

三维非均匀脆性材料破坏过程的数值模拟

陈永强 郑小平 姚振汉

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘要 采用有限元方法模拟了三维非均匀固体材料的宏观等效力学性质和破坏过程. 首先采用格形 (lattice) 方法把试件离散成三维均匀网格, 在每个单元格中将材料按照均匀处理, 根据给定的统计规则来确定不同单元格中的材料常数以反映材料的非均匀性. 然后对非均匀脆性材料选用简单的本构关系与断裂准则, 采用自适应选取载荷步长对试件进行加载, 通过非平衡迭代技术对刚度矩阵进行不断修正, 实现了非均匀脆性材料的弹性行为及破坏过程的数值模拟. 在此基础上, 通过数值计算研究了材料的非均匀分布对宏观等效力学性质和破坏过程的影响, 给出了破坏全过程的非线性载荷 - 位移曲线以及不同载荷阶段的三维损伤破坏的演化图.

关键词 三维非均匀, 破坏过程, 格形模型, 统计方法, 数值模拟

引 言

严格来讲自然界的一切材料都是非均匀的, 只不过彼此非均匀程度不同而已. 显然采用传统的均匀模型对宏观和细观非均匀材料进行分析计算不再合适, 而对于微观非均匀材料在破坏过程中表现出的一些特殊力学行为和现象, 均匀模型也不能给出满意的解释. 所以建立非均匀材料的力学模型和相应的分析手段是当前计算力学研究的重要课题之一.

对于非均匀材料问题, 国内外学术界进行了长期探索, 特别是近二十年来取得了很大的进展, 并逐渐形成了一个新型学科分支. 从研究方法来看, 比较流行的主要有两种类型: 一种是建立在各种各样自洽模型基础上的有限元与边界元方法, 另一种是建立在统计技术上的格形化有限元方法. 这两种方法已被成功地应用于各种非均匀材料问题, 特别在复合材料力学性能研究和脆性材料破坏过程的演化方面取得了令人瞩目的成果. 1992 年 E. Schlangen 和 J. Mier^[1] 采用简单格形模型模拟了混凝土等脆性材料的典型破坏机理; 1997 年 G. Frantziskonis 等^[2,3] 假定材料的弹性性质为一个平稳随机场, 分析了材料非均匀性对结构边界附近位移场的影响, 并且得到了一维情况下的解析解; 1998 年 S.C. Blair 和 N. Cook^[4,5] 采用统计方法研究了岩石材料的非线性行为及由于颗粒形状和尺寸的变化而引起的应力场微观非均匀性; 1998 年 P.K. Kaiser 和 C.A. Tang^[6,7] 用非均匀有限元模型模拟了岩石不稳定破坏现象.

但是以上所有工作均是按照二维情况进行模拟的, 据作者所知, 到目前为止关于三维非均匀材料的数值模拟很少有文献报道. 最近, 本文作者^[8,9] 在这一领域进行了探索研究. 在此基础上, 本文采用格形化方法 (lattice) 和统计技术建立了三维非均匀固体材料的有限元模型, 然后对非均匀脆性材料选用简单的本构关系与断裂准则, 通过非平衡迭代技术对刚度矩阵进行不断修正, 实现了非均匀脆性材料的弹性行为及破坏过程的数值模拟. 通过数值计算研究了材料

的非均匀分布对材料宏观等效弹性性质、破坏过程的影响,并且给出了材料破坏全过程的载荷-位移曲线、以及在不同载荷阶段的三维损伤破坏的演化图.

1 格形有限元模型

下边以三维空间简单试件受轴向载荷作用为例来建立问题的格形有限元模型.如图 1 所示,试件侧面自由,底部沿 z 轴方向固定,顶端施加垂直位移载荷,即

$$w(0) = 0, \quad w(l) = \bar{w} \quad (1)$$

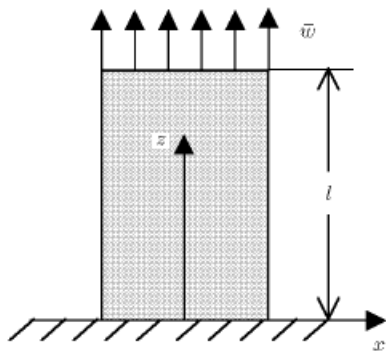


图 1 受轴向拉压作用的空间试件
Fig.1 3-D specimen subjected to
tension/compression

采用格形模型对试件进行离散:即把试件离散为形状和大小都相同的单元格,在每个单元格中将材料按照均匀处理,在不同单元格中认为材料服从给定的非均匀随机分布.对非均匀脆性材料选用简单的本构关系与断裂准则:即在弹性阶段各单元中应力应变保持各自的线性关系,当单元最大主应力一旦超过该单元强度极限时单元即被破坏,不再具有任何抵抗变形的能力.

