

剪切湍流大尺度相干结构的模式研究¹⁾

符 松 安智勇

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘要 发展了一种计算剪切湍流大尺度相干结构的新模式. 该模式的基础是认为大尺度相干结构为湍流场中流体脉动能量增长最快的那部分, 且包含大部分的湍流脉动能量. 在此基础上, 通过对湍流相干能量方程的推演, 建立了描述大尺度相干结构的特征控制方程, 并应用 Chebyshev 多项式方法求得湍流相干能量的最大增长率在波数空间的分布, 从而获得对应的大尺度相干结构. 应用该模式研究了槽流和一自然对流中的大尺度相干结构, 得到的近壁区流动结构与实验现象十分接近.

关键词 大尺度湍流, 相干结构, 湍流模式

引 言

湍流是自然界和工程问题中最为普遍存在的流体运动形式, 湍流的研究已经持续了一个多世纪, 人们对湍流运动的认识也有了很大的进展^[1]. 从 60 年代末开始, 大量的实验和数值模拟结果表明: 在诸如平板边界层和自由剪切等湍流运动中包含一些有组织的结构, 即我们所说的相干结构或拟序结构. 对湍流中的大尺度结构的发现和研究, 丰富和深化了人们对于湍流机理的认识, 可以说是湍流研究的一个重大发展^[2]. 大尺度结构的发现改变了我们对湍流的传统认识, 即湍流脉动是完全随机过程的观点, 它的存在说明湍流运动实质上包含了某种内在的有序性. 同时, 对大尺度结构的进一步研究表明, 大尺度结构不但包含了相当比例的湍流动能, 而且对湍流动能的产生以及湍流的维持起到主导作用^[3].

尽管大量实验再现了湍流中的大尺度相干结构, 并对此进行了分类, 但是, 人们仍然难于提出一个明确的大尺度相干结构的数学定义, 因而难于直接通过数值模拟获得相应的大尺度相干结构. 应用 Lumley 提出的本征正交分解方法 (Proper Orthogonal Decomposition, 简称 POD), 可以由一组特征函数表示流动中的大尺度相干结构, 并且能够得到关于结构空间发展的信息^[4~6].

本文从湍流大尺度的能量增长率出发, 提出大尺度相干结构与湍流能量的最大增长率相关并受其主宰^[7]. 在槽流问题中, 成功再现了近壁区流场的由纵向涡组成的条带结构, 得到的条带间距与实验数据十分吻合, 大尺度相干结构的速度分布也较 Poje 和 Lumley^[8] 的结果更符合流动实际. 同时, 将相干结构的模式研究扩展到了两垂直平板间的自然对流问题, 得到了十分有意义的结果.

1 相平均流体运动方程

对于不可压黏性流体运动, 无量纲化后的控制方程组, 即连续方程和描述流体动量守恒的

2000-09-04 收到第一稿, 2001-09-08 收到修改稿.

1) 国家杰出青年基金 (19725208) 和国家攀登预选项目资助课题.

Navier-Stokes 方程可表示为

$$\left. \begin{aligned} u_{i,i} &= 0 \\ u_{i,t} + u_j u_{i,j} &= -p_{,i} + \frac{1}{Re} u_{i,jj} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

该方程组在描述湍流时, 对于大雷诺数流动直接数值求解难于实现. 因此, 在解决工程问题时, 对该方程组进行雷诺平均是有效做法, 其缺陷在于不能反映湍流重要的大尺度相干结构. 为了在计算中得到湍流的大尺度相干结构, 在数学表达上不能只将流动基本物理量简单地分解为平均项和脉动项, 而需要采用三项分解, 即将瞬时物理量分为平均项、相干项和相干脉动项. 如对速度和压力的三项分解有

$$\left. \begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, t) &= U_i(\mathbf{x}, t) + v_i(\mathbf{x}, t) + u'_i(\mathbf{x}, t) \\ p(\mathbf{x}, t) &= P(\mathbf{x}, t) + \pi(\mathbf{x}, t) + p'(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中的大写字母表示雷诺平均量 (如时间平均、系综平均等), u' 和 p' 表示相干脉动分量. 在此我们认为相干脉动等同于相脉动, 它的相平均 $\langle u'_i \rangle$ 为零. 因此, 速度的相平均为雷诺平均与相干项之和, 即

$$\langle u_i \rangle = U_i + v_i \quad (3)$$

从严格意义上说, 我们这里的“相干结构”, 实际上描述的是相平均与雷诺平均之差, 它等同于大尺度相干结构的关系将在下一节中给出.

