frac{c_{3,2}}{\omega^4} \right) \sin \omega\tau \end{aligned} \quad (27)$$

表 1 用式 (23),(16), 计算单摆非线性振动的幅角及与解析解和 Runge-Kutta 法
计算结果的比较 (单位: rad)

Table 1 Comparison of pendulum arguments v_1 using (23),(16), analytical,
and Runge-Kutta (unit: rad)

Time (s)	0	1	2	3	4	5
By (23)	1.047 20	-1.022 38	0.948 53	-0.828 04	0.665 30	-0.467 20
By (16)	1.047 20	-1.022 33	0.948 46	-0.827 99	0.665 34	-0.467 40
Analytical	1.047 20	-1.022 33	0.948 46	-0.827 99	0.665 32	-0.467 31
Runge-Kutta	1.047 20	-1.022 24	0.948 25	-0.827 62	0.664 81	-0.466 72

我们在初值 $v_{0,1} = 1.04720$, $v_{0,2} = 0.0$, 取 $\tau = \Delta t = 0.1$ s (其中摆长 l 取 1.0, g 取 9.80665), 以式 (16), (23) 确定的 c_0, c_1, c_2, c_3 , 用式 (27) 分别计算了 v_1 , 并与用第一类椭圆积分算出的解析解进行了比较, 如表 1 所示. 由表可见, 同样步长的 4 阶 Runge-Kutta 法的计算结果比本文差; 只有当步长缩小 10 倍, 即 $\Delta t = 0.01$, 才能算出与本文相仿的结果——幅角 v_1 的 1~5 s 的值依次为: $-1.02233, 0.94847, 0.82799, 0.66531, -0.46733$.

例 2 考虑下列带参数 a 和 b 的 Duffing 方程 $\ddot{x} + a\dot{x} + x^3 = b \cos t$, 用本文的记号设 $x = v_1, \dot{x} = v_2$, 相应的一阶微分方程组 $\dot{v} = H v + f(v, t)$ 为

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 - v_1^3 + b \cos t \end{bmatrix} \quad (28)$$

同样可求得本例的 H 之逆的各次幂以及无穷矩阵级数之和 $e^{H\tau}$. 因非线性右端项及其导数 $f_2 = v_1 - v_1^3 + a \cos t, \dot{f}_2 = (1 - 3v_1^2)v_2 - a \sin t, \ddot{f}_2 = -6v_1v_2^2 + (1 - 3v_1^2)\dot{v}_2 - a \cos t$ 等在 t_k 的值 $f_{k,2}, \dot{f}_{k,2}, \ddot{f}_{k,2}, \dots$ 很容易求得, 不妨采用式 (16). 这样, 将具体算式代入式 (11), 取 $j = 3$, 即可获得针对本例的求解公式. 我们在初值 $v_{0,1} = 0.3, v_{0,2} = 0.5$ 进行了计算, 结果如图 1 至图 3 所示. 计算到 200 s 为止, 轨线从 100 s 起开始绘制.

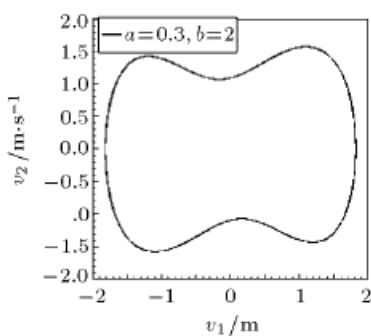


图 1

Fig.1

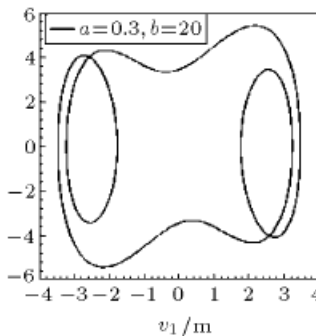


图 2

Fig.2

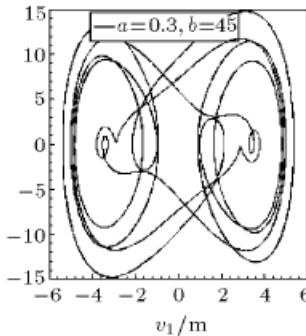


图 3

Fig.3

由图 1 和图 2 可见, 当暂态结束后, 所有轨线都集中在一起, 形成被称为周期吸引子的图形; 而图 3 则显示了轨线仍分散的混沌吸引子. 一般地说, 当线性阻尼系数 a 较小时, 随着激励幅值 b 的增加, 周期解可能分支为对称解, 再经过一系列倍周期过程而进入混沌解. 本例的收敛性和数值稳定性都较好, 用 $\Delta t = 0.1$ 和 $\Delta t = 0.02$ 算出的结果吻合, 对图 1 的问题, 即使采用步长 $\Delta t = 0.5$ s 也能算出结果.

