

二阶流形元法与结构变形分析

张国新 彭 静

(中国水利水电科学研究院, 北京 100038)

摘要 在原有—阶流形元法的基础上开发了二阶流形元法数值仿真模型和相应的计算程序, 并给出了计算实例. 结果表明, 二阶流形元法可以以较高的精度分析一般结构的变形和接触应力问题, 对大变形问题独有优势, 并能很好地模拟不连续介质的破坏过程及块体破坏后的运动.

关键词 流形元法, 二阶精度, 应力分布, 大变形, 接触, 块体运动

引 言

许多工程结构中会有不连续面的存在. 不连续面有的是根据构造的需要设置的, 有的则是源于加工缺陷或在使用过程中产生的损伤或破坏. 不连续面的存在使结构体的物理力学特性变得复杂, 同时也大大地增加了数值分析的难度. 传统方法中的有限单元法和边界元法, 虽然可以较精确地分析结构内部的应力和变形, 但难以处理多裂隙等不连续问题和结构破坏后块体的运动. DEM^[1] 和 DDA^[2] 等不连续方法虽然可很好地模拟结构中块体的运动及块体、不连续面之间的接触, 但由于在数值模拟时将每一个块体作为一个单元, 难以给出理想的应力分布. 因此对于含有大量节理裂隙的不连续结构, 这两类方法都难以给出理想的结果.

流形元法是近几年发展起来的一种新的数值计算方法. 该方法以其独特的网格处理技术和接触处理方式, 使其既可以像有限元法那样精确地分析结构变形及应力特性, 又可以像不连续变形解析法 (DDA) 那样完整求解不连续介质的变形及块体的运动. 石根华于 1991 年提出的流形元法^[3,4], 将基于连续力学的有限单元法和基于不连续解析方法的 DDA 结合起来, 分析结构体的应力分布特性和破坏之后的块体运动规律, 具有很强的适应性. 在继承了 DDA 的接触机制和块体定义方法 (即物理网格) 的基础上, 流形元法设置了专门用于定义块体内部插值函数的数学网格. 这样, 流形元法不仅可以像 DDA 那样有效地模拟不连续面的接触和块体的运动, 而且可以像有限元法那样精确地求解块体内部的应力分布.

石根华提出的流形元法及其开发的模型采用的是一阶位移函数, 位移及应力的精度有时不能满足要求. 为此本文提出了两阶流形元法, 并开发了相应模型. 本文给出的几个计算实例, 表明了二阶流形元法在各个领域结构变形分析中广泛的应用前景.

1 流形元法的基本概念

1.1 Cover 和两套网格

流形元法提出了 Cover 的概念并使用了两套网格, 也可以称之为两层网格. 这是流形元法与有限元法的最大区别. Cover 用以定义各个区域的局部函数, 每个 Cover 覆盖着一个固定

的区域, 该区域的大小、形状可以根据实际问题任意选择. Cover 之间可以互相重叠, 所有的 Cover 覆盖了整个物理区域. 两套网格是指物理网格和数学网格. 物理网格由定义材料区域和不连续面的曲线即物理边界和节理裂隙组成, 用以定义所分析的问题的物理区域和积分领域. 数学网格则是在物理网格之上贴上一层规则或不规则的、用以定义 Cover 的闭合曲线, 同时用来定义插值函数. 数学网格的定义可以和 Cover 一样任意选择, 只要能够覆盖整个物理区域即可. 覆盖一个完整 Cover 的闭合区域又称为一个数学 Cover.

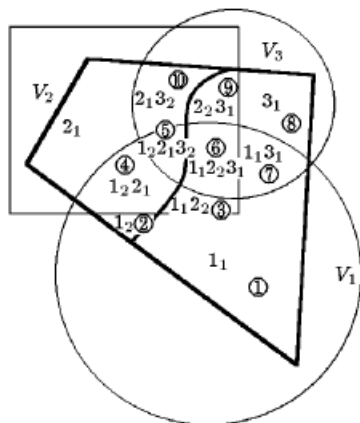


图 1 Cover 与网格系统

Fig.1 Cover and mesh system

数学 Cover 与物理边界相交, 形成物理 Cover. 如果一个数学 Cover 被物理边界切割成数块, 则每一块称为一个物理 Cover, 每一个物理 Cover 上需要定义一个局部函数.

