第 33 卷 第 6 期　　力 学 学 报　　Vol. 33, No.6
2001 年 11 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　Nov., 2001

极坐标下弹性力学的一个新解答

周建方
(河海大学常州校区, 常州 213022)
卓家寿
(河海大学土木工程学院, 南京 210098)

摘要 在极坐标下将 Hamilton 体系下的分离变量法应用到弹性力学的非齐次边界情况, 得到了一个新解答, 利用这个新解可以求解一类弹性力学问题. 文中给出了具体例子.

关键词 极坐标, Hamilton 体系, 分离变量法, 新解答

引 言

在经典的弹性力学 [1,2] 中, 求解问题一般都是采用逆解法或半逆解法, 这往往使人无所适从. 文献 [3, 4] 成功地将 Hamilton 体系引入弹性力学中, 并用分离变量法直接求解了许多问题, 形成了弹性力学求解的新体系 [5], 但似乎并没有得到新的弹性力学解, 本文则在文献 [5, 6] 的基础上, 进一步拓展 Hamilton 体系下的分离变量法, 将其应用到非齐次边界条件情况, 从而得到了极坐标下的一个弹性力学解答, 这个解答目前在文献中还没有见过. 利用这个解答可以求解厚壁圆筒受非均匀内水压力作用等一类问题, 因此不仅具有一定的理论意义, 而且具有较强的实用价值.

1 齐次边界条件下分离变量法及其解

为了后面的讨论方便起见, 先简单列出齐次边界条件下的有关公式及其求解过程. 在极坐标下可以分别从 r 或 θ 模拟时间进入 Hamilton 体系, 这里讨论 θ 模拟为时间的情况, 基本公式为 [5,6]

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \theta} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{V} \tag{1}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1-\dfrac{\partial}{\partial\zeta} & \dfrac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ -\left(1+\nu\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\right) & 0 & 0 & \dfrac{1-\nu^2}{E} \\ -E\dfrac{\partial^2}{\partial\zeta^2} & 0 & 0 & 1-\nu\dfrac{\partial}{\partial\zeta} \\ 0 & 0 & -\left(1+\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\right) & 0 \end{bmatrix} \\ &\boldsymbol{V} = (u_r, u_\theta, s_{r\theta}, s_\theta)^{\mathrm{T}}, \quad \zeta = \ln r \\ &s_{r\theta} = r\tau_{r\theta}, \quad s_\theta = r\sigma_\theta \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

1999–04–29 收到第一稿, 2000–09–06 收到修改稿.

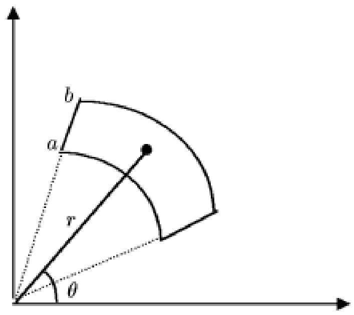

图 1 齐次边界条件
Fig.1 Homogeneous boundary conditions

$\boldsymbol{H}$ 为 Hamilton 算子矩阵，另一应力分量为

$$s_r = E\frac{\partial u_r}{\partial \zeta} + \nu s_\theta, \quad s_r = r\sigma_r \tag{3}$$

齐次侧边界条件为 (图 1)

$$s_r = 0, \quad s_{r\theta} = 0, \quad 当\ r = a, b \tag{4}$$

采用分离变量法求解 (1), 有本征方程

$$\boldsymbol{H\omega} = u\boldsymbol{\omega} \tag{5}$$

考虑 $u = \pm\mathrm{i}$ 情况 (i 为虚数单位), 此时本征方程为 $\boldsymbol{H\omega} = \pm\mathrm{i}\boldsymbol{\omega}$, 对于 $u = \mathrm{i}$, 经过推导有