例 3 考虑下列 f_1 不为零、带参数 p 的非线性动力学系统^[7]

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2 + p v_1(1 - v_1^2 - v_2^2) \\ \dot{v}_2 &= -v_1 + p v_2(1 - v_1^2 - v_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

可知 $v_1 = 0, v_2 = 0$ 是该系统的一个平衡点. 注意其特征方程 $\det(H - \lambda I) = 0$ 有两个复根 $p \pm i$. 在应用本文方法求解上述方程前, 宜作变换 $v_1 = r \cos \theta, v_2 = r \sin \theta$. 由此可推得其同

解方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -pr^3 \\ -\theta - 1 \end{bmatrix} \quad \text{即} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -pr^3 \\ -\theta - 1 \end{bmatrix}$$

将本例的 $\mathbf{H}^{-1}$, $\mathbf{f}$ 以及 $\mathbf{e}^{\mathbf{H}\tau}$ 等代入式 (12)(并注意式 (16)), 可得一次近似解为

$$\begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} = \mathbf{e}^{\mathbf{H}\tau} \left\{ \begin{bmatrix} r_k \\ \theta_k \end{bmatrix} + \mathbf{H}^{-1} \mathbf{f}_{(k)} \right\} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{f}_{(k)} = \begin{bmatrix} r_k + r_k(1 - r_k^2)(\mathbf{e}^{p\tau} - 1) \\ \theta_k - \mathbf{e}^{\tau} + 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

从解 (30) 的形式立即可知: ①若参数 $p = 0$, 则时刻 $t = t_k + \tau$ 的 r 值与 t_k 时的值 r_k 相同, 体现微分方程具有稳态解的特性; ②系统具有两个最终稳定状态, 即原点 $r = 0 (v_1 = 0, v_2 = 0)$, 或单位圆 $r = 1 (v_1^2 + v_2^2 = 1)$, 其中原点作为局部稳定的不动吸引子, 而单位圆则表示全局稳定的极限环. 显然, 若时刻 t_k 的 r_k 值为 0, 则时刻 $t = t_k + \tau$ 的 r 值仍保持为 0; 同样, 若时刻 t_k 的 r_k 值为 1, 则时刻 $t = t_k + \tau$ 的 r 值仍保持为 1. 当然, r_k 的值不一定恰好是 0 或 1, 此时从某个初始状态出发的演变轨迹将与参数 p 的值有关; 只要 $p > 0$, 在微小的激励下, 不动吸引子就有可能转化成极限环, 因此参数 p 的临界值 0 即为本系统的二次 Hopf 分岔点. 由此可知, 本文给出的解 (30), 几乎和解析解一样, 完全揭示了系统的本质特性. 图 4 给出了从某个非零的 r_k 出发, 其轨迹逐步演变成极限环的过程. 计算根据 (30) 式进行, 再转换成 (v_1, v_2) 后画出, 算到第 1000s 为止.

例 4 如图 5 所示, 质量 m 长为 l 的均匀杆, 悬挂在一质量不记的滑块上, 滑块与刚性壁间有刚度为 k 的弹簧相连, 其控制方程^[8]为

$$\ddot{u} + \omega_1^2 u + \frac{1}{2} \ddot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \sin \theta = A \cos \Omega t, \quad \ddot{\theta} + \omega_2^2 \sin \theta + \frac{3}{2} \ddot{u} \cos \theta = 0 \quad (31)$$

其中 $u = x/l, \omega_1^2 = k/m, \omega_2^2 = 3g/2l$ 用本文的记号, 设

$$v_1 = u, \quad v_2 = \theta, \quad v_3 = \dot{u}, \quad v_4 = \dot{\theta}$$

相应的一阶方程组 $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H}\mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{v}, t)$ 为

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4\omega_1^2 & 2\omega_2^2 & 0 & 0 \\ 6\omega_1^2 & -4\omega_2^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (32)$$