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{(e)} &= D^{(e)} \varepsilon^{(e)}, & \sigma_I^{(e)} < \sigma_b^{(e)} \\ \sigma^{(e)} &= 0, & \sigma_I^{(e)} \geq \sigma_b^{(e)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 $\sigma^{(e)}$, $\varepsilon^{(e)}$ 和 $D^{(e)}$ 分别为单元 e 的应力张量、应变张量和本构张量, $\sigma_I^{(e)}$ 为单元 e 的最大主应力, $\sigma_b^{(e)}$ 为相应的极限拉应力.本构张量 $D^{(e)}$ 的具体表达如下

$$D^{(e)} = \frac{E^{(e)}}{2[1+\nu^{(e)}][1-2\nu^{(e)}]} \begin{bmatrix} 2[1-\nu^{(e)}] & 2\nu^{(e)} & 2\nu^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ 2\nu^{(e)} & 2[1-\nu^{(e)}] & 2\nu^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ 2\nu^{(e)} & 2\nu^{(e)} & 2[1-\nu^{(e)}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中 $E^{(e)}$ 和 $\nu^{(e)}$ 分别为单元 e 的弹性模量、泊松比.

本文所讨论的非均匀材料就是指材料参数(弹性模量、泊松比或极限强度)在不同的单元可以取值不同,整体上服从某种统计分布(如 Weibull 分布或正态分布).这里应该说明的是:在上述模型中尽管每个单元材料采用简单的弹脆性本构关系,但是由于非均匀因素影响使得在加载过程各个单元破坏的先后次序不同,在整体上可以表现出各种各样的复杂非线性行为.

对试件进行格形化离散后,可以得到一组代数方程组

$$Ka = P \quad (4)$$

其中 $\mathbf{a}$ 是结点位移列阵, $\mathbf{P}$ 是载荷列阵; $\mathbf{K}$ 为整体刚度矩阵, 它由单元刚度矩阵 $\mathbf{K}^{(e)}$ 组装而成,

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^{(e)} = \sum_e \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B} dV \quad (5)$$

式中 $\mathbf{B}$ 为单元几何矩阵, $\mathbf{D}^{(e)}$ 为单元本构矩阵.

在传统有限元中, 往往要根据结构的变形特点划分单元, 所以对于不同的单元具有不同的几何矩阵和积分区域. 在格形有限元中, 对于不同的单元具有相同的几何矩阵和积分区域, 但是单元本构矩阵随单元的不同而改变.

2 材料性质的非均匀统计分布

所谓非均匀材料就是指材料力学参数 (如弹性模量、泊松比或极限强度等) 随空间位置的不同而发生变化. 对于给定的格形划分模型, 为了描述材料参数的这种空间变化需要解决两个问题: 第一, 如何确定材料参数在数值上的非均匀分布规律; 第二, 如何将这些不同的材料参数投放到各个格子中, 不同的投放方法会形成不同的构型. 在本文中, 我们采用正态分布和 Weibull 分布来描述材料参数在数值上的非均匀性变化, 即认为材料的弹性模量、泊松比或极限强度在数值上按照正态分布和 Weibull 分布变化. 由此可以产生一个离散的材料参数序列, 然后将该序列按照随机方式投放到空间单元格中. 这样, 对于同一种非均匀分布也会产生出不同的非均匀样本, 我们将通过数值算例来说明不同非均匀样本的影响.

正态分布的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad (6)$$

其中平均值 μ 反映了非均匀材料的综合性能, 方差 σ 反映了分布的非均匀程度, σ 越大说明材料非均匀程度越高. 这里应该说明的是, 对于正态分布随机变量可能出现负值, 而实际的弹性模量、泊松比等参数是非负的. 因此用正态分布模拟材料的物理性质具有一定的局限性, 需要作进一步的特殊处理才能使用.

另一种常用分布是两参数的 Weibull 分布, 其概率密度函数为

$$f(t) = \frac{m}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1} e^{-(t/\eta)^m} \quad (7)$$

其中 Weibull 参数 η, m 与平均值 μ , 方差 σ 之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \eta \cdot \Gamma(1 + 1/m) \\ \sigma^2 &= \eta^2 [\Gamma(1 + 2/m) - \Gamma^2(1 + 1/m)] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

根据给定的试件格形规模, 将概率密度函数进行等概率分段积分, 可以产生一个离散的材料参数序列, 再将它们按照随机方式投放到单元格中, 便可以得到在指定概率密度函数下的材料参数的非均匀分布. 图 2 是采用 Weibull

