

Wada 分形吸引域边界上的混沌鞍¹⁾

洪 灵 徐健学

(西安交通大学非线性动力学研究所, 西安 710049)

摘要 应用广义胞映射图论 (Generalized Cell Mapping Digraph) 方法, 数值地研究 Thompson 的逃逸方程在最佳逃逸点附近的分岔, 发现了嵌入在 Wada 分形吸引域边界上的混沌鞍, 混沌鞍是状态空间不稳定 (非吸引) 的混沌不变集合, Wada 分形吸引域边界是具有 Wada 性质的边界, 即吸引域边界上的任意点也同时是至少两个其它吸引域的边界点, 称为 Wada 域边界. 我们证明 Wada 域边界上的混沌鞍导致局部鞍结分岔具有全局不确定性结局, 研究了 Wada 域边界上混沌鞍的形成与演化, 证明最终的逃逸分岔是混沌吸引子碰撞混沌鞍的边界激变.

关键词 全局分析, Wada 域边界, 不确定性分岔, 边界激变, 混沌鞍

引 言

动力学混沌不变集的分岔, 即随着系统参数变化混沌不变集的定性性态怎样变化, 已经成为混沌动力学研究的重要中心课题. 在动力系统中, 存在两类混沌不变集, 即混沌吸引子和混沌鞍. 混沌鞍是不稳定 (非吸引) 的混沌不变集合, 能导致各种物理现象, 例如混沌散射 (Chaotic scattering) 和分形域边界^[1,2], 正像混沌吸引子的激变^[3]一样, 混沌鞍也能经历不连续分岔, 混沌鞍的不连续分岔导致物理可观察的现象, 例如混沌散射的增强^[4]和吸引域边界的质变 (Metamorphosis)^[5]. 最近, 在动力系统中已经发现了一类具有 Wada 性质的分形吸引域边界, 即吸引域边界上的任意点也同时是至少两个其它吸引域的边界点^[6], 即对于吸引域 $B(1), B(2), \dots, B(N)$ ($N \geq 3$), 满足 $\bar{B}(1) = \bar{B}(2) = \dots = \bar{B}(N)$ ($\bar{B}$ 是吸引域 B 的边界), 称为 Wada 域边界.

在耗散动力系统中, 人们常常感兴趣的是渐近行为, 特别是在一段瞬态过后能被观察到的行为, 因此, 混沌动力学的研究大量地集中在混沌吸引子、混沌吸引子的分岔以及分形吸引域边界. 本文应用 GCMD 方法, 数值地研究 Thompson 的逃逸方程在最佳逃逸点附近的分岔, 这些分岔已经被 Thompson 及其合作者^[7]进行了大量细致的研究. 我们发现了嵌入在 Wada 域边界上的混沌鞍, Wada 域边界上的混沌鞍在整个控制逃逸的分岔中起极其重要的作用. 我们证明 Wada 域边界上的混沌鞍导致局部鞍结分岔具有全局不确定性结局, 代表动力系统不确定性的一种极端形式, 我们也研究 Wada 域边界上混沌鞍的形成与演化, 证明最终的逃逸分岔是混沌吸引子碰撞混沌鞍的边界激变, 这种碰撞混沌鞍的边界激变是对 Grebogi 等人^[3]碰撞周期鞍的边界激变定义的推广.

2000-07-20 收到第一稿, 2001-07-16 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (19972051).

GCMD 方法^[8~10]是基于广义胞映射系统与图的严格理论对应,借助于图的算法有效实现非线性系统全局分析包括全局瞬态分析的新方法. GCMD 方法能确定状态空间不稳定(非吸引)的不变集包括不稳定(非吸引)的混沌不变集合.