图 1 可以用来说明上面介绍的流形元法基本概念. 图 1 中的粗线为物理网格, 即物理边界和不连续面, 定义了问题的物理领域. 细线为数学网格, 定义了三个数学 Cover, 其中两个圆形 Cover V_1 , V_2 和一个矩形 Cover V_3 . 物理网格将数学 Cover V_1 切割成两个物理 Cover 1_1 , 1_2 , 将 V_2 切成两个物理 Cover 2_1 , 2_2 , 将 V_3 切成 3_1 , 3_2 . 物理网格和数学网格互相切割, 共形成 11 个单元: ①, ②, ③... 等. 各个单元的物理特性用覆盖该单元的所有物理 Cover 定义, 分别为: 1_1 , 1_2 , $1_1 2_2$, $1_2 2_1$, ..., 2_1 等.

使用有限元网格的流形元法, 其数学网格与有限元法的计算网格相同, 但在节点及单元的定义上有所区别. 有限单元法中的节点必须位于物理域内或边界上, 而流形元法中的节点则可以定义在物理区域之外. 有限单元法中的一个单元的物理领域与构造插值函数的插值领域必须一致, 而在流形元法中, 单元的物理领域与插值网格可以完全分离, 只要插值网格完全覆盖物理领域即可. 有限元法中的单元必须是规则的, 而流形元法中的单元形状可以任意, 因为流形元法使用单纯形积分法 (Simplex Integration)^[5], 对单元形状没有要求.

1.2 局部函数和整体函数

流形元法在每一个物理 Cover 上必须定义一个局部函数. 一般意义上的流形元法的局部函数可根据具体问题任意定义, 可为常量、线性函数、高次函数, 或是满足该领域解的解析函数. 用权函数将局部函数联系起来, 就定义了整个物理领域上的整体函数. 设物理 Cover U_i 上的局部函数为

$$u_i(x, y), \quad (x, y) \in U_i$$

则整体函数可用权函数 $w_i(x, y)$ 定义为

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n w_i(x, y) u_i(x, y) \quad (1)$$

其中

$$w_i(x, y) \geq 0, \quad (x, y) \in U_i; \quad w_i(x, y) = 0, \quad (x, y) \notin U_i; \quad \sum_{(x, y) \in U_i} w_i = 1$$

采用如上局部函数和权函数所定义的整体函数, 流形元法可以用来解决变形、接触、块体运动等各种问题.

2 二阶流形元法

二阶流形元法的构筑有两种方式: (1) 使用线性 Cover 函数和线性权函数; (2) 使用常数 Cover 函数和二阶权函数. 在构造位移函数方面, 有限元法已有丰富成熟的经验^[6]. 本文借鉴有限单元法的二阶位移函数的构造方法, 用 6 节点三角形构成数学网格, 用常数 Cover 函数和二阶权函数构成二阶流形元法的位移函数.

2.1 位移函数

将位移函数取为完全二阶函数

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + b_1x + c_1y + d_1x^2 + e_2xy + g_1y^2 \\ v(x, y) &= a'_1 + b'_1x + c'_1y + d'_1x^2 + e'_2xy + g'_1y^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中, $a_1, b_1, c_1, \dots, a'_1, b'_1, c'_1, \dots$ 为构成位移函数的系数, x, y 为位于三角形之内的坐标值. 设数学网格上一个基本三角形的节点位移为 $\delta = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ \dots \ u_6 \ v_6\}^T$, 由数学网格上的 6 个节点的坐标及已知位移值, 可求出位移函数中的各系数. 用节点坐标和节点位移构造数学单元内部的位移函数为

$$\left\{ \begin{aligned} u(x, y) \\ v(x, y) \end{aligned} \right\} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & w_2 & 0 & \dots & w_6 & 0 \\ 0 & w_1 & 0 & w_2 & \dots & 0 & w_6 \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_6 \\ v_6 \end{aligned} \right\} = T(x, y)\delta^e \quad (3)$$