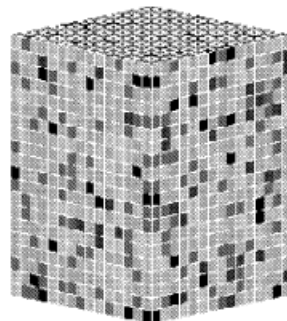


图 2 材料杨氏模量的非均匀分布

Fig.2 Random distribution of Young's modulus

分布模拟材料杨氏模量非均匀分布得到的三维示意图。

3 自适应载荷步长与非平衡迭代

为了跟踪真实的破坏过程,通常将非线性方程 (4) 化成增量形式进行求解,相应的第 k 载荷步的增量方程为

$$\mathbf{K}^{(k)} \Delta \mathbf{a}^{(k)} = \Delta \mathbf{P}^{(k)} \quad (9)$$

对于增量方程 (9),通常采用固定载荷步加载方法来跟踪载荷-位移历程,但是这种方法很难控制在每个载荷步中破坏单元的数目,当载荷步较小时可能会出现加载后没有新的单元破坏,需要进行下一载荷的重复计算,直到出现新的单元破坏为止,当载荷步过大时结构会在较少的加载次数内迅速破坏,所得到的破坏路径大大偏离真实的破坏路径,为此,本文设计了一种自适应载荷步长方法。

3.1 自适应载荷步长

考虑到在没有出现新的单元破坏之前问题一直是线性的,所以可以对载荷增量步进行自适应选取,对于第 k 载荷步,任意选定一个相对较小的初始位移载荷 $\Delta \mathbf{P}_0^{(k)}$,代入方程 (9) 进行计算,得到

$$\Delta \mathbf{a}_0^{(k)} = [\mathbf{K}^{(k)}]^{-1} \Delta \mathbf{P}_0^{(k)} \quad (10)$$

由此可以得到相应初始位移载荷 $\Delta \mathbf{P}_0^{(k)}$ 的应力场,进一步可以得到各个单元的最大主应力 $(\sigma_I^{(e)})^{(k)}$,记

$$\rho^{(k)} = \max_e \left\{ \frac{(\sigma_I^{(e)})^{(k)}}{\sigma_b^{(e)}} \right\} \quad (11)$$

最后得到第 k 载荷步的自适应步长为

$$\Delta \mathbf{P}^{(k)} = \frac{\Delta \mathbf{P}_0^{(k)}}{\rho^{(k)}} \quad (12)$$

根据表达式 (12) 可以在每次加载时自动选取载荷步的大小,使得本次加载完毕后,刚好有个别单元出现破坏,这样就避免了一次加载后破坏单元太多或没有单元破坏的情况,从而较真实地模拟准静态加载破坏过程。

3.2 非平衡迭代

当结构的局部发生破坏并失去承载能力时,传统有限元法需要将破坏单元从网格中除去,使得原结构中存在缺陷,然后再重新划分网格、进行有限元计算,在本文中,并不需要把这些破坏的单元从模型中除去,而是通过给这些单元赋一个特别小的弹性模量 $\tilde{E}$

$$\tilde{E} = cE_0 \quad (13)$$

式中 $\tilde{E}$ 是指定的破坏单元的模量, E_0 是模量整体分布的平均值, c 是系数 (本文取为 10^{-6}),这样做的好处是使得结构在几何上仍然保持连续性,不需要重新划分网格,从而可以利用连续介质力学的方法研究具有间断性的问题。

但是,当给这些破坏单元赋一个特别小的弹性模量后,结构原有的平衡就被打破,需要进行应力重新分配,因此必须通过非平衡迭代来满足平衡条件,具体作法是:根据自适应载荷步

长进行有限元计算之后, 对所有单元搜索找出其中的破坏单元; 给这些破坏单元赋一个足够小的弹性模量, 保持当前网格不变, 重新进行单元性质的计算和集成, 得到更新的总体刚度矩阵 $\widehat{\mathbf{K}}^{(k)}$

$$\widehat{\mathbf{K}}^{(k)} = \sum_{e \in \tilde{e}} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B} dV + \sum_{\tilde{e}} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{B} dV \quad (14)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \frac{\tilde{E}}{2[1+\tilde{\nu}][1-2\tilde{\nu}]} \begin{bmatrix} 2[1-\tilde{\nu}] & 2\tilde{\nu} & 2\tilde{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 2\tilde{\nu} & 2[1-\tilde{\nu}] & 2\tilde{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 2\tilde{\nu} & 2\tilde{\nu} & 2[1-\tilde{\nu}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\tilde{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\tilde{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\tilde{\nu} \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中 $\tilde{\mathbf{D}}$ 是破坏单元的弹性矩阵, $\tilde{E}$ 和 $\tilde{\nu}$ 分别是破坏单元的模量和泊松比 (本文取 $\tilde{\nu} = \nu$).

