第 33 卷 第 5 期 力 学 学 报 Vol. 33, No.5
2001 年 9 月 ACTA MECHANICA SINICA Sep., 2001

特定抽吸／喷注下幂律流体平板边界层问题

郑连存　邓学蓥*　范玉妹
(北京科技大学数学力学系, 北京 100083)
*(北京航空航天大学流体力学研究所, 北京 100083)

摘要 研究幂律流体中一类具有抽吸／喷注影响的平板边界层问题, 利用微分方程相似理论和打靶法技巧, 对于幂律指数 n 及抽吸／喷注参数 C 的不同值, 数值模拟得到了流场剪切应力分布.

关键词 边界层, 相似解, 抽吸／喷注, 打靶法技巧

引 言

由于边界层理论在描述黏性流体流动中的重要, 对边界层问题的研究始终受到众多科学家和工程工作者的重视, 发表了很多极好的论文和著作 [1~3].

抽吸 (或喷注) 对于增加 (或减少) 拖拽力以及控制边界层的分离具有重要意义, 对于多孔介质中流动的情况更受到人们的特别关注 [2]. 本文研究幂律流体 (包括牛顿流体) 中具有抽吸／喷注影响的平板边界层问题, 探讨幂律指数、抽吸／喷注参数对于壁摩擦及剪切应力分布的影响 (图 1).

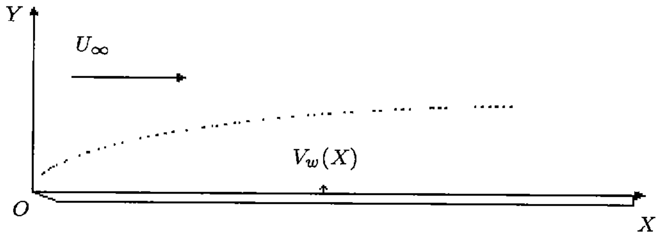

图 1 具有吸抽／喷注影响的边界层
Fig.1 Boundary layer with suction/injection

1 边界层方程和相似变换

1.1 边界层方程

考虑具有常速度 U_∞ 的均匀流绕流一个半无限大多孔介质平板, 来流的边界层方程为 [3~5]

$$U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}=\frac{\partial}{\partial Y}\left(\gamma\left|\frac{\partial U}{\partial Y}\right|^{n-1}\frac{\partial U}{\partial Y}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}=0 \tag{2}$$

这里, X 轴和 Y 轴分别取为平行于和垂直于平板, U 和 V 分别为平行于和垂直于平板的速

1999-09-25 收到第一稿, 2001-06-05 收到第三稿.

度分量，$\dfrac{\partial U}{\partial Y}$ 为应变速度，$\tau=\gamma\left|\dfrac{\partial U}{\partial Y}\right|^n\dfrac{\partial U}{\partial Y}, 0<n\le 1$ 为剪切应力，$\gamma\left|\dfrac{\partial U}{\partial Y}\right|^{n-1}$ 为运动黏度. $n=1$ 相应于牛顿流体，$0<n<1$ 被用来描述拟塑性非牛顿流体，相应的边界条件为

$$U|_{Y=0}=0,\quad V|_{Y=0}=V_w(X),\quad U\,|_{Y=+\infty}=U_\infty \tag{3}$$

边界层方程出现了形如 $\dfrac{\partial}{\partial Y}\left(\left|\dfrac{\partial U}{\partial Y}\right|^{n-1}\dfrac{\partial U}{\partial Y}\right)$ 的导数项，方程呈现为超非线性，很难直接对其进行理论的分析和数值模拟. 引入适当的相似变换可以使问题变得简单，从而使问题的研究得以深入[3]. 要使问题存在相似解，$V_w(X)$ 必须满足某些特定的条件. 以下来推导相似解方程及确立 $V_w(X)$ 应满足的相似律条件.

1.2 流函数和相似变量

引入流函数 $\psi(X,Y)$ 和相似变量 η, $\psi=AX^\alpha f(\eta)$, $\eta=BX^\beta Y$. 其中 A,B,α 和 β 为待定常数，$f(\eta)$ 代表无量纲流函数. 经计算，置 $\beta=-\alpha$, $AB=U_\infty$, $\alpha=\dfrac{1}{n+1}$, $B=\left(\dfrac{U_\infty^{2-n}}{(n+1)\gamma}\right)^{1/(n+1)}$, 并取 $V_w(X)=V_0X^{-n/(n+1)}$ (V_0 为任意常数), 得到相似解方程

$$-f(\eta)f''(\eta)=(|f''(\eta)|^{n-1}f''(\eta))' \tag{4}$$

$$f(0)=-C,\quad f'(0)=0,\quad f'(+\infty)=1 \tag{5}$$

其中 $C=(n+1)BV_0/U_\infty$ 为抽吸 / 喷注参数，C 可以为正数、负数、或零. 当 $n=1, C=0$ 时，方程 (4), (5) 即退化为经典的布拉修斯边界层问题. 物理上讲，$C>0$ 意味着流体被喷注到边界层，$C<0$ 意味着存在边界层对流体的吸附.