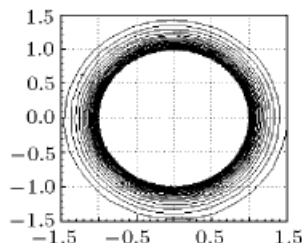


图 4 轨线逐步趋于单位圆
Fig.4 Limit cycle

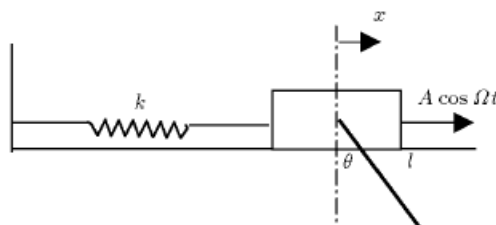


图 5
Fig.5

$$\left. \begin{aligned} f_3 &= 4\omega_1^2 v_1 - 2\omega_2^2 v_2 + \left(-\omega_1^2 v_1 + \frac{1}{2}v_4^2 \sin v_2 + \frac{1}{4}\omega_2^2 \sin 2v_2 + A \cos \Omega t \right) / \left(1 - \frac{3}{4} \cos^2 v_2 \right) \\ f_4 &= -\omega_2^2 \sin v_2 - 6\omega_1^2 v_1 + 4\omega_2^2 v_2 - \frac{3}{2} \cos v_2 (-4\omega_1^2 v_1 + 2\omega_2^2 v_2 + f_3) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

其线性部分的特征方程 $\det(\mathbf{H} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ 即 $\lambda^4 - 4(\omega_1^2 + \omega_2^2)\lambda^2 + \omega_1^2\omega_2^2 = 0$, 有四个纯虚根 $\pm\lambda_{1,2}\sqrt{-1}$, 其中

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{2(\omega_1^2 + \omega_2^2 \mp \sqrt{\omega_1^4 + \omega_2^4 + \omega_1^2\omega_2^2})} \quad (34)$$

易得本例的 $\mathbf{H}$ 之逆的各次幂以及无穷矩阵级数之和 $\mathbf{e}^{\mathbf{H}\tau}$, 例如

$$\mathbf{e}^{\mathbf{H}\tau} = \begin{bmatrix} \frac{a \cos \lambda_1 \tau + b \cos \lambda_2 \tau}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} & \frac{2\omega_2^2(\cos \lambda_1 \tau - \cos \lambda_2 \tau)}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} & \frac{a \lambda_2 \sin \lambda_1 \tau + b \lambda_1 \sin \lambda_2 \tau}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} & \frac{2\omega_2^2(\lambda_2 \sin \lambda_1 \tau - \lambda_1 \sin \lambda_2 \tau)}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \\ \frac{ab(\cos \lambda_1 \tau - \cos \lambda_2 \tau)}{2\omega_2^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} & \frac{b \cos \lambda_1 \tau + a \cos \lambda_2 \tau}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} & \frac{ab(\lambda_2 \sin \lambda_1 \tau - \lambda_1 \sin \lambda_2 \tau)}{2\omega_2^2 \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} & \frac{b \lambda_2 \sin \lambda_1 \tau + a \lambda_1 \sin \lambda_2 \tau}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \\ \frac{-a \lambda_1 \sin \lambda_1 \tau - b \lambda_2 \sin \lambda_2 \tau}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} & \frac{2\omega_2^2(-\lambda_1 \sin \lambda_1 \tau + \lambda_2 \sin \lambda_2 \tau)}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} & \frac{a \cos \lambda_1 \tau + b \cos \lambda_2 \tau}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} & \frac{2\omega_2^2(\cos \lambda_1 \tau - \cos \lambda_2 \tau)}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \\ \frac{ab(-\lambda_1 \sin \lambda_1 \tau + \lambda_2 \sin \lambda_2 \tau)}{2\omega_2^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} & \frac{-b \lambda_1 \sin \lambda_1 \tau - a \lambda_2 \sin \lambda_2 \tau}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} & \frac{ab(\cos \lambda_1 \tau - \cos \lambda_2 \tau)}{2\omega_2^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} & \frac{b \cos \lambda_1 \tau + a \cos \lambda_2 \tau}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \end{bmatrix}$$

其中

$$a = \lambda_2^2 - 4\omega_1^2, \quad b = 4\omega_1^2 - \lambda_1^2 \quad (35)$$