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{Bmatrix} C_4 + \dfrac{\mathrm{i}}{2E}\left[C_1(1-3\nu)r^2 - C_2(1+\nu)r^{-2} - \dfrac{2(1+\nu)(3-\nu)}{1-\nu}C_3\ln r\right] \\ C_4\mathrm{i} + \dfrac{(1+\nu)^2}{E(1-\nu)}C_3 + \dfrac{1}{2E}\left[C_1(5+\nu)r^2 - C_2(1+\nu)r^{-2} + \dfrac{2(1+\nu)(3-\nu)}{1-\nu}C_3\ln r\right] \\ C_1r^2 + C_2r^{-2} + C_3 \\ (3C_1r^2 - C_2r^{-2} + C_3)\mathrm{i} \end{Bmatrix} \tag{6}$$

满足其齐次边界条件 (4) 的解为

$$\boldsymbol{\omega}_1 = (1, \mathrm{i}, 0, 0)^{\mathrm{T}} \tag{7a}$$

原方程 (1) 的解为

$$\boldsymbol{V}_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\boldsymbol{\omega}_1 \tag{7b}$$

表示刚体位移. 由于 Hamilton 算子矩阵 $\boldsymbol{H}$ 是不对称矩阵，且其本征值 i 为重根 [5], 因此根据矩阵代数的本征问题理论可知，可能有 Jordan 型解. 这里首先求一阶 Jordan 型解，即求 $\boldsymbol{H\omega}_2 = \mathrm{i}\boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_1$, 其解显然为齐次方程通解 (6) 加一特解. 特解可求得为

$$\boldsymbol{\omega}_2^* = \left(\frac{2\mathrm{i}}{1-\nu}\ln r, \quad -\frac{1+\nu+2\ln r}{1-\nu}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

最后满足边界条件 (4) 的解为

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{Bmatrix} B + \mathrm{i}\left[\alpha\dfrac{1+3\nu}{2}r^2 + \beta\dfrac{1+\nu}{2}r^{-2} + \dfrac{1-\nu}{2}\ln r\right] \\ B\mathrm{i} - \dfrac{1+\nu}{2} + \alpha\dfrac{5+\nu}{2}r^2 + \beta\dfrac{1+\nu}{2}r^{-2} - \dfrac{1-\nu}{2}\ln r \\ \left(\alpha r^2 - \beta r^{-2} + \dfrac{1}{2}\right)E \\ \left(3\alpha r^2 + \beta r^{-2} + \dfrac{1}{2}\right)E\mathrm{i} \end{Bmatrix} \tag{9a}$$

式中 $\alpha=-1/[2(a^2+b^2)]$, $\beta=-a^2b^2\alpha$, B 为任意常数，这样，原方程 (1) 的又一解为

$$\boldsymbol{V}_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\boldsymbol{\omega}_2+\theta\boldsymbol{\omega}_1) \tag{9b}$$

进一步求解可以发现满足 (4) 的 Jordan 型解不存在，因而 Jordan 链至此断绝.

对于 $-\mathrm{i}$ 的情况，其求解过程一样，事实上只要在上面的有关式中取 i 为 $-\mathrm{i}$, 即为其解. 这样方程 (1) 满足齐次边界条件 (4) 的一个通解为 $\boldsymbol{V}=\sum\limits_{k=-2}^{2}a_k\boldsymbol{V}_k$, 其中 a_k 为任意常数，写出应力分量

$$\left\{\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \tau_{r\theta}\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}E\Big(\alpha r-\beta r^{-3}+\dfrac{1}{2}r^{-1}\Big)(C_2\cos\theta-C_1\sin\theta)\\ E\Big(3\alpha r+\beta r^{-3}+\dfrac{1}{2}r^{-1}\Big)(C_2\cos\theta-C_1\sin\theta)\\ E\Big(\alpha r-\beta r^{-3}+\dfrac{1}{2}r^{-1}\Big)(C_2\sin\theta+C_1\cos\theta)\end{matrix}\right\} \tag{10}$$

这里根据应力分量不能为复数的条件，已将表达式全部用实数表示，其中 C_1,C_2 为相应的实常数，可以看出，式 (10) 实际为经典弹性力学中应力函数 $f_1(r)\cos\theta+f_2(r)\sin\theta$ 确定的应力，可以用来求解曲杆在一端承受剪力或正应力等问题.