由于刚度矩阵的变化, 将产生不平衡载荷

$$\widehat{\mathbf{K}}^{(k)} \mathbf{a}^{(k)} - \mathbf{P}^{(k)} = \Delta \mathbf{P}^{(k)} \quad (16)$$

保持载荷和边界条件不变, 通过迭代来满足平衡条件

$$\widehat{\mathbf{K}}^{(k)} \Delta \mathbf{a}^{(k)} = \Delta \mathbf{P}^{(k)} \quad (17)$$

得到当前的位移场 $\widehat{\mathbf{a}}^{(k)}$

$$\widehat{\mathbf{a}}^{(k)} \leftarrow \mathbf{a}^{(k)} + \Delta \mathbf{a}^{(k)} \quad (18)$$

利用

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(k)} = \mathbf{B} \widehat{\mathbf{a}}^{(k)} \quad (19)$$

得到当前的应变场, 对每个未破坏的单元使用式 (2), 判断是否有新的单元破坏, 重复上述过程, 直至没有新的破坏单元出现, 完成本载荷步的非平衡迭代过程并进入下一载荷步.

模拟非均匀材料破坏过程的大部分计算量集中在上述非平衡迭代阶段.

4 数值模拟结果

设非均匀脆性材料试件为 $0.3 \text{ m} \times 0.3 \text{ m} \times 0.6 \text{ m}$ 长方体, 将其划分为 $10 \times 10 \times 20$ 个格形单元. 材料的泊松比为常数 0.17, 杨氏模量和强度极限的期望值分别为 $6.0 \times 10^3 \text{ MPa}$ 和 3.0 MPa , 试件的一端固定, 另一端施加位移载荷. 下边利用本文提出的方法, 分别从几个方面来研究材料的非均匀性对宏观等效力学性质及破坏过程的影响.

4.1 非均匀材料宏观等效力学性质

杨氏模量是表征固体材料力学性质最重要的参量之一. 图 3(a) 给出了当材料的杨氏模量服从正态分布时, 其同期望值标准化之后的宏观等效杨氏模量随均方差的变化 (横坐标为均方差与期望值的比值). 结果表明, 随着材料分布非均匀程度的增加宏观等效杨氏模量逐渐减小.

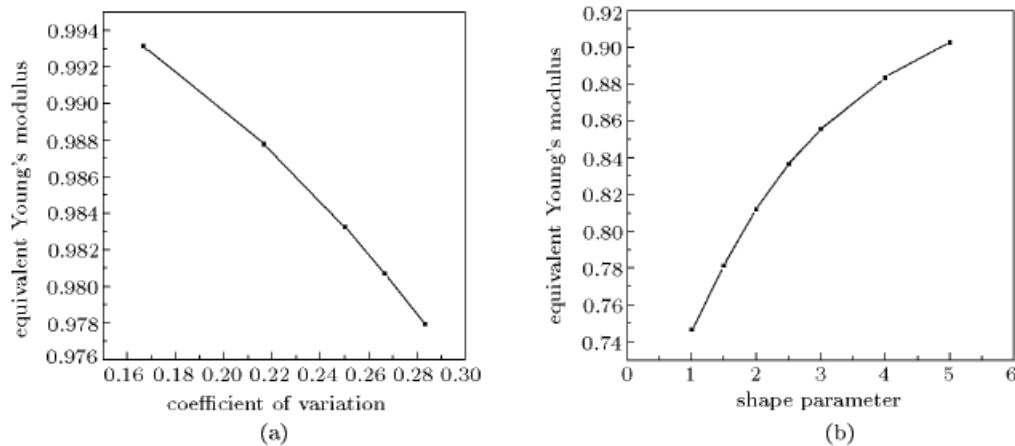


图 3 等效杨氏模量随均方差 (a) 和形状参数 (b) 的变化

Fig.3 Effective modulus versus square root deviation (a) and shape parameter of Weibull distribution (b)

图 3(b) 给出了当材料的杨氏模量服从 Weibull 分布时, 其宏观等效杨氏模量随形状参数 m 的变化. 结果表明随着形状参数 m 的增大 (即材料非均匀程度的减小) 宏观等效杨氏模量逐渐增大. 并且, 采用正态分布时材料的宏观等效杨氏模量的变化范围较小, 而采用 Weibull 分布可以模拟较大范围的非均匀性, 等效杨氏模量的变化范围也比较大. 根据上述分析, 我们可以得到结论: 材料分布越均匀它的整体刚度就越大.

4.2 非均匀脆性材料的破坏过程

分别考虑以下几种材料非均匀情况时的破坏过程: 杨氏模量为正态分布; 极限强度为正态分布; 杨氏模量和极限强度均为正态分布; 杨氏模量为 Weibull 分布; 极限强度为 Weibull 分布; 杨氏模量和极限强度均为 Weibull 分布. 对于正态分布情况, 设其变异系数为 v (即均方差与期望值的比值).