应当指出的是, 雷诺平均项、相干项和相干脉动项在统计上相互独立, 即

$$\langle U_i v_j \rangle = \langle U_i u'_j \rangle = \langle v_i u'_j \rangle = 0$$

由此, 对方程 (1) 分别进行雷诺平均和相平均, 整理后可得到相应的相干速度方程

$$\left. \begin{aligned} v_{i,i} &= 0 \\ v_{i,t} + (U + v)_j v_{i,j} + v_j U_{i,j} &= -\pi_{,i} + \frac{1}{Re} v_{i,jj} + \overline{(v_i v_j)}_{,j} + \tau_{ij,j} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中, $\tau_{ij} = \overline{u'_i u'_j} - \langle u'_i u'_j \rangle$ 为相干雷诺应力.

2 大尺度相干结构的模式方程

2.1 相干结构的物理定义

为了在数值计算中得到湍流的大尺度相干结构, 我们首先定义一个有限体积 V 内湍流相干运动的总能量. 在槽道流动中相干总能量只包括动能, (对于自然对流流动, 相干总能量包括相干速度分量的动能以及流动的相干内能), 即

$$E_t = \int v_i^2 dV \quad (5)$$

同时, 进一步定义一个表征相干能量增长率的变量 λ , 使

$$\lambda = \frac{1}{2E_t} \frac{\partial E_t}{\partial t} \quad (6)$$

根据湍流大尺度相干结构的物理特性，我们认为湍流大尺度结构所具有的一个显著的特点就是其相干总能量具有最大的增长率且对湍流脉动能量的贡献最大。对式 (6) 进行积分表明

$$E_t \propto \exp\left(\int 2\lambda dt\right) \quad (7)$$

因此

$$\lambda \rightarrow \lambda_{\max} \Rightarrow E_t \rightarrow E_{t,\max}$$

即某部分流动的相干速度满足 λ 最大，其相干速度的能量也会最大，此时它即代表大尺度相干结构。

2.2 大尺度相干结构的特征控制方程

为了建立大尺度结构与相干速度方程之间的关系，式 (4) 中给出的相干速度的输运方程可以用来推导相干速度的能量方程，即 E_t 的控制方程。根据上面给出的大尺度相干结构的定义和我们根据前面相干能量的定义有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial E_t}{\partial t} = & - \int [(U_j + v_j)(v_i v_i / 2) - v_j \pi]_{,j} dV + \int v_i (\overline{v_i v_j})_{,j} dV - \\ & \int U_{i,j} v_i v_j dV + \frac{1}{Re} \int v_i v_{i,jj} dV + \int \tau_{ij,j} v_i dV \end{aligned} \quad (8)$$

这里，方程右边积分式的第一项为对流和压力项，第二项雷诺应力项，第三项生成项，第四项耗散项，第五项相干雷诺应力项。

在充分发展的槽道流动中， $y(x_2)$ 方向的槽道边界处相干速度为零， $x(x_1)$ 和 $z(x_3)$ 方向上湍流均匀，大尺度相干结构呈周期变化。所以

$$\int [(U_j + v_j)(v_i v_i / 2)]_{,j} dV = 0 \quad (9)$$

同理，对于雷诺应力项也有

$$\int v_i (\overline{v_i v_j})_{,j} dV = \int [(\overline{v_i v_j})_{,2} \iint v_i dx_1 dx_3] dx_2 = 0 \quad (10)$$

对于生成项我们可以将 $U_{i,j}$ 分解成对称和反对称两个部分，即 $U_{i,j} = S_{ij} + \Omega_{ij}$ 。由于 $\Omega_{ij} v_i v_j = 0$ ，所以，经化简后可得

$$\frac{1}{2} \frac{\partial E_t}{\partial t} = \int (-S_{ij} v_j - \pi_{,i} + v_{i,jj} / Re + \tau_{ij,j}) v_i dV \quad (11)$$

根据式 (6) 的定义，相干能量增长率因而可以表示为

$$\lambda(v_i) = \int (-S_{ij} v_j - \pi_{,i} + v_{i,jj} / Re + \tau_{ij,j}) v_i dV / \int v_i^2 dV \quad (12)$$

对于最大相干能量增长率 $\lambda_{\max}$ 本文采用变分理论来求解。首先对影响 (12) 式 λ 的变量添加一个小扰动，即

$$\lambda(v_i + \varepsilon \delta v_i) = \frac{\int [-S_{ij}(v_j + \varepsilon \delta v_j) - \pi_{,i} + (v_i + \varepsilon \delta v_i)_{,jj} / Re + \tau_{ij,j}](v_i + \varepsilon \delta v_i) dV}{\int (v_j + \varepsilon \delta v_j)^2 dV} \quad (13)$$