1 Thompson 的逃逸方程和最佳逃逸路径

Thompson 的逃逸方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + x - x^2 = F \sin(\omega t + \phi) \quad (1)$$

方程(1)描述一粒子在势井 $V(x) = x^2/2 - x^3/3$ 中的强迫振动,这里阻尼系数 β , 强迫振幅 F 和强迫频率 ω 为系统参数. 对于 $\beta = 0.1$ 的情形, Thompson 等人^[7]已经进行了大量的研究,并给出了在 (ω, F) 参数平面的分岔图(文献[7]图1),我们复制这幅 (ω, F) 参数平面的分岔图作为本文的图1. 在图1中,有六条分岔曲线,两条鞍结折叠分岔曲线 A 和 B , 周期倍分岔曲线 C , 边界激变曲线 E , 同宿相切曲线 M , 异宿相切曲线 H , 最佳逃逸点 Q 定义为系统能逃逸的最小强迫振幅值的对应点 $(\omega^Q, F_{\min})$, 在曲线 A, B 和 E 围成的三角区域内存在势井内的两个共存吸引子,在阴影区域内,没有(有限)吸引子,所有运动都将逃逸到无限.

我们选择一条从右边接近 Q 点的最佳逃逸路径 $\omega = 0.83$ ($\omega > \omega^Q$),借助于 GCMD 方法,确定了先前已报告结果的存在,我们发现了嵌入在 Wada 域边界上的混沌鞍,这个 Wada 域边界上的混沌鞍在整个控制逃逸的分岔中起极其重要的作用.

2 沿着最佳逃逸路径 $\omega = 0.83$ 的分岔

这一节我们应用 GCMD 方法研究沿着最佳逃逸路径 $\omega = 0.83$ 的分岔. 选取 105×105 的胞结构均匀地覆盖感兴趣的一有限区域 $(-0.8 \leq x \leq 1.2) \times (-0.9 \leq dx/dt \leq 0.8)$, 这样,胞的尺寸是 0.01905×0.01619 , 并且在每个胞内取 25×25 个采样点,在感兴趣的区域以外,引入陷胞(Sink cell),状态胞的总数目(包括陷胞)为 $105 \times 105 + 1$.

为了叙述简便,在以下的讨论中,我们将顺序标记陷胞(逃逸到无限)、非共振吸引子 S_n 和共振吸引子 S_r 分别为 1, 2, 3, 即吸引子 $P(1), P(2)$ (标记“•”)和 $P(3)$ (标记“■”),它们的吸引域 $B(1)$ (标记“.”)、 $B(2)$ (标记“×”)和 $B(3)$ (标记“+”),吸引域边界^[8,9,11] $B(1, 2)$ (标记“k”)、 $B(1, 3)$ (标记“1”)、 $B(2, 3)$ (标记“z”)和 $B(1, 2, 3)$ (标记空白).

(1) $F = 0.04$ 和 $F = 0.06$ 两种情形如图 2(a), (b) 所示. 在 $F = 0.04$ 时,鞍结折叠分岔曲线 B 的下方,存在无限吸引子 $P(1)$ 、周期一吸引子 $P(2)$ 和周期一井顶鞍 D_h (标记“◇”),井顶鞍

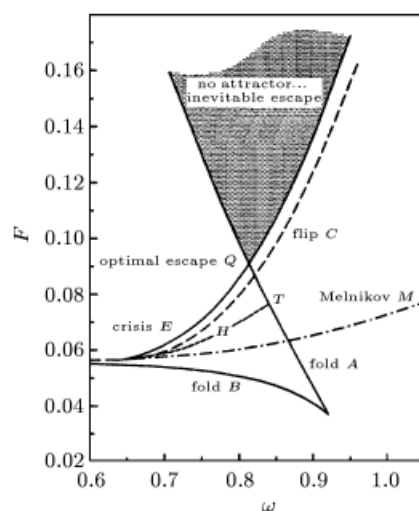


图1 在 $\beta = 0.1, \phi = 180^\circ$ 时 Thompson 逃逸方程(1)在 (ω, F) 参数平面上的分岔图
Fig.1 For Thompson's escape Eq.(1) with $\beta = 0.1, \phi = 180^\circ$, bifurcation diagram in the (ω, F) parameter plane

D_h 在边界 $B(1, 2)$ 中. 在 $F = 0.06$ 时, 鞍结折叠分岔曲线 B 的上方, 存在无限吸引子 $P(1)$ 、两个周期一吸引子 $P(2)P(3)$ 和周期一共振鞍 D_r (标记“□”), 吸引域边界 $B(1, 2)$ 是空集, $B(1, 3)$ 仅有五个胞, 共振鞍 D_r 在边界 $B(2, 3)$ 中.