1.3 Crocco 变量和相似变换

引入函数 $x=f'(\eta)$ $(0\le\eta<\infty)$ 的反函数 $\eta=\phi(x), 0\le\eta<+\infty$, 并定义：$g(x)=[f''(\phi(x))]^n, x\in[0,1)$, 将 $\eta=\phi(x), 0\le\eta<+\infty$ 嵌入 (4), (5), 应用连锁规则，得到

$$g''(x)=-xg^{-1/n}(x),\quad 0<x<1 \tag{6}$$

$$g'(0)=C,\quad g(1)=0 \tag{7}$$

非线性两点边值问题 (6), (7) 中，无量纲切向速度 $x(=f')$ 做为自变量，无量纲剪切应力 $g(x)(=(f'')^n)$ 做为依赖变量称之为 Crocco 变量. 显然，由推导过程可知，只有 (6), (7) 的正解才有实际的物理意义.

2 数值结果和讨论

利用打靶法技巧, 对于参数 C,n 的几组不同值, 数值求解奇异非线性两点边值问题 (6), (7), 计算结果见图 2~ 图 5.

由图可见，随着参数 C 的增加，壁摩擦系数 κ ($\kappa=g(0)=(f''(0))^n$) 的值是单调递减的，这意味着壁摩擦力随着喷注的增加而减小，随着吸附的增加而增大；当 $C\le 0$ 时，在整个区间

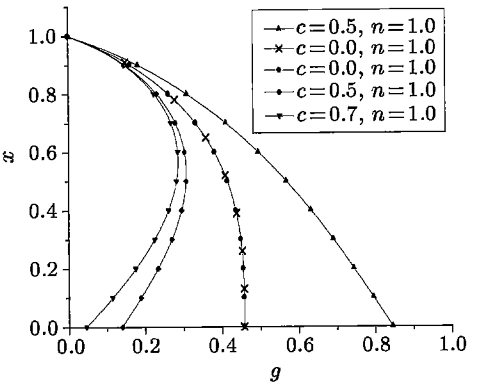

图 2 吸附 / 喷注对于剪切力的影响

Fig.2 The influence of suction/injection on shear force

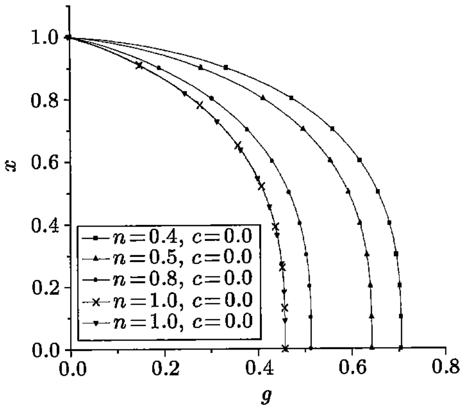

图 3 无喷注时，幂律指数对于剪切力的影响

Fig.3 The influence of power law parameter on shear force (no suction/injection)

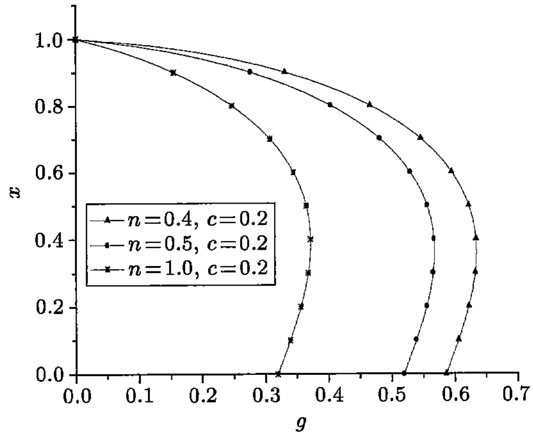

图 4 有喷注时，幂律指数对于剪切力的影响

Fig.4 The influence of power law parameter on shear force (with injection)

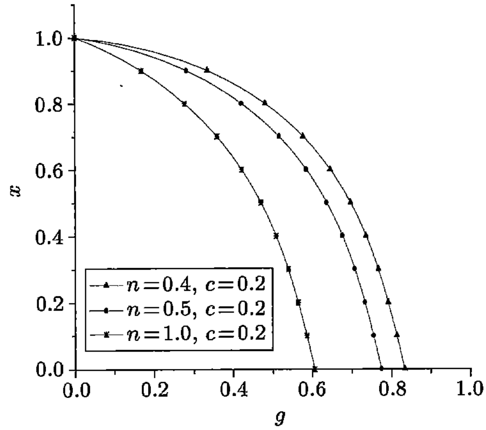

图 5 有吸附时，幂律指数对于剪切力的影响

Fig.5 The influence of power law parameter on shear force (with injection)