2 非齐次边界条件及其解

对于非齐次边界条件，按照一般的分离变量法，是首先进行边界条件齐次化. 而目前从式 (3) 和式 (4) 中可以看出，如果侧边界条件为非齐次，则在方程中包含 u_r 和 s_θ (实为 σ_θ) 两个函数，要进行齐次化是非常困难的. 因此，这里改变传统的做法，暂不考虑非齐次边界条件，而首先进一步求解满足方程 (1) 的解.

虽然上面已经指出，满足齐次边界条件 (4) 的 Jordan 型链已经断绝，但如果不考虑边界条件，则还可以求解 Jordan 型解，为此继续求解方程

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{\omega}_3=\mathrm{i}\boldsymbol{\omega}_3+\boldsymbol{\omega}_2 \tag{11}$$

其齐次解仍如式 (6) 所示，特解经过繁复推导可得为

$$\boldsymbol{\omega}_3^*=\left\{\begin{matrix}\dfrac{1-3\nu}{2}\alpha r^2\ln r+\dfrac{7\nu-5}{4}\alpha r^2-\dfrac{1+\nu}{2}\beta r^{-2}\ln r-\dfrac{1+\nu}{4}\beta r^{-2}+\dfrac{1+\nu}{2}\ln r-\dfrac{1}{2}(\ln r)^2+\dfrac{2\beta\mathrm{i}}{1-\nu}\ln r\\ \Big[-\dfrac{5+\nu}{2}\alpha r^2\ln r+\dfrac{13+\nu}{4}\alpha r^2+\dfrac{1+\nu}{2}\beta r^{-2}\ln r+\dfrac{1+\nu}{4}\beta r^{-2}-\dfrac{1}{2}(\ln r)^2\Big]\mathrm{i}-\dfrac{2B}{1-\nu}\ln r-\dfrac{1+\nu}{1-\nu}B\\ -(\alpha r^2\ln r+\beta r^{-2}\ln r)E\mathrm{i}\\ -\Big(-3\alpha r^2\ln r+2\alpha r^2+\beta r^{-2}\ln r+\dfrac{1}{2}\Big)E\end{matrix}\right\} \tag{12}$$

将式 (6) 和 (12) 叠加，即可得 $\boldsymbol{\omega}_3$, 从而可得 (1) 的又一解为

$$\boldsymbol{V}_3=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\Big(\boldsymbol{\omega}_3+\theta\boldsymbol{\omega}_2+\frac{\theta^2}{2}\boldsymbol{\omega}_1\Big) \tag{13}$$

类似可得 $\boldsymbol{V}_{-3}$, 这样式 (1) 的通解变为 $\boldsymbol{V}=\sum\limits_{k=-3}^{3}a_k\boldsymbol{V}_k$, 分别取出实部和虚部叠加, 经过整理最后可得