(2) 通过曲线 H, F 在间隔 $(0.0705, 0.071)$ 时产生 Wada 域边界上混沌鞍的分岔如图 2(c), 图 2(d) 所示. 在 $F = 0.0705$ 时, 存在吸引子 $P(1)P(2)P(3)$ 、共振鞍 D_r 和两个混沌鞍, 在边界 $B(2, 3)$ 中的混沌鞍标记符号“ Δ ”, 在边界 $B(1, 2, 3)$ 中的混沌鞍标记符号“ $\blacktriangledown$ ”, 不对应系统不稳定解的瞬态过程标记符号“ $\circ$ ”, 可通过自循环胞集的局部细化方法^[10]加以确定, 吸引域边界

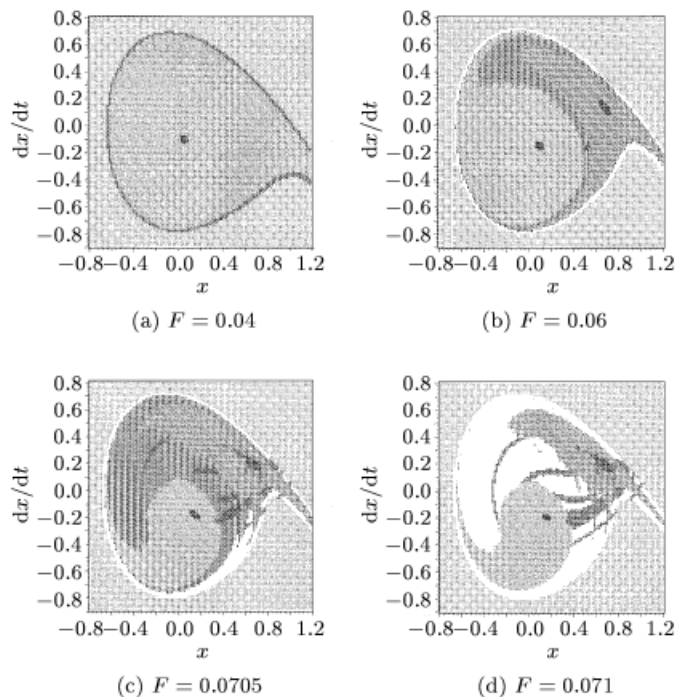


图 2 在 $\beta = 0.1, \phi = 180^\circ$ 时 Thompson 逃逸方程 (1) 沿着最佳逃逸路径 $\omega = 0.83$ 的全局分岔图. 周期一吸引子 $P(2)$ 标记符号“ $\bullet$ ”, 周期一吸引子 $P(3)$ 标记符号“ $\blacksquare$ ”, 在边界 $B(2, 3)$ 上的混沌鞍标记符号“ Δ ”, 混沌鞍标记符号“ $\blacktriangledown$ ”, 周期一鞍 D_r 标记“ $\square$ ”, 周期一鞍 D_h 标记“ $\diamond$ ”, 瞬态过程标记“ $\circ$ ”. 陷胞的吸引域 $B(1)$ 标记“ $\cdot$ ”, $P(2)$ 的吸引域 $B(2)$ 标记“ $\times$ ”, $P(3)$ 的吸引域 $B(3)$ 标记“ $+$ ”, 吸引域边界 $B(1, 2)$ 标记“ k ”, $B(1, 3)$ 标记“ l ”, $B(2, 3)$ 标记“ z ”, 边界 $B(1, 2, 3)$ 标记空白

Fig.2 For Thompson's escape equation (1) with $\beta = 0.1, \phi = 180^\circ$, the global diagrams of bifurcations along the optimal escape route $\omega = 0.83$.

