第 34 卷 第 2 期 力 学 学 报 Vol. 34, No. 2
2002 年 3 月 ACTA MECHANICA SINICA March, 2002

范式理论与平均法的等价性分析 1)

张伟亿 *† 叶 敏 * K. Huseyin†

*†(天津大学力学系，天津 300072)

†(Department of Systems Design Eng., University of Waterloo)

摘要 分析了范式理论与平均法的等价性. 得到的结论是：对含有一对纯虚根的二维非线性系统，使用两种方法得到的结果是等价的，并提供了两个算例来证实其结论的正确性. 虽然分析是针对一类二维非线性系统，但其结论同样适合于高维非线性系统.

关键词 范式理论，平均法，等价性，高维系统

引 言

多年来，平均法 [1,2] 和范式理论 [3,4] 一直是人们用来分析非线性系统的有效工具. 它们都可以用来把一个非线性系统变换成一定的 “简化” 形式. 习惯上，人们把用平均法简化的结果称之为 “标准方程”，而把用范式理论简化的结果，称之为 “范式”. 因为标准方程与范式都满足共振关系，因此他们在形式上是完全一致的. 已有算例表明，对同一个非线性系统，用这两种方法分析得到的标准方程和范式，其对应的系数也是一致的. 因此，人们自然会提出一个问题，这两个方法本身是否等价？到目前为止，还没有任何严格的证明 [5~7]. 文献 [5] 虽然给出了一个分析结果，说明用两种方法得到的结果具有同样的形式，但未涉及对应系数是否等价.

本文研究了一类线性部分具有一对纯虚根的二维非线性系统. 得到的结论是：用两种方法分析同一个问题，在其阶数大于 6 时，得到的结果从形式上看是不一致的，但两者之间可以通过一个接近恒同的变换，使其具有完全相同的结果. 因此，两种方法是本质性等价的. 本文虽然只讨论了一类线性部分具有一对纯虚根的二维非线性系统，但此分析可以推广到其它具有相应特征根特性的高维非线性系统. 文中提供了一个具体例子来说明这个结论.

1 等价性分析

首先给出平均法与范式理论的某些结果，考虑如下方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \sum_{i=2}^{k} \boldsymbol{F}^i(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{x} = (x_1\ x_2)^{\mathrm{T}} \in C^2$, $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(i\omega, -i\omega)$；$\boldsymbol{F}^i \in H_2^i$, H_2^i 是双变量的 i 阶齐次多项式空间.

用平均法分析方程 (1). 先对方程 (1) 进行尺度变换 $\boldsymbol{x} = \varepsilon \boldsymbol{x}$，然后进行如下变换

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{y} \tag{2}$$

2000–07–12 收到第一稿，2001–09–20 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10072037) 和加拿大 NSERC 资助项目.

以及

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}+\sum_{m=1}^{k}\varepsilon^m\boldsymbol{\phi}_m(\boldsymbol{z},t) \tag{3}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{z}}=\sum\limits_{m=1}^{k}\varepsilon^m\boldsymbol{Z}_A^m(\boldsymbol{z})$ ， ε 是小参数. 代入方程 (1) 后展开，比较两边 ε^r 的同阶系数，则有

$$\varepsilon^r:\quad \boldsymbol{Z}_A^r(\boldsymbol{z})+\frac{\partial\boldsymbol{\phi}_r}{\partial t}=\boldsymbol{f}_A^{r+1}(\boldsymbol{z},t),\quad r=1,\cdots,k-1 \tag{4}$$

其中， $\boldsymbol{Z}_A^r(\boldsymbol{z}),\boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{z},t),\boldsymbol{f}_A^{r+1}(\boldsymbol{z},t)$ 都是关于 $\boldsymbol{z}$ 的 $r+1$ 阶齐次式 [8].