根据变分原理, 最大的 λ 应该满足下式

$$\left. \frac{\partial \lambda(v_i + \varepsilon \delta v_i)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int (-2S_{ij}v_j - \pi_{,i} + 2v_{i,jj}/Re + \tau_{ij,j} - 2\lambda v_i) \cdot \delta v_i dV = 0 \quad (14)$$

该方程成立的一般条件为

$$2\lambda v_i = -\pi_{,i} - 2S_{ij}v_j + 2v_{i,jj}/Re + \tau_{ij,j} \quad (15)$$

此方程即建立了相干结构与湍流大尺度结构之间的关系, 它与式 (4) 中的连续方程构成了本文湍流大尺度相干结构运动的控制方程.

对于 (15) 式中存在的相干雷诺应力项需要进行模化. 采用简单的各向同性涡黏性模式对相干雷诺应力项进行模化, 即

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} = \nu_t(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (16)$$

3 数学方法和计算结果

3.1 槽道湍流问题的求解及计算结果

在特征方程 (15) 的求解过程中, 由于槽流在均匀流动方向上具有周期性结构, 因此假设相干速度可表示为

$$v_i(\mathbf{x}, t) = F(t)\hat{v}_i(y) \exp[i(k_1x + k_3z)] \quad (17)$$

其中 k_1, k_3 分别表示流向和展向波数, 它们所对应的最大能量增长率则应由大尺度相干结构控制方程 (15) 来确定. 因此, 将上式代入 (15), 化简后得到槽流相干速度分量的特征值方程

$$\lambda(k^2v_1 - ik_1Dv_2) = (1/Re + \nu_t)(D^2 - k^2)(k^2v_1 - ik_1Dv_2) - 0.5k_3^2Uv_2 + \nu_t'(k^2v_1 - ik_1Dv_2) \quad (18)$$

$$\lambda(D^2 - k^2)v_2 = (1/Re + \nu_t)(D^2 - k^2)^2v_2 + 2\nu_t'(D^2 - k^2)Dv_2 + \nu_t''D^2v_2 + \nu_t''k^2v_2 + \frac{1}{2}ik_1U''v_2 + \frac{1}{2}ik_1W'Dv_2 + \frac{1}{2}k^2U'v_1 \quad (19)$$

为简便起见, 上式中的 “ $\hat{v}_i$ ” 由 “ v_i ” 替代, $k^2 = k_i^2$, U' 表示 dU/dy 等等. 同时, 式中的平均速度 U 和涡黏性系数 ν_t 由 DNS 数据^[9,10] 给出.

在求解特征方程 (18), (19) 时, 采用 64 阶 Chebyshev 正交多项式对相干速度进行变换, 雷诺数取 180 ($Re = u_*a/\nu$). 图 1 为 $k_1 = 0$ 时不同展向波数下的相干速度在垂直于流动方向上的分布. 本文方法得到的结果更接近于 Moin 和 Moser^[11] 采用 POD 方法计算的结果, 比 Poje 和 Lumley^[8] 的结果更符合流动实际. 图 2 给出了 λ 在波数空间的等值线分布, $\lambda_{\max}$ 出现在 $k_1 = 0, k_3 = 9.8$, 这与实验观察到的边界层快慢斑的间距是一致的. 图 3 显示的是纵向涡的横截面图. 这些纵向涡正负交错排列, 意味着快慢条带的存在. 快条带与流线向涡心聚集的流动形态相对应, 慢条带则与流线从涡心向外发散的流动形态相对应. 这一结果十分重要, 它表明本文成功地模拟了湍流边界层大尺度相干结构的主要特征.