The period-1 attractor $P(2)$ is marked by the symbol “ $\bullet$ ”, the period-1 attractor $P(3)$ is marked by the symbol “ $\blacksquare$ ”. The chaotic saddle in the boundary $B(2, 3)$ is marked by the symbol “ Δ ”, the chaotic saddle is marked by the symbol “ $\blacktriangledown$ ”. The period-1 saddle D_r is marked by the symbol “ $\square$ ”, the period-1 saddle D_h is marked by the symbol “ $\diamond$ ”. A transient process is marked by the symbol “ $\circ$ ”. The domain of attraction $B(1)$ of the sink cell $P(1)$ is marked by the symbol “ $\cdot$ ”, the domain of attraction $B(2)$ of the attractor $P(2)$ is marked by the symbol “ $\times$ ”, the domain of attraction $B(3)$ of the attractor $P(3)$ is marked by the symbol “ $+$ ”. The boundary $B(1, 2)$ is marked by the symbol “ k ”, the boundary $B(1, 3)$ is marked by the symbol “ l ”, the boundary $B(2, 3)$ is marked by the symbol “ z ”, the boundary $B(1, 2, 3)$ is marked by the blank space

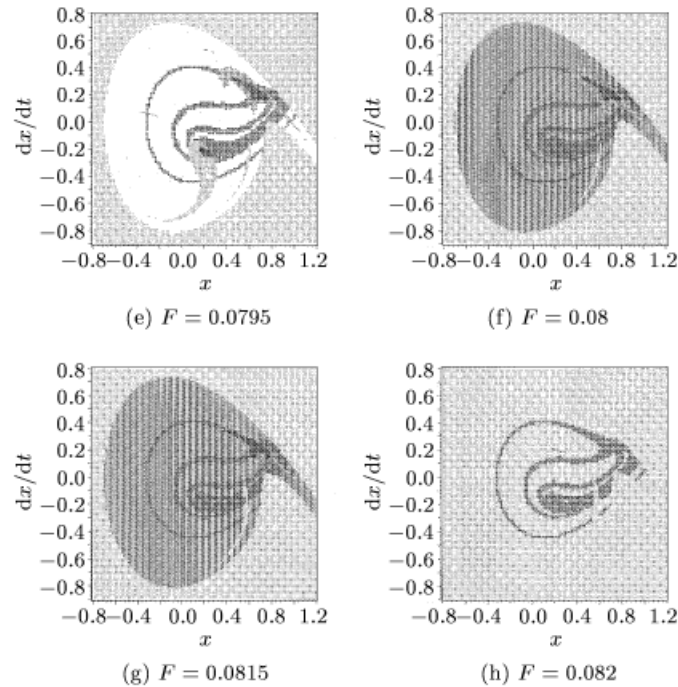


图 2 在 $\beta = 0.1, \phi = 180^\circ$ 时 Thompson 逃逸方程 (1) 沿着最佳逃逸路径 $\omega = 0.83$ 的全局分岔图 (续)
 周期一吸引子 $P(2)$ 标记符号 “●”, 周期一吸引子 $P(3)$ 标记符号 “■”, 在边界 $B(2,3)$ 上的混沌鞍标记符号 “△”,
 混沌鞍标记符号 “▼”, 周期一鞍 D_r 标记 “□”, 周期一鞍 D_h 标记 “◇”, 瞬态过程标记 “○”. 陷胞的
 吸引域 $B(1)$ 标记 “.”, $P(2)$ 的吸引域 $B(2)$ 标记 “×”, $P(3)$ 的吸引域 $B(3)$ 标记 “+”, 吸引域边界
 $B(1,2)$ 标记 “k”, $B(1,3)$ 标记 “l”, $B(2,3)$ 标记 “z”, 边界 $B(1,2,3)$ 标记空白

Fig.2 For Thompson's escape equation (1) with $\beta = 0.1, \phi = 180^\circ$, the global diagrams (continued)
 of bifurcations along the optimal escape route $\omega = 0.83$.

The period-1 attractor $P(2)$ is marked by the symbol “●”, the period-1 attractor $P(3)$ is marked by the symbol “■”. The chaotic saddle in the boundary $B(2,3)$ is marked by the symbol “△”, the chaotic saddle is marked by the symbol “▼”. The period-1 saddle D_r is marked by the symbol “□”, the period-1 saddle D_h is marked by the symbol “◇”. A transient process is marked by the symbol “○”. The domain of attraction $B(1)$ of the sink cell $P(1)$ is marked by the symbol “.”, the domain of attraction $B(2)$ of the attractor $P(2)$ is marked by the symbol “×”, the domain of attraction $B(3)$ of the attractor $P(3)$ is marked by the symbol “+”. The boundary $B(1,2)$ is marked by the symbol “k”, the boundary $B(1,3)$ is marked by the symbol “l”, the boundary $B(2,3)$ is marked by the symbol “z”, the boundary $B(1,2,3)$ is marked by the blank space