用范式理论 [8,9] 分析方程 (1). 对方程 (1) 进行如下一系列接近恒同的变换，

$$\boldsymbol{y}_{s-1}=\boldsymbol{y}_s+\boldsymbol{P}^s(\boldsymbol{y}_s),\quad \text{其中 } \boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{x},\quad s=2,3,\cdots,k \tag{5}$$

假设第 $s-1$ 次变换后的方程为

$$\dot{\boldsymbol{y}}_{s-1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_{s-1}+\sum_{i=2}^{s-1}\boldsymbol{F}_{i-1}^i(\boldsymbol{y}_{s-1})+\sum_{i=s}^{k}\boldsymbol{F}_{s-2}^i(\boldsymbol{y}_{s-1}) \tag{6}$$

对上式进行第 s 次变换， $\boldsymbol{y}_{s-1}=\boldsymbol{y}_s+\boldsymbol{P}^s(\boldsymbol{y}_s)$ ，得到

$$\dot{\boldsymbol{y}}_s=(\boldsymbol{I}+D\boldsymbol{P}^s)^{-1}\tilde{\boldsymbol{F}}_{s-1} \tag{7}$$

其中， $\tilde{\boldsymbol{F}}_{s-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}_s+\boldsymbol{P}^s(\boldsymbol{y}_s))+\sum\limits_{j=2}^{k}\boldsymbol{F}_{s-2}^j(\boldsymbol{y}_s+\boldsymbol{P}^s(\boldsymbol{y}_s))$. 而第 s 次接近恒同的变换函数向量可以由下式求得 [8,9]

$$\boldsymbol{P}^s(\boldsymbol{y}_s)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{m+n=s,\delta-\lambda_1\neq0}\dfrac{1}{\delta-\lambda_1}a_{mn}^{s-2}y_{s1}^m y_{s2}^n\\ \sum\limits_{m+n=s,\delta-\lambda_2\neq0}\dfrac{1}{\delta-\lambda_2}a_{mn}^{s-2}y_{s1}^m y_{s2}^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sum\limits_{m+n=s,\delta-\lambda_1=0}c_{mn}^{s-2}y_{s1}^m y_{s2}^n\\ \sum\limits_{m+n=s,\delta-\lambda_2=0}d_{mn}^{s-2}y_{s1}^m y_{s2}^n\end{pmatrix} \tag{8}$$

其中， $\delta=m\lambda_1+n\lambda_2$ ； $a_{mn}^{s-2},b_{mn}^{s-2}$ 是经过第 $s-2$ 次变换后的方程中的第 s 阶函数向量 $\boldsymbol{F}_{s-2}^s$ 的系数. 在实际计算时，为了简便，取 $c_{mn}^{s-2}=d_{mn}^{s-2}=0$. 同时可得 [8,9]

$$\boldsymbol{G}_{NF}^s(\boldsymbol{z})+\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{P}^s(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{z}))=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{F}_{s-2}^s(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{z}) \tag{9}$$

其中， $\boldsymbol{y}_s=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{z}$ ， $s=2,\cdots,k$.

我们知道

$$\boldsymbol{Z}_A^{r-1}=\underset{t}{M}\{\boldsymbol{f}_A^r\},\qquad \boldsymbol{G}_{NF}^r=\underset{t}{M}\{\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{F}_{r-2}^r(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t})\} \tag{10}$$

即 r 阶范式 $\boldsymbol{G}_{NF}^r$ 与标准方程 r 阶项 $\boldsymbol{Z}_A^{r-1}$ 都满足如下共振方程 [8,9]

$$m\omega_1+n\omega_2-\omega_k=0 \tag{11}$$

其中 $\omega_k=\omega_1,\ \omega_2$ ； $\underset{t}{M}\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t)\}$ 表示对函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t)$ 的时间平均，即 $\boldsymbol{f}$ 中不显含时间的项. 比较用两种方法得到的结果式 (4) 与式 (9) ，可以看出两者的确具有一定的相似性.

经过直接代入比较后发现：在阶数小于等于 5 时，两种方法得到的结果完全一致，而在阶数大于 6 时，对很多系统，用两种方法得到的结果并不一致 [10].