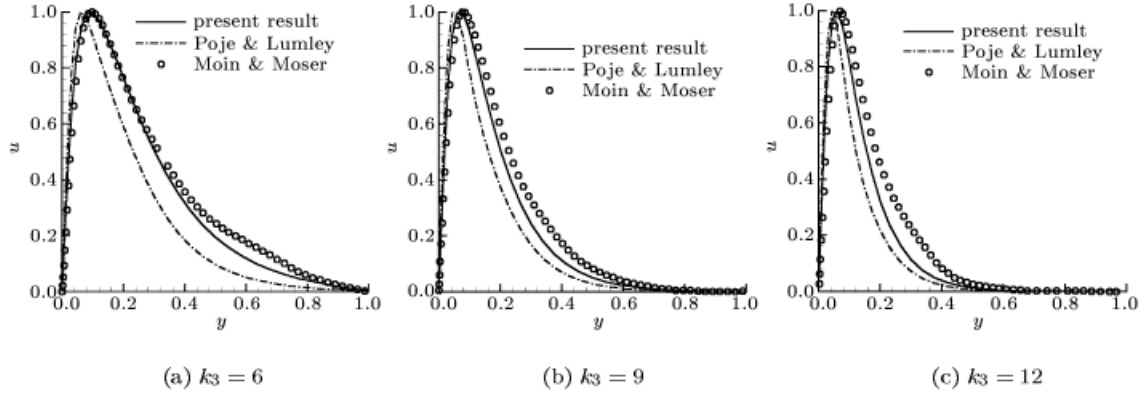


图 1 关于槽道流动计算结果的比较
Fig.1 Comparison of results on channel flow

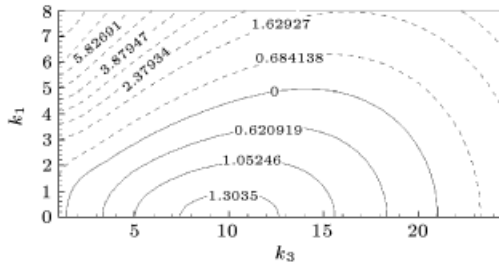


图 2 λ 在波数空间的等值线分布
Fig.2 Contours of λ in wave-number space

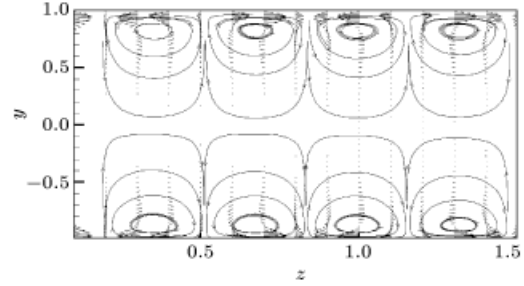


图 3 纵向涡的横截面图
Fig.3 Transverse section of longitudinal vortex

3.2 自然对流问题的求解及计算结果

对于两无限大垂直平行平板，一侧温度为 $+\Delta T$ ，一侧为 $-\Delta T$ ，它们间的自然对流的控制方程可以表示为

$$\left. \begin{aligned} u_{i,i} &= 0 \\ u_{i,t} + u_j u_{i,j} &= -p_{,i} + Pr u_{i,jj} + Pr Ra T \delta_{i3} \\ T_{,t} + u_j T_{,j} &= T_{,jj} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

这里，普朗特和瑞利数分别为： $Pr = \kappa/\nu$ 和 $Ra = g\beta\Delta T d^3/\kappa\nu$ ；其中， $g, \beta, \Delta T, d, \kappa, \nu$ 分别为重力加速度、体积热扩张系数、平板间温差、平板间距、热扩散与黏性系数。对该方程组同样采用三项分解方法，其中温度变量分为

$$T(x, t) = \bar{T}(x, t) + \theta(x, t) + T'(x, t) \quad (21)$$

这样，按照本文前面的推导过程可求解出自然对流中的相干速度和温度等大尺度结构信息。此时，特征值方程中对相干能量的定义必须包括相干温度的变化，即

$$E_t = \int (v_i^2 + \sigma\theta^2) dV \quad (22)$$

由此，自然对流中的大尺度相干结构控制方程可写作

$$\left. \begin{aligned}
 &\lambda(ik_3 Dv_1 - k^2 v_3) - \frac{1}{2}k_2^2 Wv_1 + \frac{1}{2}k_2^2 Pr Ra \theta = (Pr + \nu_t)(D^2 - k^2)(ik_3 Dv_1 - k^2 v_3) \\
 &\lambda(D^2 - k^2)v_1 - \frac{1}{2}k_2^2 Wv_3 - \frac{1}{2}\sigma k^2 T\theta + \frac{1}{2}ik_3 Pr Ra D\theta = \\
 &\quad \frac{1}{2}ik_3 W''v_1 + \frac{1}{2}ik_3 W Dv_1 + (Pr + \nu_t)(D^2 - k^2)^2 v_1 + \nu_t(D^2 - k^2)Dv_1 \\
 &\sigma\lambda\theta + \frac{1}{2}\sigma T v_1 - \frac{1}{2}Pr Ra v_3 = \sigma(1 + \nu_t)(D^2 - k^2)\theta
 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

不过, 此时坐标 x_1, x_2, x_3 分别表示平板的法向、展向和流向.