我们采用 j 为 3 的求解公式 (11) 对本例进行了计算, 其中的 c_0, c_1, c_2, c_3 由式 (23) 定出. 首先, 取 $\omega_1 = 3.0, \omega_2 = 1.0, A = 0.0$, 在初值 $v_1 = 1.3/9, v_2 = 0.0, v_3 = 0.0, v_4 = 0.0$ 下, 用步长 $\Delta t = 0.1 \text{ s}$, 分析了系统的自由振动, 并将其中的 v_1 与相应的线性齐次解作了比较, 结果如图 6 和图 7 所示. 由式 (32) 可知, f_3, f_4 仅包含 v 的非线性项. 这样, 略去 $\mathbf{f}$ 后的线性齐次解 $\mathbf{v} = \mathbf{e}^{\mathbf{H}\tau} \mathbf{v}_{(k)} = \mathbf{e}^{\mathbf{H}(\tau+\Delta t)} \mathbf{v}_{(k-1)} = \cdots = \mathbf{e}^{\mathbf{H}t} \mathbf{v}_{(0)}$ 在振幅较小时, 其形状自然与非线性解差别不大. 此外, 设 $\omega_1 = 3.0, \omega_2 = 1.0, \Omega = 3.0$, 在初值 $v = A/9, v_2 = 0.0, v_3 = 0.0, v_4 = 0.0$ 下, 取 $\Delta t = 0.01$, 分别用激励振幅 $A = 1.0, A = 2.0$, 计算了 v_1 的受迫振动. 如图 8 所示, 即使激励频率 Ω 等于固有频率 ω_1 , 也仅当激励振幅 A 达到适当值 (例如 $A = 2.0$) 时, 才会发生共振. 进一步分析表明, 在区间 (1.34, 1.35) 内, 存在参数 A 的某个动态分岔点: 设在 100 s 的范围内,

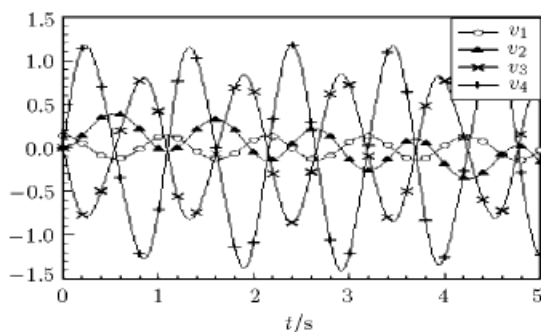


图 6 自由振动时程曲线
Fig.6 Free vibration

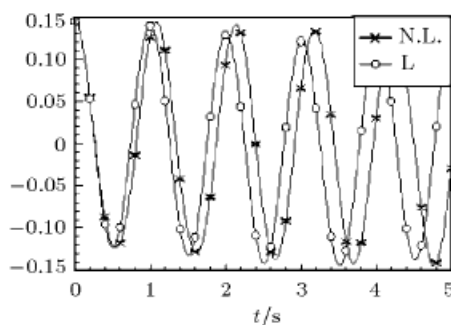
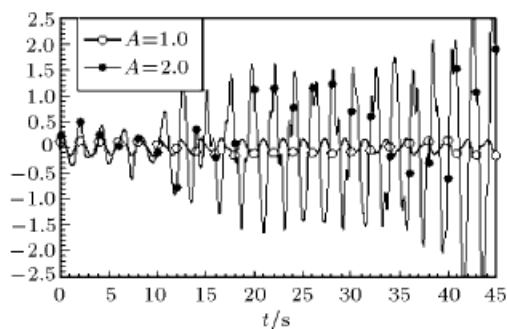
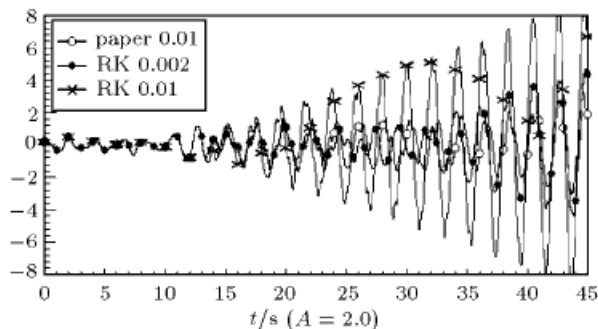


图 7 与线性齐次解的比较 (v_1)
Fig.7 v_1 and comparison with linear homogeneous solution

当 $A = 1.34$ 时, v_1 的最大幅值为 0.242, 发生在第 42s; 而当 $A = 1.35$ 时, v_1 的曲线在前 40s 内, 形状与 $A = 1.34$ 时类似, 随后显示出主共振现象, 最大幅值猛增为 3.75, 且发生在第 100s 附近. 对 $A = 2.0$ 的情形, 还给出了与 4 阶 Runge-Kutta 法的比较. 如图 9 所示, 当响应幅值不大时, 其结果与本文一致; 而当响应幅值增大时, 其差异就较为显著, 但值得注意, 当 Runge-Kutta 法的步长缩小 5 倍, 则其值迅速与本文的结果靠近.