图 4(a) 是杨氏模量为正态分布时试件受拉伸破坏的载荷 - 位移曲线, 可以看出随着均方差的增大, 材料的宏观等效杨氏模量和最大承载力均显著下降, 材料发生的破坏为脆性断裂. 而强度为正态分布时的破坏曲线跟模量为正态分布时的情况基本相似, 所以不再列出. 杨氏模量

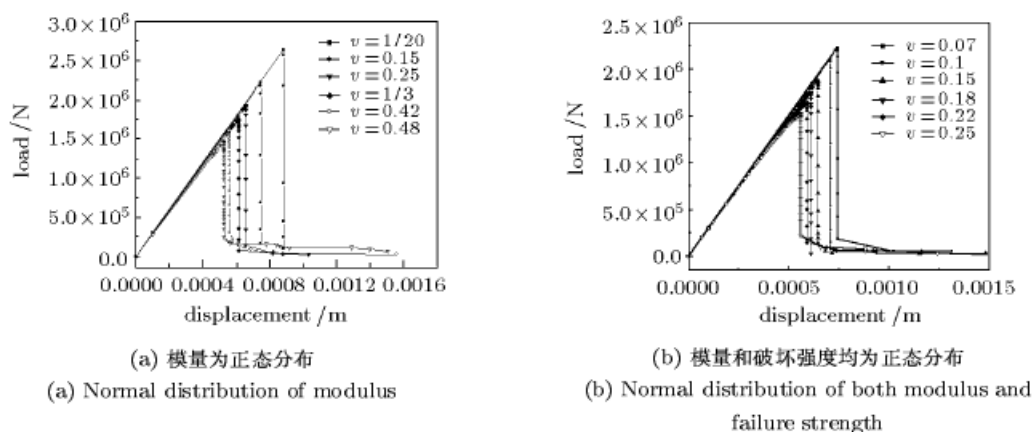


图 4 破坏过程的载荷 - 位移曲线

Fig.4 Relation of displacement versus load

和破坏强度均为正态分布时的破坏曲线见图 4(b), 其相应的等效模量、最大承载力及破坏特征与图 4(a) 基本相同, 但最大承载力低于前者。

图 5(a) 是材料的杨氏模量为 Weibull 分布时, 不同的形状参数所对应的破坏曲线。由图可见, 形状参数越大 (即材料分布越趋向于均匀化), 材料的宏观等效杨氏模量越大, 同时其最大承载力也越大。另一方面, 分布的形状参数越小, 材料的断裂就越表现出较明显的应变软化行为。图 5(b) 是破坏强度为 Weibull 时的破坏曲线。该破坏曲线与图 5(a) 情况类似, 但是, 强度分布的非均匀性对等效杨氏模量的影响较小。图 5(c) 是模量和强度均为 Weibull 分布时的破坏曲线。由图 5 可以看出, 材料分布非均匀性对等效模量和最大承载力的影响非常大。在峰值载荷之后, m 较小的曲线位于 m 较大的曲线上方, 表明非均匀程度较大的材料的峰后残余强度较大。另外, 虽然仅模量或强度为 Weibull 分布也能较好地模拟应变软化行为, 但是更一般地可以认为是二者共同随机分布造成的。