$$\begin{aligned}
\sigma_r =& E\Big(\alpha r-\beta r^{-3}+\frac{1}{2}r^{-1}\Big)(C_2\cos\theta-C_1\sin\theta)-\Big(C_5 r+C_7 r^{-3}-\frac{3+\nu}{1-\nu}C_9 r^{-1}\Big)\sin\theta+\\
&\Big(C_6 r+C_8 r^{-3}-\frac{3+\nu}{3-\nu}C_{10}r^{-1}\Big)\cos\theta+\frac{2Er^{-1}}{1-\nu}(-C_{11}\sin\theta+C_{12}\cos\theta)+\\
&E\Big(\alpha r\ln r-2\alpha r+\beta r^{-3}\ln r-r^{-1}\ln r+\frac{1}{2}r^{-1}\Big)(C_3\cos\theta+C_4\sin\theta)+\\
&E\theta\Big(\alpha r-\beta r^{-3}+\frac{1}{2}r^{-1}\Big)(C_4\cos\theta-C_3\sin\theta)\\
\sigma_\theta =& E\Big(3\alpha r+\beta r^{-3}+\frac{1}{2}r^{-1}\Big)(C_2\cos\theta-C_1\sin\theta)-\big(3C_5 r-C_7 r^{-3}+C_9 r^{-1}\big)\sin\theta+\\
&(C_6 r-C_8 r^{-3}+C_{10}r^{-1})\cos\theta+E\Big(3\alpha r\ln r-\beta r^{-3}\ln r-2\alpha r-\frac{1}{2}r^{-1}\Big)\times\\
&(C_3\cos\theta+C_4\sin\theta)+E\theta\Big(3\alpha r+\beta r^{-3}+\frac{1}{2}r^{-1}\Big)(C_4\cos\theta-C_3\sin\theta)\\
\tau_{r\theta} =& E\Big(\alpha r-\beta r^{-3}+\frac{1}{2}r^{-1}\Big)(C_1\cos\theta+C_2\sin\theta)+\big(C_5 r+C_7 r^{-3}+C_9 r^{-1}\big)\cos\theta+\\
&(C_6 r+C_8 r^{-3}+C_{10}r^{-1})\sin\theta+E(\alpha r\ln r+\beta r^{-3}\ln r)(C_3\sin\theta-C_4\cos\theta)+\\
&E\theta\Big(\alpha r-\beta r^{-3}+\frac{1}{2}r^{-1}\Big)(C_3\cos\theta+C_4\sin\theta)\\
u_r =& \Big(\frac{1-3\nu}{2}\alpha r^2+\frac{1+\nu}{2}\beta r^{-2}+\frac{1-\nu}{2}\ln r\Big)(C_2\cos\theta+C_1\sin\theta)+\Big[\frac{1-3\nu}{2}\alpha r^2\ln r+\\
&\frac{7\nu-5}{4}\alpha r^2-\frac{1+\nu}{2}\beta r^{-2}\ln r-\frac{1+\nu}{4}\beta r^{-2}+\frac{1+\nu}{2}\ln r-\frac{1}{2}(\ln r)^2\Big](C_3\cos\theta+C_4\sin\theta)-\\
&\frac{1}{2E}\Big[C_5(1-3\nu)r^2-C_7(1+\nu)r^{-2}-\frac{2(1+\nu)(3-\nu)}{1-\nu}C_9\ln r\Big]\sin\theta+\\
&\frac{1}{2E}\Big[C_6(1-3\nu)r^2-C_8(1+\nu)r^{-2}-\frac{2(1+\nu)(3-\nu)}{1-\nu}C_{10}\ln r\Big]\cos\theta-\\
&\theta\Big[(C_1+C_{11})\cos\theta+(C_2+C_{12})\sin\theta+\Big(\frac{1-3\nu}{2}\alpha r^2+\frac{1+\nu}{2}\beta r^{-2}+\frac{1-\nu}{2}\ln r\Big)\times\\
&(C_4\cos\theta-C_3\sin\theta)\Big]+\frac{2}{1-\nu}\ln r(C_{12}\cos\theta-C_{11}\sin\theta)+\frac{\theta^2}{2}(C_3\cos\theta+C_4\sin\theta)+\\
&C_{13}\sin\theta+C_{14}\cos\theta\\
u_\theta =& \Big(-\frac{1+\nu}{2}+\frac{5+\nu}{2}\alpha r^{-2}+\frac{1+\nu}{2}\beta r^{-2}-\frac{1-\nu}{2}\ln r\Big)(C_1\cos\theta+C_2\sin\theta)+\\
&\Big[-\frac{5+\nu}{2}\alpha r^2\ln r+\frac{13+\nu}{4}\alpha r^2+\frac{1+\nu}{2}\beta r^{-2}\ln r+\frac{1+\nu}{4}\beta r^{-2}-\frac{1}{2}(\ln r)^2\Big]\times
\end{aligned}$$

$$(C_4\cos\theta - C_3\sin\theta) + \frac{1}{2E}\Big[C_5(5+\nu)r^2 - C_7(1+\nu)r^{-2} + \frac{2(1+\nu)(3-\nu)}{1-\nu}C_9\ln r\Big]\cos\theta +$$