图 8 不同激励幅值下的响应 (v_1)Fig.8 Responses v_1 under different forced exciting图 9 与 Runge-Kutta 法的比较 (v_1)Fig.9 In comparison with Runge-Kutta Method (v_1)

5 结 论

1) 文献 [5,6] 中的求解公式恰好是 (11) 式取 $j = 1$ 的特况. 算例表明, 本文方法除结果合理可靠外, 精度上也有明显优势.

2) 右端项分离成 Hv 和 $f(v, t)$ 时, 一般 Hv 应包含 v 的全部线性齐次项 (见例 1, 例 4), 以便借助 H 阵判断系统的稳定性. 请注意像例 2 这样的例外, 为保证 H 不奇异, 可导致 $f(v, t)$ 中出现 v 的线性项, 但这不影响应用 (11) 式进行计算.

3) 矩阵 $e^{H\tau}$ 的元素, 可直接用 τ 和包含在矩阵 H 中的参数解析地表示, 从而使 (11) 式成为 τ 的分段解析函数. 这样, 有时可从解的形态, 揭示所求系统的本质特性 (见例 3).

参 考 文 献

- 1 钟万勰. 结构动力学方程的精细时程积分方法. 大连理工大学学报, 1994, 34(2): 131~136 (Zhong Wanxie. On precise time-integration method for structural dynamics. *Journal of Dalian University of Technology*, 1994, 34(2): 131~136(in Chinese))
- 2 裘春航, 吕和祥, 蔡志勤. 在哈密顿体系下分析非线性动力学问题. 计算力学学报, 2000, 17(2): 127~132 (Qiu Chunhang, Lu Hexiang, Cai Zhiqin. Solving the problems of nonlinear dynamics based on Hamiltonian system. *Journal of Computational Mechanics*, 2000, 17(2): 127~132(in Chinese))
- 3 Bishop SR, Xu DL. Control of chaos in noisy flows. *Phys Rev*, 1996, E54(10): 3204~3210
- 4 Bishop SR, Xu DL, Clifford MJ. Flexible control of the parametrically excited pendulum. *Proc R Soc Lond*, 1996, A452: 1789~1806
- 5 陈予恕, 丁干, 侯书军. 非线性转子-密封系统的稳定性和 Hopf 分岔. 振动工程学报, 1997, 10(3): 368~374 (Chen Yushu, Ding Qian, Hou Shujun. A study on the stability and Hopf bifurcation of nonlinear rotor-seal system. *Journal of Vibration Engineering*, 1997, 10(3): 368~374 (in Chinese))
- 6 武际可, 苏先樾. 弹性系统的稳定性. 北京: 科学出版社, 1994 (Wu Jike, Su Xianye. Stability of Elastic System. Beijing: Science Press, 1994 (in Chinese))

- 7 王东生, 曹雷. 混沌、分形及其应用. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1995 (Wang Dongsheng, Cao Lei. Chaos, Fractal, and Their Applications. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 1995(in Chinese))
- 8 Nayfeh AH, Mook DT. Nonlinear Oscillations. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976

ON SEGMENTED-DIRECT-INTEGRATION METHOD FOR NONLINEAR DYNAMICS EQUATIONS¹⁾

Qiu Chunhang Lü Hexiang Zhong Wanxie

(*Dalian University of Technology, Dalian 116023, China*)

Abstract In this paper we discuss a general nonlinear dynamics system governed by the equation $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{H}\mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{v}, t)$, in which $\mathbf{v}$ is an unknown n -dimensional vector, $\mathbf{H}$ is a coefficient matrix, $\mathbf{H}\mathbf{v}$ and $\mathbf{f}(\mathbf{v}, t)$ are, respectively, the linear homogeneous part and nonlinear part in the right terms of the equation. First we approximate the nonlinear part by a j th degree segmented polynomial. Using that polynomial representation of the nonlinear part, the integration of the equation can be carried out segment by segment, and the integrals for each segment can be evaluated directly since there are elementary anti-derivatives. Thus, a new formula to solve the equation in the time-segment under consideration is obtained, and a series of approximate solutions are successively deduced. Note that the formula can be analytically expressed in each time-segment, which is advantageous in revealing the relationship between the nonlinear dynamics behavior of the system and its parameters.

To examine the reliability of the method formulated in this paper, a variety of examples are used to study nonlinear dynamics phenomena, including stability of critical point, limit cycle, period and chaotic attractor, Hopf bifurcation, and primary resonance under forced exciting.

Key words nonlinear dynamics system, direct integration method, stability, attractor, limit cycle, Hopf bifurcation

Received 28 August 2000, revised 9 July 2001.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19990510).