其中

$$(w_1 \ w_2 \ \dots \ w_6) = (1 \ x \ y \ xy \ x^2 \ xy \ y^2) \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6y_6 & y_6^2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (4)$$

这里, $T(x, y)$ 为权函数矩阵, 与有限单元法中的形函数是一致的. 由以上方法构成的位移函数, 满足收敛的三个充分必要条件, 即 (1) 位移函数中包含刚体位移, (2) 单元应变中包含常应变, (3) 同一连通域内的相邻单元的交界处位移连续. 因此解的收敛性可以得到保证.

2.2 瞬时平衡方程

流形元法所使用的方程为结构动力学方程

$$M\ddot{\delta} + C\dot{\delta} + K\Delta\delta = \Delta F \quad (5)$$

其中: M 为质量矩阵, C 为阻尼矩阵, $\Delta\delta$ 为位移增量, $\dot{\delta}$, $\ddot{\delta}$ 分别是位移速度和加速度. $K = K_e + K_{cn} + K_{cs} + K_f$, K_e 是刚度矩阵, K_{cn} , K_{cs} 分别为块体及不连续面之间的接触矩阵, K_f 是约束矩阵. ΔF 为总荷载增量, $\Delta F = F_p + F_b + F_f - F_0 + F_{cn} + F_{cs} + F_{fr}$, F_p 是外荷载向量, F_b 为体积力向量, F_f 是已知位移约束引起的等效荷载向量, F_0 为初应力向量, F_{cn} , F_{cs} 分别为法向和切向接触引起的等效荷载向量, F_{fr} 为接触面之间的摩擦力引起的等效荷载向量. 各矩阵及向量的具体算法, 可参阅有关文献^[3~5].

3 动力学方程的求解

方程 (5) 可用 Newmark 法求解^[7]. 设

$$\left. \begin{aligned} \delta_{t+\Delta t} &= \delta_t + \dot{\delta}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\delta}_t + \alpha \ddot{\delta}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \\ \dot{\delta}_{t+\Delta t} &= \dot{\delta}_t + [(1-\beta)\dot{\delta}_t + \beta\dot{\delta}_{t+\Delta t}] \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中, α, β 为两个插值函数, $\beta = 0.5, \alpha \geq 0.25(0.5 + \beta)$.

将式 (6) 代入动力学方程 (5) 得

$$\tilde{K}\Delta\delta = \tilde{F} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \frac{1}{\alpha\Delta t^2}M + \frac{\beta}{\alpha\Delta t}C + K \\ \tilde{F} &= \Delta F + \left[\left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\delta}_t + \frac{1}{\alpha\Delta t} \dot{\delta}_t \right] M + \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \dot{\delta}_t + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \ddot{\delta}_t \right] C \end{aligned}$$

以上为动力学问题的求解方法. 对于静力学问题, 只需将方程 (7) 的等效刚度矩阵中的质量与阻尼项去掉, 将等效荷载中的阻尼力去掉即可. 但需保留惯性力, 以保证结构破坏后计算仍可进行.

4 应用实例

4.1 一般应力与变形问题

内径为 a 外径为 b 的圆环, 受内压 p 作用. 用不同密度的网格 (图 2) 取圆环的二分之一对该问题进行数值计算, 并将结果与解析解比较, 以检验二阶流形元法的收敛性, 并与一阶流形元结果比较. 该问题的解析解为^[8]