在 (23) 式的求解中, 基本变量 (W, T 以及涡黏性系数) 采用 Versteegh 和 Nieuwstadt^[12] 直接数值模拟结果. 图 4 给出了应用本文、DNS 以及线性稳定性方法计算得到的关联项 $\overline{w\overline{w}}$ 与 $\overline{w\overline{\theta}}$ 结果^[9], 瑞利数 (Ra) 为 540 000. 本文结果为大尺度相干结构值, 与 DNS 结果比较接近, 表明雷诺应力由大尺度相干结构占主导成分, 由线性稳定性理论给出的速度关联则相差较远.

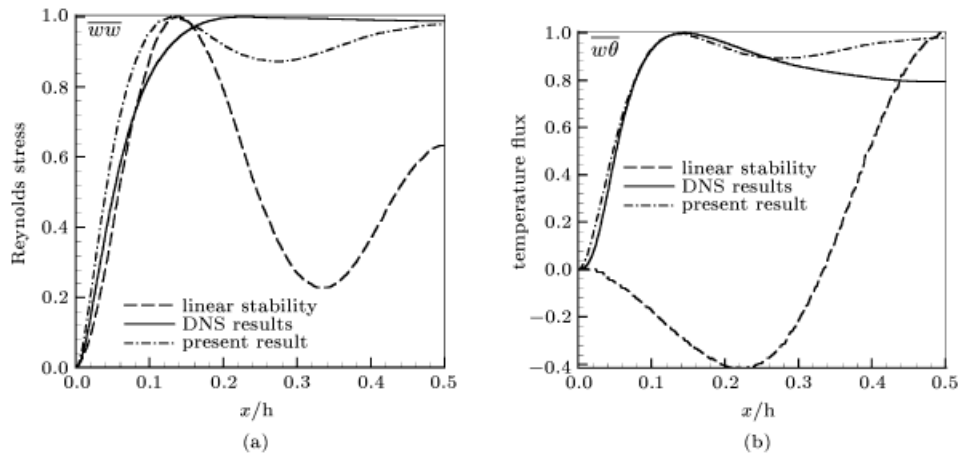


图 4 自然对流中雷诺应力 $\overline{w\overline{w}}$ 与标通量 $\overline{w\overline{\theta}}$ 的比较

Fig.4 Comparisons of $\overline{w\overline{w}}$ and $\overline{w\overline{\theta}}$ in natural convection

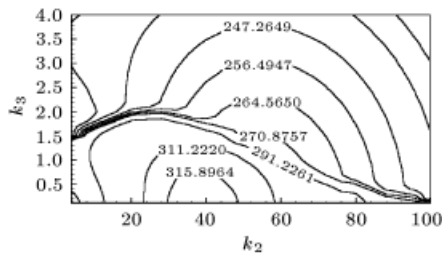


图 5 自然对流中 λ 在波数空间的等值线分布

Fig.5 λ -contours in natural convection

自然对流问题中的能量增长率分布 (见图 5) 与槽流中的情况 (图 2) 差别较大, 存在两个区域. 最大能量增长率所对应的波数为: $k_3 = 0, k_2 \approx 4$. 自然对流横截面上的大尺度相干结构的流线图由图 6 表示. 从图 6 我们可以看出, 流场的大尺度相干结构清楚地解释了在湍流情况下的热对流形态, 即大涡将热壁面的热流体输运到冷壁面, 同时将冷壁面的冷流体输运到热壁面. 这种流动形态与 Rayleigh-Benard 流动十分相近, 即在流场中有大尺度

涡结构出现. 大尺度相干结构在这两类自然对流问题中都起了十分重要的作用, 且表现为流动的主要特征.