下面分析在阶数大于 6 时，两个结果之间的关系. 依次进行变换式 (5)，使 s 从 2 到 k，可以得到其对应的 k 阶范式方程为

$$\dot{\boldsymbol{y}}_k = (\boldsymbol{I} + D\boldsymbol{P}^k)^{-1}(\boldsymbol{I} + D\boldsymbol{P}^{k-1})^{-1}\cdots(\boldsymbol{I} + D\boldsymbol{P}^3)^{-1}(\boldsymbol{I} + D\boldsymbol{P}^2)^{-1}\tilde{\boldsymbol{F}}_{k-1} \tag{12}$$

方程 (5) 中包含了一系列的变换，可以证明其可以用一个变换来表达，假设其形式为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}_k + \boldsymbol{Q}^2(\boldsymbol{y}_k) + \boldsymbol{Q}^3(\boldsymbol{y}_k) + \cdots \boldsymbol{Q}^k(\boldsymbol{y}_k) \tag{13}$$

其中， $\boldsymbol{Q}^2 = \boldsymbol{P}^2, \boldsymbol{Q}^3 = \boldsymbol{P}^3, \boldsymbol{Q}^4 = \boldsymbol{P}^4 + D\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{P}^3, \cdots$. 由此可以得到下面的结论：

结论 1 对任意的 m 有

$$(\boldsymbol{I} + D\boldsymbol{Q}^2 + D\boldsymbol{Q}^3 + \cdots + D\boldsymbol{Q}^m)^{-1} = (\boldsymbol{I} + D\boldsymbol{P}^m)^{-1}\cdots(\boldsymbol{I} + D\boldsymbol{P}^3)^{-1}(\boldsymbol{I} + D\boldsymbol{P}^2)^{-1} \tag{14}$$

证明略.

结论 2 对任意的 m， $m = 2, \cdots, k$，有

$$\boldsymbol{G}_{NF}^m = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\overline{\overline{\boldsymbol{F}}}_m(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{z}) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{Q}^m(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{z})) - \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\sum_{i+j=m+1} D\boldsymbol{Q}^i\boldsymbol{G}^j \tag{15}$$

其中， $\overline{\overline{\boldsymbol{F}}}_m$ 是对方程 (1) 中右端非线性函数项 $\sum\limits_{i=2}^{k}\boldsymbol{F}^i$ 进行 (13) 式变换后所有的 m 阶单项式.

证明略.

利用如下恒等式

$$(\boldsymbol{I} + D\boldsymbol{Q}^2 + \cdots + D\boldsymbol{Q}^m)^{-1} = \boldsymbol{I} - (D\boldsymbol{Q}^2 + \cdots + D\boldsymbol{Q}^m)(\boldsymbol{I} + D\boldsymbol{Q}^2 + \cdots + D\boldsymbol{Q}^m)^{-1}$$

以上两个结论是不难得到的.

2 结果与讨论

可以证明 [8,9]，第 m 阶范式表达式 (15) 可以表示为

$$\boldsymbol{G}_{NF}^m(\boldsymbol{z}) = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\overline{\overline{\boldsymbol{F}}}_m(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{z}) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{Q}^m(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{z})) - \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\sum_{i+j=m+1} D_z\boldsymbol{Q}^i(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{z})\boldsymbol{G}_{NF}^j(\boldsymbol{z}) \tag{16}$$

在平均法结果 (4) 中，$\boldsymbol{f}_A^m = \bar{\bar{\boldsymbol{f}}}^m - \sum\limits_{i+j=m-1, j\geq 1} D\boldsymbol{\phi}_i\boldsymbol{Z}_A^j$，其中，$\bar{\bar{\boldsymbol{f}}}^m$ 是 $\sum\limits_{n=2}^{k}\varepsilon^{n-1}\boldsymbol{f}^n(\boldsymbol{z} + \sum\limits_{i=1}^{s}\varepsilon^i\boldsymbol{\phi}_i, t)$ 中 ε^{m-1} 的系数, 也就是关于 $\boldsymbol{z}$ 的 m 阶齐次式. 若取 $\boldsymbol{\phi}_{m-1} = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{Q}^m(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{z})$， $m = 2, 3, \cdots, k$，比较方程 (4) 与 (16) 有： $\boldsymbol{G}_{NF}^m = \boldsymbol{Z}_A^{m-1}, m = 2, \cdots, k$. 因此，可得如下结论：