$B(2,3)$ 和 $B(1,2,3)$ 的厚度大于所有坐标方向胞尺寸的最大值, 边界 $B(2,3)$ 和 $B(1,2,3)$ 是分形边界, 并可通过对域边界的细化方法^[11]进一步加以确定, 两个混沌鞍分别嵌入在分形边界 $B(2,3)$ 和 $B(1,2,3)$ 内, 周期一鞍 D_r 是在吸引域 $B(2)$ 的边缘, 吸引域边界 $B(1,2)$ 是空集, $B(1,3)$ 仅有一个胞, 图 2(c) 显示两个不同分形吸引域边界 $B(2,3)$ 和 $B(1,2,3)$ 上的混沌鞍相碰撞. 在 $F = 0.071$ 时, 存在吸引子 $P(1)P(2)P(3)$ 、共振鞍 D_r 和一个混沌鞍, 吸引域边界 $B(1,2)B(1,3)B(2,3)$ 都为空集, 如图 2(d) 所示, 吸引域边界 $B(1,2,3)$ 的厚度远大于所有坐标方向胞尺寸的最大值, 边界 $B(1,2,3)$ 是分形边界. 特别地, 边界 $B(1,2,3)$ 是 Wada 边界, 即吸引域边

界上的任意点也同时是至少两个其它吸引域的边界点, 即满足 $\overline{B}(1) = \overline{B}(2) = \overline{B}(3) = B(1, 2, 3)$, 并且混沌鞍嵌入在 Wada 域边界 $B(1, 2, 3)$ 内.

图 2(c), 图 2(d) 表明 Wada 域边界上的混沌鞍是由于两个不同分形吸引域边界 $B(2, 3)$ 和 $B(1, 2, 3)$ 上的混沌鞍相碰撞产生的.

(3) 通过曲线 A, F 在间隔 $(0.079\ 5, 0.08)$ 时具有全局不确定性结局的鞍结分岔如图 2(e), 图 2(f) 所示. 在图 2(f) 中, 边界 $B(1, 3)$ 是分形边界, 混沌鞍是嵌入在分形边界 $B(1, 3)$ 中.

图 2(e), 图 2(f) 表明局部的鞍结分岔, 如果鞍结分岔的鞍在 Wada 域边界的混沌鞍上, 将导致全局不确定性结局, 在这种情况下, 鞍结分岔的吸引子(结点)和鞍被混沌鞍吞并, 随着系统参数通过分岔临界值混沌鞍的大小(尺寸和形状)也经历突然增大, 同时 Wada 域边界也被转变成两个剩余吸引子的分形边界, 特别地, 鞍结分岔后的混沌鞍嵌入在这个分形边界中, 这意味着鞍结分岔具有全局不确定性结局, 即鞍结分岔后, 系统去到两个剩余吸引子的哪一个敏感地取决于任意小的影响, 例如参数怎样变化、噪声以及计算机舍入误差等等, 显然, 这体现了动力系统不确定性的极端形式.

(4) 通过曲线 E, F 在间隔 $(0.081\ 5, 0.082)$ 时碰撞混沌鞍的边界激变如图 2(g), 图 2(h) 所示. 在图 2(g) 中, 吸引子 $P(3)$ 已经过周期倍分岔成为一混沌吸引子.

图 2(g), 图 2(h) 表明边界激变是由于混沌吸引子与分形吸引域边界上的混沌鞍相碰撞产生的, 在这种情况下, 当系统参数通过激变临界值时, 混沌吸引子连同它的吸引域突然消失, 同时这个混沌鞍的大小也经历突然增大, 即混沌吸引子被转变成混沌鞍新增的一部分, 分形边界突然消失. 这种碰撞混沌鞍的边界激变是对 Grebogi 等人^[3]碰撞周期鞍的边界激变定义的推广.