$$\frac{1}{2E}\Big[C_6(5+\nu)r^2 - C_8(1+\nu)r^{-2} + \frac{2(1+\nu)(3-\nu)}{1-\nu}C_{10}\ln r\Big]\sin\theta + \frac{(1+\nu)^2}{E(1-\nu)}\times$$

$$(C_9\cos\theta + C_{10}\sin\theta) - \frac{2\ln r}{1-\nu}(C_{11}\cos\theta + C_{12}\sin\theta) - \frac{1+\nu}{1-\nu}(C_{11}\cos\theta + C_{12}\sin\theta) +$$

$$\theta\Big[(C_2 + C_{12})\cos\theta - (C_1 + C_{11})\sin\theta + \Big(-\frac{1+\nu}{2} + \frac{5+\nu}{2}\alpha r^2 + \frac{1+\nu}{2}\beta r^{-2} - \frac{1-\nu}{2}\ln r\Big)\times$$

$$(C_3\cos\theta + C_4\sin\theta)\Big] + \frac{\theta^2}{2}(C_4\cos\theta - C_3\sin\theta) + C_{13}\cos\theta - C_{14}\sin\theta \tag{14}$$

此解目前在弹性力学书籍和有关文献中未见有过表述，即使用极坐标中应力函数的通解 [1,7] 也求不出以上的应力表达式，因此可以看成是一个新解，其正确性可由平衡方程、物理方程和相容方程等来验证，利用 (14) 可以求解一些具有明确物理意义的问题，下面试举两例.

3 例 题

例 1 厚壁圆筒，内半径为 a, 外半径为 b, 受内水压力 $q = \gamma ga(1-\sin\theta)$, 外壁固定 (图 2). 此为一混合问题，现将 q 分解成两部分

$$q_1 = \gamma ga, \quad q_2 = -\gamma ga\sin\theta$$

对于 q_1 情况，实际为厚壁圆筒受均布内压力，其解很易求得. 现在主要讨论 q_2 情况，此时边界条件为

$$\tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_r = -rga\sin\theta, \quad 当\ r = a$$
$$u_r = u_\theta = 0, \quad 当\ r = b$$

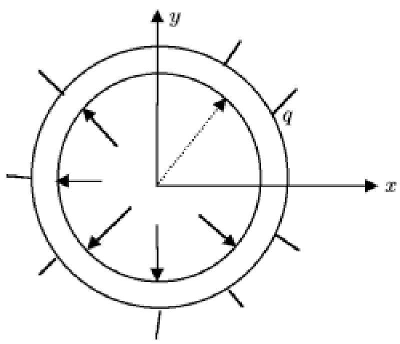

图 2 厚壁圆筒受内水压力

Fig.2 Thick-walled cylinder bf subjected to internal water pressure

将式 (11) 代入边界条件，可得有关常数

$$C_1 = C_3 = C_4 = C_6 = C_8 = C_{10} = C_{12} = C_{14} = 0, \quad C_{11} = -C_1$$

$$EC_1\alpha + C_5 = \frac{(1+\nu)[(1-\nu)a^2 + (1+\nu)b^2]rga^2}{4[(3-\nu)b^4 + (1+\nu)a^4]}$$

$$EC_1\beta - C_7 = -\frac{[(1-\nu)(3-\nu)b^2 - (1+\nu)^2a^2]rga^2b^2}{4[(3-\nu)b^4 + (1+\nu)a^4]}$$

$$\frac{1}{2}EC_1 + C_9 = -\frac{1}{4}(1-\nu)rga^2$$

$$C_{13} = \frac{(1+\nu)^2[(1-3\nu)b^4 - 2(1-\nu)a^2b^2 + (1+\nu)a^4]rga^2}{8E[(3-\nu)b^4 + (1+\nu)a^4]} - \frac{\ln b}{4E}(1+\nu)(\nu-3)rga^2$$