定理 对任意的 m，若取 $\boldsymbol{\phi}_{n-1} = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{Q}^n(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{y}), n = 2, 3, \cdots, m$，则范式理论与平均法是等价的.

我们很容易得到关系式

$$\boldsymbol{G}_{NF}^m = \mathrm{e}^{-At}\boldsymbol{F}_{m-2}^m(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{z}) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{P}^m(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{z})) = \boldsymbol{f}_A^m - \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{Q}^m\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t})$$

因此有

$$\boldsymbol{f}_A^m = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{F}_{m-2}^m(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{z}) + \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{Q}^m(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{z}) - \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{P}^m(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{z}))$$

易验证，当 $m>4$ 时， $\boldsymbol{Q}^m \neq \boldsymbol{P}^m$ ，所以在 $m>4$ 时，有 $\boldsymbol{f}_A^m \neq \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{F}_{m-2}^m(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t})$. 而当 $m>6$ 时，变换函数 $\boldsymbol{Q}^m$ 中含有共振单项式. 因此，在阶数 $m>6$ 时

$$\underset{t}{M}\{\boldsymbol{f}_A^m\} \neq \underset{t}{M}\{\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{F}_{m-2}^m(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t})\}$$

通常在应用范式理论时, 为了简便, 在方程 (8) 中, 设: $c_{mn}^{s-2} = d_{mn}^{s-2} = 0$; 即假设变换函数 $\boldsymbol{P}^s$ 不含共振单项式, 如果不作此假设, 则可找到一个接近恒同的变换 $\varPhi_m$, 使得 $\boldsymbol{\phi}_{m-1} = \varPhi_m + \boldsymbol{Q}^m$. 而这个变换的存在使得我们可以把通常情况下用范式理论与平均法得到的不同形式的两个解, 用一个接近恒同的变换相互联系起来；也就是说两个解之间可以通过变换关系，相互转换. 因此两者是等价的.

例　比较如下系统的范式方程以及标准方程

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{v}, \qquad \dot{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{u}^2\boldsymbol{v} \tag{17}$$

将以上方程变换为如下复数座标方程

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{F}^3(\boldsymbol{z}) \tag{18}$$

其中， $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(i,-i)$; $\boldsymbol{z} = (z_1\ z_2)^{\mathrm{T}}$, 而 $z_2 = \bar{z}_1$.

用范式理论 [9] 分析方程 (18) ，得到其对应的前 11 阶范式为

$$\left.\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= iz_1 + \frac{1}{8}az_1^2z_2 - \frac{11}{256}ia^2z_1^3z_2^2 + \frac{13}{8\,192}a^3z_1^4z_2^3 - \frac{1\,321}{786\,432}ia^4z_1^5z_2^4 + \frac{7\,727}{18\,874\,368}a^5z_1^6z_2^5\\
\dot{z}_2 &= -iz_2 + \frac{1}{8}az_2^2z_1 + \frac{11}{256}ia^2z_2^3z_1^2 + \frac{13}{8\,192}a^3z_2^4z_1^3 + \frac{1\,321}{786\,432}ia^4z_2^5z_1^4 + \frac{7\,727}{18\,874\,368}a^5z_2^6z_1^5
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

用平均法分析方程 (18) ，引入小参数，方程 (18) 变为如下形式

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \varepsilon^2\boldsymbol{F}^3(\boldsymbol{x}) \tag{20}$$