参 考 文 献

- 1 McDonald SW, Grebogi C, Ott E, Yorke JA. Fractal basin boundaries. *Physica*, 1985, D17: 125
- 2 Ott E, Tél T. Chaotic scattering: an introduction, *Chaos*, 1993, 3: 417
- 3 Grebogi C, Ott E, Yorke JA. Crises, sudden changes in chaotic attractors and chaotic transients. *Physica D*, 1983, D7: 181
- 4 Lai Y-C, Grebogi C, Blümel R, Kan I. Crisis in chaotic scattering. *Phys Rev Lett*, 1993, 71: 2212
- 5 Grebogi C, Ott E, Yorke JA. Metamorphoses of basin boundaries in nonlinear dynamical systems. *Phys Rev Lett*, 1986, 56: 1011
- 6 Nusse HE, Yorke JA. Wada basin boundaries and basin cells. *Physica*, 1996, D90: 242
- 7 Thompson JMT, Soliman MS. Indeterminate jumps to resonance from a tangled saddle-node bifurcation. *Proc R Soc London A*, 1991, 432: 101
- 8 徐健学, 洪灵. 全局分析的广义胞映射图论方法. 力学学报, 1999, 31(6): 724 (Xu Jianxue, Hong Ling. Generalized cell mapping digraph method for global analysis. *Acta Mechanica Sinica*, 1999, 31(6): 724 (in Chinese))
- 9 Hong Ling, Xu Jianxue. Crises and chaotic transients studied by the generalized cell mapping digraph method. *Phys Lett A*, 1999, 262: 361
- 10 洪灵, 徐健学. 常微分方程系统内部激变现象的研究. 物理学报, 2000, 49(7): 1227 (Hong Ling, Xu Jianxue. Further study of interior crises in systems of ordinary differential equations. *Acta Physica Sinica*, 2000, 49(7): 1227 (in Chinese))
- 11 Hsu CS. Global analysis by cell mapping. *Int J Bifurcation and Chaos*, 1992, 2(4): 727

A CHAOTIC SADDLE IN A WADA FRACTAL BASIN BOUNDARY ¹⁾

Hong Ling Xu Jianxue

(*Institute of Nonlinear Dynamics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

Abstract In this paper, bifurcations near optimal escape for Thompson's escape equation are numerically studied by means of Generalized Cell Mapping Digraph (GCMD) method. We find a chaotic saddle embedded in a Wada fractal basin boundary. The chaotic saddle is an unstable (nonattracting) chaotic invariant set. The Wada fractal basin boundary has the Wada property that any point that is on the boundary of that basin is also simultaneously on the boundary of at least two other basins. The chaotic saddle in the Wada basin boundary plays an extremely important role in the bifurcations governing the escape. We demonstrate that the chaotic saddle in the Wada basin boundary leads to a local saddle-node fold bifurcation with globally indeterminate outcome. In such a case, the attractor (node) and the saddle of the saddle-node fold are merged into the chaotic saddle and the chaotic saddle also undergoes an abrupt enlargement in its size as a parameter passes through the bifurcation value, simultaneously the Wada basin boundary is also converted into the fractal basin boundary of two remaining attractors, in particular, the chaotic saddle after the saddle-node fold bifurcation is in the fractal basin boundary, this implies that the saddle-node fold bifurcation has indeterminate outcome, namely, after the system drifts through the bifurcation, which of the two remaining attractors the orbit goes to is indeterminate in that it is sensitively dependent on arbitrarily small effects such as how the parameter is changed and/or noise and/or computer roundoff, obviously, this presents an extreme form of indeterminacy in a dynamical system. We also investigate the origin and evolution of the chaotic saddle in the Wada basin boundary and demonstrate that the chaotic saddle in the Wada basin boundary is created by the collision between two chaotic saddles in different fractal basin boundaries. We demonstrate that a final escape bifurcation is the boundary crisis caused by the collision between a chaotic attractor and a chaotic saddle, and this implies that Grebogi's definition of the boundary crisis by the collision with a periodic saddle is generalized.

Key words global analysis, Wada basin boundary, indeterminate bifurcation, boundary crisis, chaotic saddle

Received 20 July 2000, revised 16 July 2001.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19972051).