$$\sigma_{\theta\theta} = p \frac{(b^2/r^2) + 1}{(b^2/a^2) - 1}$$

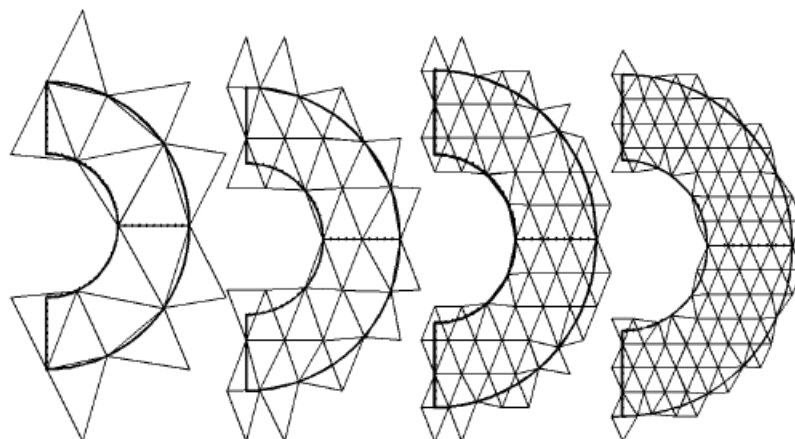


图 2 不同密度的网格剖分

Fig.2 Different calculation mesh

图 3 给出了沿半径方向环向应力分布的计算结果和解析解的比较. 由图可以看出, 随着网格的加密, 计算结果逐渐接近理论解. 当沿半径方向划分 4 个单元时, 计算结果已基本与解析解吻合. 本例说明了二阶流形元法良好的收敛特性. 图中同时给出了一阶流形元结果, 比较结果表明, 一阶结果的精度要远低于二阶精度.

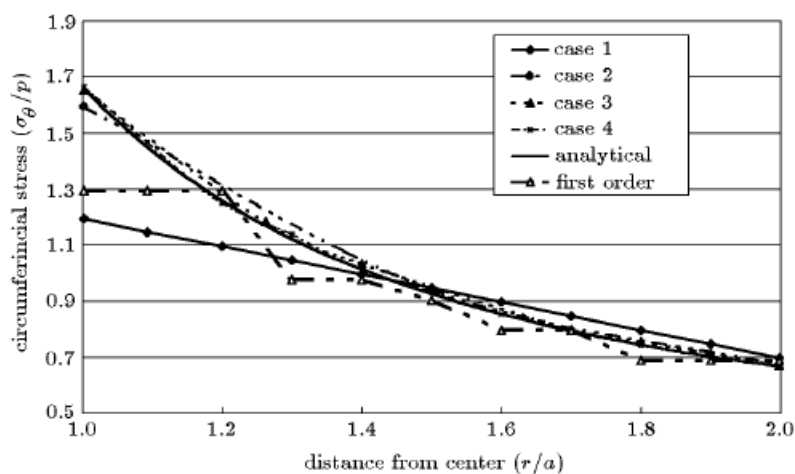


图 3 环向应力分布比较

Fig.3 Comparison of circumferential stress

4.2 大变形问题

方程 (7) 是按分步迭代法求解的. 计算时每一步限制其最大位移, 以保证每一步计算中满足小变形准则. 在每一步计算之后, 将位移叠加到节点坐标上形成变形后的新的节点坐标. 这样每一步计算均为小变形, 叠加之后成为大变形, 因而流形元法可以用来计算大变形问题.

图 4 为悬臂梁在均布荷载作用下的变形问题. 材料的弹性模量为 $E = 1200 \text{ MPa}$, 波桑比为 $\nu = 0.2$. 计算了两种荷载工况, 一种是荷载始终保持铅垂方向, 即荷载的方向不依赖于

梁的变形. 另一种为荷载始终垂直于梁的表面, 即是跟随荷载. 梁右端挠度的计算结果与解析解^[10]、大变形有限元结果^[11]及一阶流形元结果比较见图 4. 由图 4 可以看出, 二阶流形元法的结果与解析解及有限元法结果吻合很好. 一阶流形元的结果与精确解有较大偏离.