再代入式 (14), 经整理可得解为

$$\sigma_r = -\frac{rga^2\sin\theta}{4[(3-\nu)b^4+(1+\nu)a^4]}\{(1+\nu)[(1-\nu)a^2+(1+\nu)b^2]r+[(1-\nu)(3-\nu)b^2-$$
$$(1+\nu)^2a^2]a^2b^2r^{-3}+(3+\nu)[(3-\nu)b^4+(1+\nu)a^4]r^{-1}\}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{rga^2\sin\theta}{4[(3-\nu)b^4+(1+\nu)a^4]}\{3(1+\nu)[(1-\nu)a^2+(1+\nu)b^2]r-[(1-\nu)(3-\nu)b^2-$$
$$(1+\nu)^2a^2]a^2b^2r^{-3}-(1-\nu)[(3-\nu)b^4+(1+\nu)a^4]r^{-1}\}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{rga^2\cos\theta}{4[(3-\nu)b^4+(1+\nu)a^4]}\{(1+\nu)[(1-\nu)a^2+(1+\nu)b^2]r+[(1-\nu)(3-\nu)b^2-$$
$$(1+\nu)^2a^2]a^2b^2r^{-3}-(1-\nu)[(3-\nu)b^4+(1+\nu)a^4]r^{-1}\}$$

$$u_r = \frac{rga^2\sin\theta}{8E[(3-\nu)b^4+(1+\nu)a^4]}\{(1+\nu)^2[(1-3\nu)b^4-2(1-\nu)a^2b^2+(1+\nu)a^4]-$$
$$2(1+\nu)(\nu-3)[(3-\nu)b^4+(1+\nu)a^4]\ln b/r-(1-3\nu)(1+\nu)[(1-\nu)a^2+$$
$$(1+\nu)b^2]r^2+(1+\nu)[(1-\nu)(3-\nu)b^2-(1+\nu)a^2]a^2b^2r^{-2}\}$$

$$u_\theta = \frac{rga^2\cos\theta}{8E[(3-\nu)b^4+(1+\nu)a^4]}\{-(1+\nu)^2[(5+\nu)b^4+2(1-\nu)a^2b^2+(1+\nu)a^2]-$$
$$2(1+\nu)(\nu-3)[(3-\nu)b^4+(1+\nu)a^4]\ln b/r+(5+\nu)(1+\nu)[(1-\nu)a^2+$$
$$(1+\nu)b^2]r^2-(1+\nu)[(1-\nu)(3-\nu)b^2-(1+\nu)^2a^2]a^2b^2r^{-2}\}$$

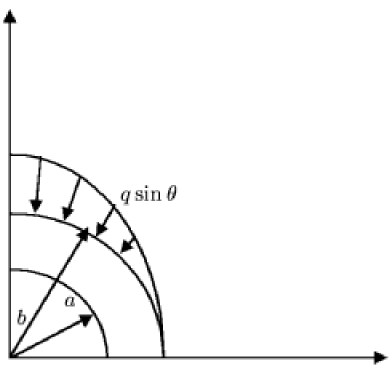

图 3 四分之一圆环受径向分布力

Fig.3 Quarter hoop subjected to radial distributed force

讨论：本例中的应力分量最后形式为 $\sigma_r = f_1(r)\sin\theta$, $\sigma_\theta = f_2(r)\sin\theta$, $\tau_{r\theta} = f_3(r)\cos\theta$, 与用应力函数 $\Phi = f(r)\sin\theta$ 求出的应力分量表达式类似 [1]. 在应力函数中，是将 Φ 代入相容方程，从而求得 $f(r)$, 进而得到应力表达式, 因此表面看起来, 只要应力具有如上形式，均应包含在由 Φ 求得的应力表达式中, 但从本例看出情况并非如此, 在由 Φ 求得应力表达式中有关系 $f_1(r) = -f_3(r)$, 而在本例中 $f_1(r) \neq -f_3(r)$. 因此本例进一步说明，本文所得的解是很难由应力函数法得到的.