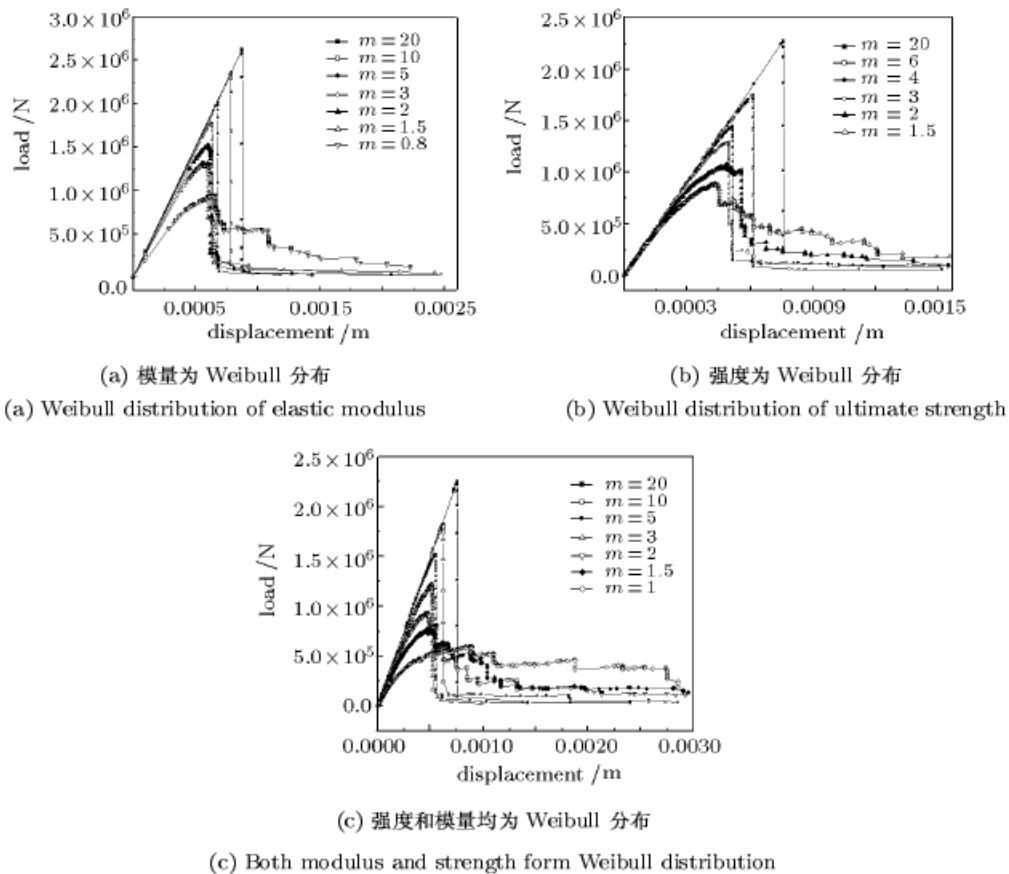


图 5 破坏过程的载荷-位移曲线

Fig.5 Relation of displacement versus load

图 6 是非均匀材料和理想线弹性材料破坏过程中耗散能分布的比较。同线弹性材料破坏过程中耗散能迅速达到峰值不同, 非均匀材料的耗散能是缓慢上升的, 而且大部分能量是在峰值载荷之后发生的。这表明, 发生应变软化的材料在达到峰值载荷后仍然有很大的吸收能量的能力, 这有利于抑制结构的突发性破坏。

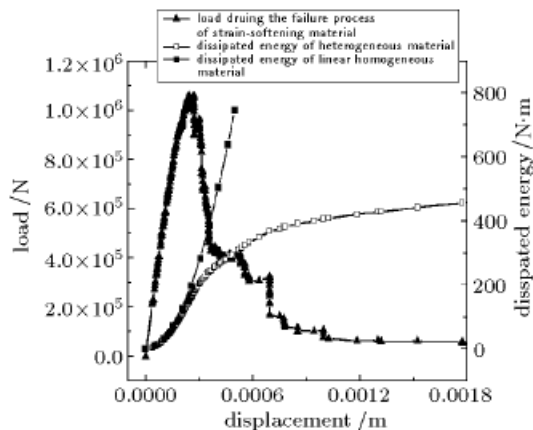


图 6 非均匀材料和线弹性材料的耗散能

Fig.6 Dissipated energy of heterogeneous and linear homogeneous materials

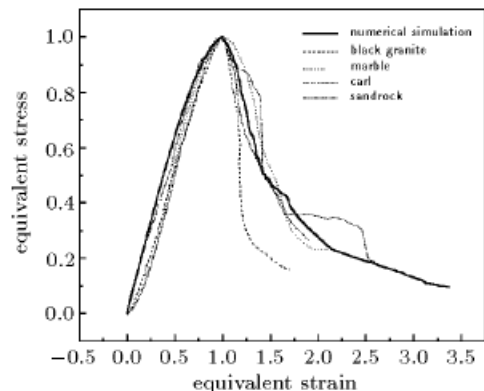


图 7 几种破坏曲线与试验数据的比较

Fig.7 Test data and numerical simulation

4.3 试验比较

为了验证本文模型和方法的有效性, 我们给出了破坏过程模拟曲线与试验曲线^[10,11]的比较(图 7). 试件弹性模量和破坏强度的分布期望值分别为 6.0×10^3 MPa 和 3.0 MPa, 泊松比为 0.18. 材料的弹性模量和破坏强度均按 Weibull 分布, 形状参数 $m = 2.5$, 立方体试件边长为 0.1m, 被划分为 $15 \times 15 \times 15$ 个单元. 数值模拟曲线是对多组样本的数值模拟结果平均化之后得到的. 图中各曲线都对各自的峰值点进行了标准化. 由图可见, 用本文的方法得到的宏观等效应力应变曲线与该文中关于拉伸应变软化现象的试验数据符合较好, 因此材料分布非均匀性可以作为材料应变软化现象的一种解释.

4.4 不同随机样本的影响

下边讨论在同一种非均匀分布下, 不同的随机非均匀样本对载荷-位移曲线的影响. 取材料的泊松比为常数 ($= 0.17$), 杨氏模量和极限强度均按 Weibull 分布, 其期望值分别为 6.0×10^3 MPa 和 3.0 MPa. Weibull 分布的形状参数为 2.0.

图 8(a) 为杨氏模量为 Weibull 时不同随机非均匀样本对载荷-位移曲线的影响曲线.