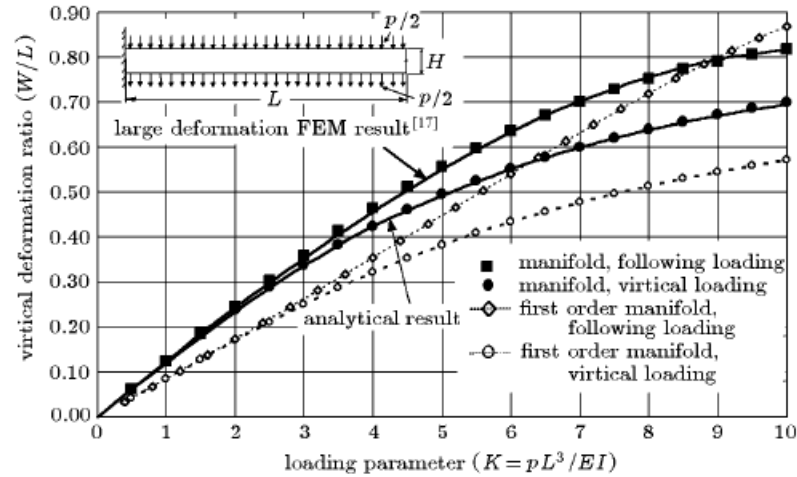


图 4 流形元法计算结果与解析解、有限元解的比较

Fig.4 Comparison of manifold result with analytical and FEM solutions

4.3 接触问题

二阶流形元法的另一个重要应用是分析接触问题. 图 5 为一半径 $r = 1\text{m}$ 的圆柱体在两个大刚性板挤压下的变形及接触问题. 板和圆柱的材料常数及计算中所用的各项参数见表 1. 下板的底面为固定约束, 上板的顶面给定匀速向下的位移, 以向圆柱施加压力. 加载速度为 1cm/s . 图 5(b), 图 5(c), 图 5(d) 分别为顶板位移为 0.1m , 0.5m 和 0.8m 时的圆柱变形.

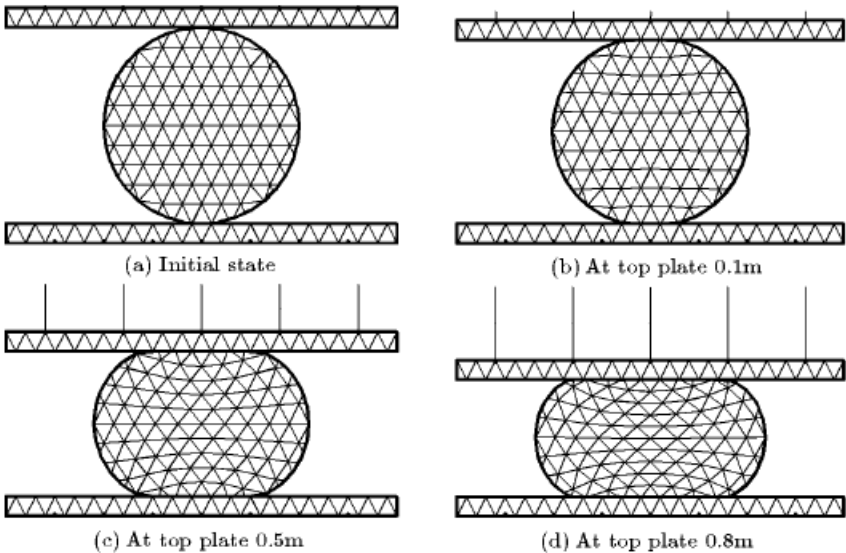


图 5 受两个刚性板挤压时圆柱的变形

Fig.5 Cylinder deformation by pressure of rigid plates

表 1 计算参数

Table 1 Calculation parameters

	Elasticity (MPa)	Possion's ratio	Penalty /kN·m ⁻¹
plate	1 000	0.25	1 960 000
cylinder	1	0.25	1 960 000

图 6 给出了不同加载阶段板与圆柱间的接触应力分布, 同时给出了顶板位移为 0.4m 时根据 Hertz 解^[9] 算出的接触应力分布形式. 比较结果表明, 流形元法的计算结果与 Hertz 解析解在分布形式上是一致的. 但计算的接触应力分布曲线不很光滑, 尤其是在荷载水平较小时. 原因有两方面, 一是圆形截面用多边形近似, 其周边不光滑. 另外在两个单元的交界处应力不连续. 这一点与有限单元法相同.