例 2 一悬臂的四分之一圆环, 在外边缘受有径向分布力 $q\sin\theta$, 其应力边界条件为

$$\tau_{r\theta} = \sigma_r = 0, \quad 当\ r = a$$
$$\tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_r = -q\sin\theta, \quad 当\ r = b$$
$$\int_a^b \sigma_\theta \mathrm{d}r = \int_a^b \sigma_\theta r \mathrm{d}r = \int_a^b \tau_{r\theta}\mathrm{d}r = 0, \quad 当\ \theta = 0$$

将式 (14) 前三式代入即可得有关常数，再将常数回代入 (14) 前三式可得应力表达式

$$\sigma_r=\frac{qb\sin\theta}{2[(b^2+a^2)\ln b/a-(b^2-a^2)]^2}\Big\{\Big[(a^2\ln a-b^2\ln b)+\frac{1}{2}(b^2-a^2)+$$

$$(a^2\ln a+b^2\ln b)\ln b/a\Big]r-\Big[(a^2\ln b-b^2\ln a)-\frac{1}{2}(b^2-a^2)+(a^2\ln b+b^2\ln a)\ln b/a\Big]a^2b^2r^{-3}+$$

$$[2a^2b^2\ln b/a-\frac{1}{2}(b^4-a^4)]r^{-1}\Big\}+\frac{qb(a^2+b^2)}{(b^2+a^2)\ln b/a-(b^2-a^2)}\Big[\Big(\alpha r-\beta r^{-3}+\frac{1}{2}r^{-1}\Big)\theta\cos\theta+$$

$$(\alpha r\ln r+\beta r^{-3}\ln r-2\alpha r-r^{-1}\ln r+2\alpha a^2r^{-1}+r^{-1}\ln a)\sin\theta\Big]$$

$$\sigma_\theta=\frac{qb\sin\theta}{2[(b^2+a^2)\ln b/a-(b^2-a^2)]^2}\Big\{3\Big[(a^2\ln a-b^2\ln b)+\frac{1}{2}(b^2-a^2)+(a^2\ln a+b^2\ln b)\ln b/a\Big]r+$$

$$\Big[(a^2\ln b-b^2\ln a)-\frac{1}{2}(b^2-a^2)+(a^2\ln b+b^2\ln a)\ln b/a\Big]a^2b^2r^{-3}+\Big[2a^2b^2\ln b/a-$$

$$\frac{1}{2}(b^4-a^4)\Big]r^{-1}\Big\}+\frac{qb(a^2+b^2)}{(b^2+a^2)\ln b/a-(b^2-a^2)}\Big[\Big(3\alpha r+\beta r^{-3}+\frac{1}{2}r^{-1}\Big)\theta\cos\theta-$$

$$\Big(-3\alpha r\ln r+\beta r^{-4}\ln r+2\alpha r+\frac{1}{2}r^{-1}\Big)\sin\theta\Big]$$

$$\tau_{r\theta}=-\frac{qb\cos\theta}{2[(b^2+a^2)\ln b/a-(b^2-a^2)]^2}\Big\{\Big[(a^2\ln a-b^2\ln b)+\frac{1}{2}(b^2-a^2)+\Big(a^2\ln a+b^2\ln b\Big)\ln b/a\Big]r-$$

$$\Big[(a^2\ln b-b^2\ln a)-\frac{1}{2}(b^2-a^2)+(a^2\ln b+b^2\ln a)\ln b/a\Big]a^2b^2r^{-3}+\Big[2a^2b^2\ln b/a-$$

$$\frac{1}{2}(b^4-a^4)\Big]r^{-1}\Big\}+\frac{qb(a^2+b^2)}{(b^2+a^2)\ln b/a-(b^2-a^2)}\Big[\Big(\alpha r-\beta r^{-3}+\frac{1}{2}r^{-1}\Big)\theta\sin\theta-$$

$$(\alpha r\ln r+\beta r^{-3}\ln r)\cos\theta\Big]$$

对于位移，只要利用固定端位移边界条件就可定出式 (14) 中位移表达式里的有关常数，由于式子较长，不再列出.