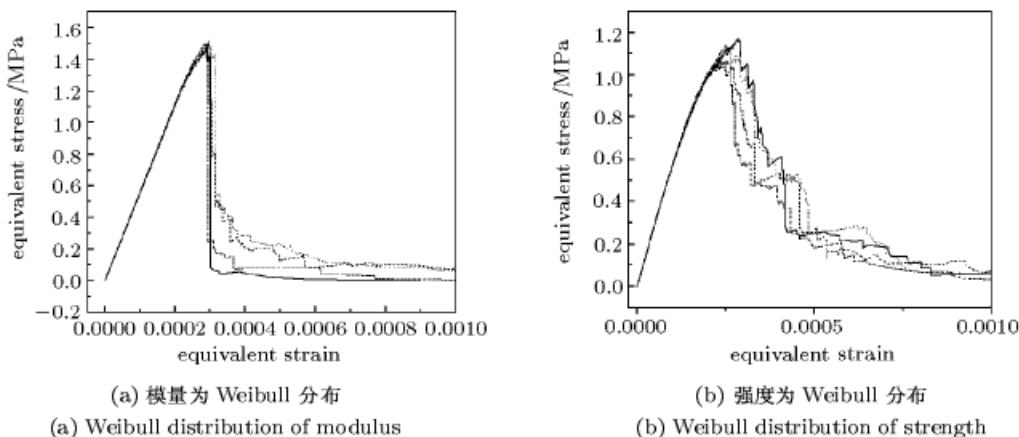


图 8 不同样本曲线

Fig.8 Curves of effective stress versus strain of different samples

图 8(b) 为极限强度为 Weibull 分布时不同随机非均匀样本对载荷 - 位移曲线的影响曲线。结果表明不同随机非均匀样本对宏观等效杨氏模量影响很小, 但是对破坏过程和破坏路径有明显的影响。

4.5 破坏演化过程

为了形象地模拟非均匀脆性材料的破坏演化过程, 我们对计算数据进行了计算机图像再现处理。图 9 给出了采用 $20 \times 15 \times 15$ 单元的格形模型模拟试件拉伸时, 在第 392 步、425 步和最后整体断裂时的破坏形貌演化过程。其中模量和强度均为 Weibull 分布, 形状参数 $m = 2.5$ 。从图形可以看出: 随着载荷的逐渐增加, 损伤区域不断扩大, 随后出现的破坏单元越来越集中到某受损伤最严重的区域, 而在其他区域则不再有明显的发展, 从而导致这一区域损伤迅速衍生、发展, 最终导致整个试件彻底失去承载能力。

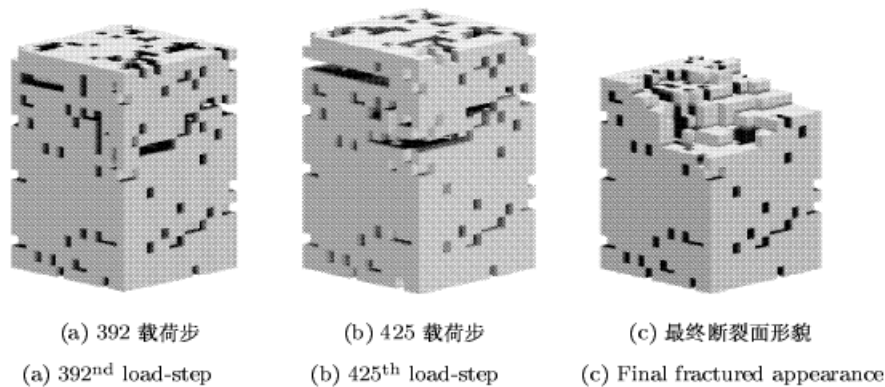


图 9 试件的破坏形貌

Fig.9 3-D fracture appearance patterns

5 结 论

通过本文的研究, 我们得到以下结论:

1) 本文所建立的格形化方法 (lattice) 和统计技术可以较好地模拟非均匀脆性材料在简单载荷作用下的等效弹性行为及破坏演化过程, 而这些力学行为和现象用经典均匀模型很难得到解释。

2) 材料参数分布越均匀, 材料的刚度就越好、承载能力就越大, 这也解释了实际材料的力学性能总是低于理论值的现象; 材料参数分布越均匀, 材料的破坏过程就越趋向于脆性破坏, 材料参数分布越分散, 材料的应变软化现象越明显、峰后残余强度越大。

3) 采用不同的统计分布模拟材料的非均匀性, 得到的破坏过程的应力 - 应变曲线差异很大。一般来讲, 采用正态分布得到的破坏曲线更具有脆性破坏的特点, 而采用 Weibull 分布得到的破坏曲线则适合于模拟非均匀材料的应变软化现象。

4) 在同一种非均匀分布下, 不同随机非均匀样本对宏观等效杨氏模量影响很小, 但是对破坏过程和破坏路径有明显的影响。

关于非均匀材料的等效弹性行为及破坏过程研究是一个比较复杂的课题, 本文仅仅是在这一领域探索的初步工作, 有许多重要的问题有待进一步深入研究。例如, 对于具体的工程非均