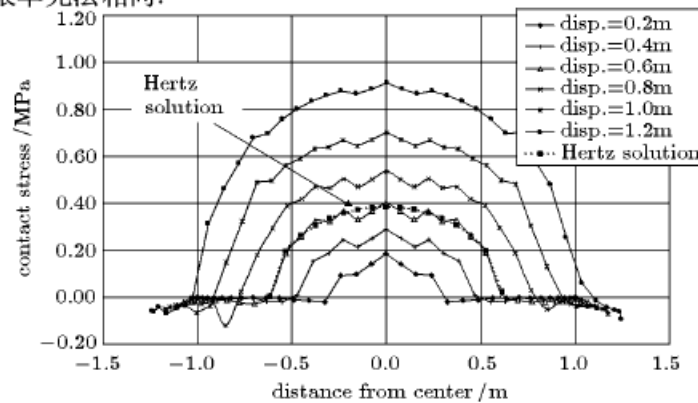


图 6 不同变形水平时接触应力分布

Fig.6 Contact stress at different deformation

4.4 块体运动问题

流形元法所使用的两套网格及其巧妙的接触搜索、处理机构使其可以很容易地处理含有大量不连续面的块体系统的变形及运动问题. 图 7 为一块体边坡沿斜面崩塌破坏的简单的例子.

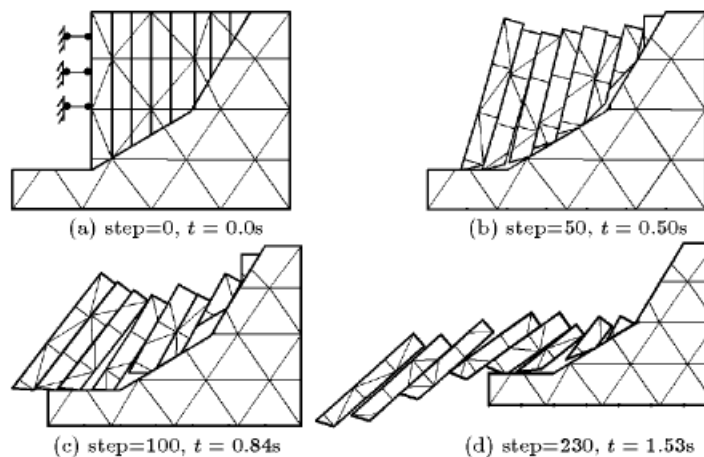


图 7 块体边坡沿斜面的崩塌破坏

Fig.7 Failure of blocks along slope

边坡只受自重荷载作用. 计算参数为: 材料容重 $\rho = 24.5 \text{ kN/m}^3$, 弹性模量 $E = 1000 \text{ MPa}$, 波桑比 $\nu = 0.2$, 弹簧刚度 (Penalty) $p = 9\,800\,000 \text{ kN/m}$, 最大时间步长 $\Delta t = 0.01 \text{ s}$. 初始状态时边坡的左侧墙受到约束, 在 $t = 0.0 \text{ s}$ 时, 将约束突然撤掉, 则边坡在自重作用下开始沿斜面滑动. 图 7(b), 图 7(c) 和图 7(d) 给出了三个不同时刻边坡的滑移动态. 由图可以看出, 二阶流形元法的模拟十分有效而合理.

5 结束语

采用有限元法网格作为数学网格的流形元法, 由于利用了与有限单元法相似的位移函数和能量原理, 使得该方法具有与有限单元法相同的精度. 该方法提出了 Cover 的概念和独特的网格处理方式, 使用独立的两套网格即物理网格和数学网格分别定义物理积分领域和插值函数, 使其可很容易地确定块体与块体之间、不连续面与不连续面之间的相互关系, 并能有效地模拟块体的运动、接触等问题.