本例所受荷载可以看成是均布荷载 q 在径向的分量，因此有明确的物理意义，对于切向分量 $q\cos\theta$, 显然也可由式 (14) 求解，两者叠加，即可求得四分之一曲梁承受向下均布荷载的解. 事实上这种情况也可在本例中直接修改应力边界条件求得.

4 结束语

在现有有关 Hamilton 体系下的分离变量法中，一般仅考虑齐次边界条件情况，很少涉及非齐次边界，所得的结果一般也是经典弹性力学书籍所有的，从而也就不能充分显示弹性力学 Hamilton 体系的优越性. 本文放弃齐次边界条件的约束，得到了新解，是对 Hamilton 体系下分离变量法的一个发展. 同时也说明了 Hamilton 体系下的分离变量法除了求解混合问题方便、有规律性外，在寻找弹性力学解析解方面是一个很有潜力的方法，相信随着研究的深入，还可以找出更多的新解.

参 考 文 献

1 Timoshenko SP, Goodier JN. Theory of Elasticity. Third. New York: McGraw-Hill, 1970

2 徐芝纶. 弹性力学. 北京：人民教育出版社，1979 (Xu Zhilun. Theory of Elasticity. Beijing: People Education Press, 1979 (in Chinese))

3 钟万勰. 条形域弹性平面问题与哈密尔顿体系. 大连理工大学学报，1991, 31(4): 373~384 (Zhong Wanxie. Plane elasticity problem in strip domain and Hamilton system. *Journal of Dalian University of Technology*, 1991, 31(4): 373~384 (in Chinese))

4 钟万勰. 分离变量法与哈密尔顿体系. 计算结构力学及其应用，1991, 8(3): 229~240 (Zhong Wanxie. Method of separation of variables and Hamiltonian system. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1990, 8(3): 229~240 (in Chinese))

5 钟万勰. 弹性力学求解新体系. 大连：大连理工大学出版社，1995. 36~222 (Zhong Wanxie. A New Systematic Methodology for Theory of Elasticity. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1995. 36~222 (in Chinese))

6 钟万勰, 徐新生, 张洪武. 弹性曲梁问题的直接法. 工程力学，1996, 13(4): 1~8 (Zhong Wanxie, Xu Xinsheng, Zhang Hongwu. On a direct method for the problem of elastic curved beams. *Engineering Mechanics*, 1996, 13(4): 1~8 (in Chinese))

7 谢贻权，林钟祥，丁皓江. 弹性力学. 杭州：浙江大学出版社，1988. 42~46 (Xie Yiquan, Lin Zhongxiang, Ding Haojiang. Mechanics of Elasticity. Hangzhou: Zhejiang University Press, 1988. 42~46 (in Chinese))

A NEW SOLUTION OF ELASTICITY IN POLAR COORDINATE

Zhou Jianfang

(*Hohai University* (*Changzhou*), *Changzhou* 213022, *China*)

Zhuo Jiashou

(*College of Civil Engineering, Hohai University, Nanjing* 210098, *China*)

Abstract In the present method of variables of separation of elastic mechanics in Hamilton system, homogeneous boundary conditions are only considered, nonhomogeneous boundary conditions are hardly taken into account, and the solutions are also found in the books of classical mechanics of elasticity. In this paper, the method of separation of variables in Hamilton system is extended, i.e. it is applied to nonhomogeneous boundary conditions. It is different form the classical method of separation of variables of mathematical physics problems, and it does not first homogenized nonhomogeneous boundary conditions, but solves equation, then boundary conditions are satisfied. A new solution of elasticity in polar coordinate is obtained in such method. A group of elasticity problem such as thick-walled cylinder subjected to internal water pressure that water weight is reckoned in can be solved by using this new solution. Two specific examples are given. The results those are obtained in this paper are not only of theoretical significance but also of applied significance.

Key words polar coordinate, Hamilton system, separation of variables, a new solution

Received 29 April 1999, revised 6 September 2000.