匀材料如何建立相应格形模型, 微结构分布的不均匀性对计算结果的影响、格子密度 (即颗粒度) 对计算结果的影响等等。

参 考 文 献

- 1 Schlangen E, van Mier JGM. Simple lattice model for numerical simulation of fracture of concrete materials and structures. *Materials and Structures*. 1992, 25: 534~542
- 2 Frantziskonis G, Renaudin P, Breyse D. Heterogeneous solids—Part I: analytical and numerical 1-D results on boundary effects. *Eur J Mech, A/Solids*, 1997, 16(3): 409~423
- 3 Blair SC, Cook NG. Analysis of compressive fracture in rock using statistical techniques: Part I. a non-linear rule-based model. *Int J Rock Mech Min Sci*, 1998, 35(7): 837~848
- 4 Blair SC, Cook NG. Analysis of compressive fracture in rock using statistical techniques: Part II. effect of microscale heterogeneity on macroscopic deformation. *Int J Rock Mech Min Sci*, 1998, 35(7): 849~861
- 5 Tang CA, Kaiser PK. Numerical simulation of cumulative damage and seismic energy release during brittle rock failure—Part I: fundamentals. *Int J Rock Mech Min Sci*, 1998, 35(2): 113~121
- 6 Kaiser PK, Tang CA. Numerical simulation of cumulative damage and seismic energy release during brittle rock failure—Part I: rib pillar collapse. *Int J Rock Mech Min Sci*, 1998, 35(2): 123~134
- 7 Desai CS, Kundu T, Wang G. Size effect on damage parameters for softening in simulated rock. *Int J Numer Anal Method Geomech*, 1990, 14: 509~517
- 8 Yao Zhenhan, Chen Yongqiang, Zheng Xiaoping. Numerical Simulation of Failure Process in 3-D Heterogeneous Brittle Material. ICTAM 2000, Chicago, US, 2000
- 9 陈永强, 姚振汉, 郑小平. 三维非均匀固体材料等效性质和破坏过程数值模拟. “力学 2000” 会议论文集, 北京: 气象出版社. 2000. 577~579 (Chen Yongqiang, Yao Zhenhan, Zheng Xiaoping. Numerical simulation for equivalent properties and failure process of three-dimensional heterogeneous solid material. Proceedings of Mechanics 2000 in Beijing. 2000. 577~579 (in Chinese))
- 10 朱之芳. 刚性试验机. 北京: 煤炭工业出版社, 1985 (Zhu Zhifang. Stiff Testing Machine. Beijing: Coal Industry Press. 1985 (in Chinese))
- 11 Hudson JA, Grouch SL, Fairhurst C. Soft, stiff and servo-controlled testing machines. *Eng Geol*, 1972, 6(3): 155~189

NUMERICAL SIMULATION OF FAILURE PROCESSES IN 3-D HETEROGENEOUS BRITTLE MATERIAL

Chen Yongqiang Zheng Xiaoping Yao Zhenhan

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract In this paper, a numerical approach based on FEM is developed to simulate the macroscopic equivalent mechanical properties and fracture process in three-dimensional heterogeneous brittle materials for both compressive and tensile cases.

The lattice model is adopted to divide the specimen into 3-D uniform lattice. The material in each element is treated as homogeneous. The elastic constants and failure strength are randomly allocated according to some known statistical distribution to reflect the initial heterogeneity of

distribution of material properties. Since in each load-step stage the problem is linear a self-adaptive loading method is adopted, which may automatically determine the size of displacement load-step so that only as less elements as possible fail in each load step. Displacement-controlled load are acted on the specimen and the element is considered broken by making the Young modulus very flexible when the maximum tensile principal stress computed at an element exceeds the tensile strength. The specimen is considered totally fractured if its resultant force at any cross-section reaches a value most close to zero.

The uniaxial tension test of specimen with rectangular cross-section is considered as an example of application. The initial heterogeneity of modulus and strength are simulated by normal distribution and Weibull distribution. The numerical simulation results indicate that the equivalent Young modulus and bearing capacity increase with the decrease of the heterogeneity, this illustrating the well known phenomenon that mechanical properties of practical material are always more inferior to theoretical ones; the failure processes of two kinds of random fields are surprisingly different. The normal distribution makes the failure process rather brittle while the Weibull distribution is very suitable to simulate the “strain-softening” phenomenon. The non-linear macroscopic stress-strain curves obtained by the method presented in this paper are in good agreement with data concerning “strain softening” phenomenon presented in references, which shows that the heterogeneity of material properties is a cause responsible for strain softening. And the more inhomogeneous the distribution of material properties, the more obvious the phenomenon of strain softening and the higher the residual strength after peak load. Most dissipated energy is distributed in stages after peak load, so the heterogeneity is helpful to prevent structures from paroxysmal failure and play a role in protections. Several 3-D visual appearances of fracture patterns are also presented, i.e. apart fracture patterns in 392nd and 425th load-step and the ultimate fracture patterns.

We can expect that the present analysis method may shed new light on some promising fields, such as strength analysis of structural components, optimization and design of composite materials, stability and safety of underground opening engineering, etc.

Key words 3-D heterogeneity, fracture process, lattice model, statistical methods, numerical simulation