本文将一阶流形元法扩展到了二阶精度. 扩展后的流形元法不仅可以以较高的精度求解一般的结构变形、应力问题, 而且还可以很好地模拟大变形及接触应力问题, 特别是对应力和位移要求较高的裂缝扩展和结构体破坏问题. 扩展的二阶流形元法具有很好的适应性, 可以模拟分析结构从受力、变形到破坏运动的全过程. 可以预料, 流形元法将会在结构及基础的变形及破坏分析方面得到广泛应用.

参 考 文 献

- 1 Cundall PA. A computer model for simulating progressive, large scale movements in blocky rock system. ISRM Symposium, Nancy, France, 1971. 11~18
- 2 Shi GH, Goodman RE. Two-dimensional discontinuous deformation analysis. *Int Journal Anal Methods Geomech*, 1985, 9: 541~556
- 3 Shi GH. Manifold method of material analysis, Trans 9th Arma Conf on Appl Math and Comp, Rep No.92-1. U.S.Army Res. Office, 1991
- 4 石根华著, 裴觉民译. 数值流形方法与非连续变形分析. 北京: 清华大学出版社, 1997 (Shi GH. Pei Juemin Trans. Numerical Manifold Method and Discontinuous Deformation Analysis. Beijing: Tsinghua University Press, 1997 (in Chinese))
- 5 Shi GH. Simplex Integration for Manifold Method, FEM and DDA. Discontinuous Deformation Analysis(DDA) and Simulations of Discontinuous Media. TSI Press, 1996. 205~262
- 6 Zienkiewicz OC. The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hall, London, 1971
- 7 Rao SS. The Finite Element Method in Engineering. Pergamon Press, 1982
- 8 Fung YC. Foundation of Solid Mechanics. Published by Prentice-Hall. Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1965
- 9 Hertz H. Uber Die Berugrung fester elastischer Korper. J. F. D. Reine U. Angewandte Math, 1882, 92: 156~171
- 10 Holden JT. On the finite deflections of thin beams. *Int J Solids Struc*, 1972, 8: 1051~1055
- 11 Bathe KJ, Ramm E, Wilson EL. Finite element formulations for large deformation dynamic analysis. *Int J Num Meth Engng*, 1975, 9: 353~386

SECOND-ORDER MANIFOLD METHOD IN STRUCTURE FAILURE ANALYSIS

Zhang Guoxin Peng Jing

(China institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing 100038, China)

Abstract Manifold method (MM) is a newly developed numerical procedure. The method possesses three features. (1) It uses two sets of meshes, namely mathematics meshes and physical meshes. Mathematical meshes are used to define interpolation function. Physical meshes are used to define physical boundary and integration domain. (2) The concept of cover is utilized. Local function at each zone is defined at cover. Each cover covers an enclosed zone. Covers overlap each other and define the global function of the common zone by a weight function. (3) It uses penalty as contact treatment. A unique contact treatment method is developed. By this sort of treating the contact between blocks are able to simulate reasonably. All these features make MM not only be able to accurately analyze the structure failure and stress distribution as FEM, but also to obtain integrally the deformation and block movement of discontinuities as DDA.

Based on the original first-order MM by Shi, this paper presents a second-order MM with detail computational formula, governing equations and numerical codes. Application examples include normal stress distribution and deformation problem, large-scale deformation problem and contact problem. The simulation results are compared with analytical solutions. It shows that the newly developed second-order MM is capable of analyzing structure stress distribution and contact stress problems with relatively high accuracy. A simulation example of slope failure is also given in the paper. Reasonable failure process is obtained.

The extended second order manifold method has good adaptability and can be used to simulate the whole process of structure from loading and deformation to failure and movement of blocks.

Key words manifold method, second-order accuracy, stress distribution, large-scale deformation, contact, block movement