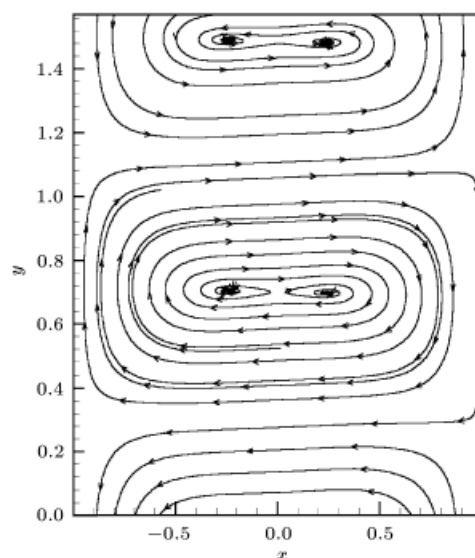
the streamlines of the coherent field in the xy -plane

图 6 自然对流横截面上的大尺度相干结构的流线图

Fig.6 Streamlines of coherent structure in natural convection

4 结 论

在本文工作中, 湍流量被分解为系综平均、相干和相干脉动三部分, 并提出湍流大尺度相干结构为相干速度中能量增长率最大的概念. 通过这一概念并应用能量稳定性理论和摄动方法将相干速度的控制方程转化为湍流大尺度相干结构的特征方程, 提出了一个描述湍流大尺度相干结构运动的模式.

在槽流和垂直平板间的自然对流问题中, 应用该模式得到湍流大尺度和相干结构的分布, 结果与 DNS 和 POD 方法得到的计算结果基本类似. 在槽流问题中, 成功模拟了快慢斑的条带间距, 这说明本文定义的大尺度相干结构合理, 抓住了湍流大尺度结构的主要特点. 由于缺少有关的实验与 DNS 数据, 对于自然对流问题中的大尺度相干结构的准确度尚待进一步证实.

参 考 文 献

- 1 是勋刚. 湍流. 天津: 天津大学出版社, 1994. 190 (Shi Xungang. Turbulence. Tianjin: Tianjin University Press, 1994. 190)
- 2 Lumley J L, Blossey P. Control of turbulence. *Annual Review Fluid Mechanics*, 1998, 30: 311~327
- 3 Hussain A K M F. Coherent structures-Reality and Myth. *Phys Fluids*, 1983, 26(10): 2816~2850
- 4 Rempfer D, Fasel H F. Evolution of the three-dimensional coherent structures in a flat-plate boundary layer. *J Fluid Mechanics*, 1994, 260: 351~375
- 5 Poje A C. An energy method stability model for large-scale structures in turbulent shear flows. [Ph D thesis]. Cornell Univ, 1993
- 6 Holmes P, Lumley J L, Berkooz G. Turbulent, coherent structure, dynamical systems and symmetry. Cambridge, UK: Cambridge Univ Press, 1996
- 7 安智勇, 符松. 能量稳定理论计算湍流中的相干结构. 见: 顾元宪, 方竞, 符松, 何林主编. 计算力学研究与进展——中国力学学会青年工作委员会第三届学术年会论文集. 北京: 万国学术出版社, 1999. 12 (An Zhiyong, Fu Song,

- Turbulent coherent structures from the energy stability method. In: Gu Yuanxian, Fang Jing, Fu Song, He Lin eds. *Progress in Computational Mechanics—the 3rd Annual Meeting of Young Members of the Mechanics Society of China*. Beijing: Wanguo Press, 1999. 12)
- 8 Poje A C, Lumley J L. A model for large-scale structures in turbulent shear flows. *J Fluid Mech*, 1995, 285: 349~369
- 9 Phillips W R C. The wall region of a turbulent boundary layer. *Phys Fluids*, 1987, 30: 2354~2361
- 10 Pai S I. On Turbulent flow between parallel plates. *J Appl Mech*, 1953, 20: 109~120
- 11 Moin P, Moser R D. Characteristic-eddy decomposition of turbulence in a channel. *J Fluid Mech*, 1989, 200: 471~500
- 12 Versteege T A M, Nieuwstadt F T M. Turbulent budgets of natural convection in an infinite, differentially heated, vertical channel. *Inter J of Heat & Fluid Flow*, 1998, 19: 135~139

MODELLING STUDY OF LARGE-SCALE COHERENT STRUCTURES FOR TURBULENT SHEAR ¹⁾

Fu Song An Zhiyong

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract Large-scale coherent turbulent structures are known to be a fundamental feature in turbulent flows. In this study, the maximum energy growth rate concept is adapted to define the large scales leading to the development of a model approach to resolve the coherent structures. The maximum energy growth rate is obtained here through the perturbation method with the Chebyshev polynomial being applied to solve the characteristic equations governing the behaviour of the large scale coherent structures. Application of the model to the channel flow and the buoyancy flow between two heated vertical plates provides satisfactory results and agree well with the POD results.

Key words large-scale turbulence, coherent structures, turbulence modelling

Received 4 September 2000, revised 8 September 2001.

1) The project supported by the National Distinguished Youth's Science Foundation of China (19725208), National Climbing Project Foundation.