分析上式，得到其对应的前 11 阶标准方程为

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= ix_1 + \frac{1}{8}ax_1^2x_2 - \frac{11}{256}ia^2x_1^3x_2^2 + \frac{13}{8\,192}a^3x_1^4x_2^3 - \frac{3\,319}{786\,432}ia^4x_1^5x_2^4 + \frac{2\,035}{37\,748\,736}a^5x_1^6x_2^5\\
\dot{x}_2 &= -ix_2 + \frac{1}{8}ax_2^2x_1 + \frac{11}{256}ia^2x_2^3x_1^2 + \frac{13}{8\,192}a^3x_2^4x_1^3 + \frac{3\,319}{786\,432}ia^4x_2^5x_1^4 + \frac{2\,035}{37\,748\,736}a^5x_2^6x_1^5
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

显然，对于这个系统，两种方法的结果在前 7 阶完全相同，大于 7 阶以后其系数不同. 进一步的分析表明，两个解之间可以通过如下的变换关系，相互转化.

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= z_1 + \frac{333}{16\,384}ia^3z_1^4z_2^3 - \frac{181}{131\,072}a^4z_1^5z_2^4\\
x_2 &= z_2 - \frac{333}{16\,384}ia^3z_2^4z_1^3 - \frac{181}{131\,072}a^4z_2^5z_1^4
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

参 考 文 献

1 Minorsky N. Nonlinear Oscillations. D.Van Nostrand Company, INC, 1962
2 Nayfeh AH. Method of Normal Form. New York: John Wiley and Sons, 1993
3 Arnold VI. Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag, 1983
4 Chow SN, Li CZ, Wang D. Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields. Cambridge: Cambridge University Press, 1994
5 Sethna PR. On Averaged and Normal Form Equations. *Nonlinear Dynamics*, 1995, 7: 1
6 Golubitsky M, Stewart I, Schaeffer DG. Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol.2. Springer-Verlag, 1985
7 Mitropolsky YA, Lopatin AK. Nonlinear Mechanics, Groups and Symmetry. Kluwer Academic Publishers, 1995
8 张伟亿. 区域平均法、改进的范式理论及其在分叉、混沌中的应用. 天津大学博士论文, 1991 (Zhang WY. The regional averaging method, modified normal form approach and their applications in the analysis of bifurcation and chaos. Ph. D. Thesis of Tianjin University, 1991 (in Chinese))
9 Zhang WY, Huseyin K, Chen YS. A new approach for obtaining normal form of nonlinear systems. *Journal of Sound & Vibration*, 1998, 210: 609
10 Zhang WY, Huseyin K, Ye M. On the computation of the coefficients associated with high order normal forms. *Journal of Sound & Vibration*, 2000, 232(3): 493~509

A COMPARISON OF THE METHODS OF NORMAL FORMS AND AVERAGING [1)]

Zhang Weiyi*† Ye Min* K. Huseyin†

*(*Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin* 300072, *China*)

†(*Department of Systems Design Eng., University of Waterloo*)

Abstract In this paper, a comparative study of the methods of averaging and normal forms is presented. The similarities and differences of these methods are discussed.

It is noted that certain basic differences do exist between these methods. The method of normal forms, for example, aims at simplifying the governing differential equations, while the averaging method leads to ordered approximations for solutions as well as simplifying the equations.

It is shown in this paper that the methods of normal forms and averaging produce identical results in lower order. However, the results obtained by the methods of normal forms and averaging are apparently different for some higher order. It is noted here that the normal form of a system is not unique and one can always find a near identity transformation that results in identical forms. Thus it is demonstrated in this paper that both methods lead to identical results, including the formal normal form as well as the associated coefficients. The illustrative examples are analyzed to support the conclusions.

The analysis is carried out with regard to a two dimensional system with an imaginary pair; however, the results can be extended to higher dimensional systems.

Key words normal form theory, averaging method, equivalence, high dimensional systems

Received 12 July 2000, revised 20 September 2001.

1) The project supported by the NNSFC (10072037) and NSERC of Canada.