$[0,1]$ 内无量纲剪切应力 $g(x)$ 随无量纲切向速度 x 的增加而单调递减，当 $C>0$ 时， $g(x)$ 最初随 x 的增加而增大，到某点达到极大值后又随 x 的增加而单调递减；当 $x=1$ 时，边界层流体速度达到主流速度，流体不再受到壁面摩擦阻力的影响，故无量纲剪切应力 $g(1)=0$.

由图 2 可以看出，伴随着 C 增大达到某一临界值 C^*, κ 的值将单调递减到 0; 超过临界值 C^* 时，壁面临近处流体将不再受到壁面摩擦阻力的影响，这意味着由于喷注的影响使流体脱离物面而造成边界层的分离，即出现了所谓的边界层被“吹脱”. 对于牛顿流体，这个临界值为 $0.875\,74\cdots$ (文献 [2]). 对于非牛顿流体，该临界值将随 n 的不同而异.

由图 3～ 图 5 可见，对于确定的参数 C 值， κ 和 $g(x)$ 的值随参数 n 的增加而单调减小，表明壁摩擦力和无量纲剪切应力 $g(x)$ 是幂律指数 n 的减函数，即 “幂律” 指数小的 n 幂律流体对壁面和边界层内流场施有更大的剪切力.

当 $n=1$, $C=0$ 时，方程 (4), (5) 退化为经典的布拉修斯问题. 图 2, 图 3 中给出了利用本文方法求解 (6), (7) 和经典布拉修斯解的比较，其中带 $\times$ 号标记的解为利用龙格库塔方法计算

得到的经典布拉修斯解, 另一解为利用本文方法由求解两点边值问题 (6), (7) 得到的, 可以看出两组解吻合得很好.

参 考 文 献

1 Schlichting H. Boundary Layer Theory. New York: McGraw-Hill, 1979

2 Kassoy DR. On laminar boundary-layer blow-off. *J Fluid Mech,* 1971, 48(2): 209~228

3 Nachman A, Callegari A. A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluids. *SIAM J Appl Math,* 1980, 38(2): 275~281

4 Zheng Liancun, Ma Lianxi, He Jicheng. Bifurcation solutions to a boundary layer problem arising in the theory of pseudo-plastic fluids. *Acta Mathematica Scientica,* 2000, 20(1): 19~26

5 Zheng Liancun, He Jicheng. Existence and non-uniqueness of positive solutions to a nonlinear boundary value problem in the theory of viscous fluids. *Dynamic Systems and Applications,* 1999, 8: 133~146

FLAT PLATE BOUNDARY LAYER PROBLEMS WITH SPECIAL SUCTION/INJECTION CONDITIONS IN POWER LAW FLUID

Zheng Liancun Deng Xueying* Fan Yumei

(Department of Mathematics & Mechanics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083*, China)*

* *(Institute of Fluid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing* 100083*, China)*

Abstract The boundary layer problems for uniform power law flow past a semi-infinite flat plate whose surface exist special kind of suction/injection of $V_w(X)$ are studied. The problems are difficult to study because there exist a strong nonlinear term of the form $\frac{\partial}{\partial Y}\left(\left|\frac{\partial U}{\partial Y}\right|^{n-1}\frac{\partial U}{\partial Y}\right)$ in boundary layer equations. By introducing a stream function $\psi = AX^{\alpha}f(\eta)$, similarity variables $\eta = BX^{\beta}Y$, letting $\beta = -\alpha$, $AB = U_{\infty}$, $\alpha = \frac{1}{n+1}$, $B = \left(\frac{U_{\infty}^{2-n}}{(n+1)\gamma}\right)^{1/(n+1)}$, $V_w(X) = V_0X^{-n/(n+1)}$ (V_0 is a constant), and further, introducing the reverse function $\eta = \phi(x)$, of $x = f'(\eta)$ $(0 \le \eta < \infty)$ and letting $g(x) = [f''(\phi(x))]^n$, $x \in [0,1)$, we change the boundary layer equations into a class of singular nonlinear differential equations for two-point boundary value problems. The skin friction and shear stress distributions are numerically obtained for several sets of parameters of suction/injection C and power law n, it is shown that the skin friction decreases with an increase in the suction/injection parameter C, this behavior is qualitatively true even with the power law parameter n. For $C \le 0$, the non-dimensional shear stress $g(x)$ is decreasing in all interval of $[0,1]$, but for $C > 0$, $g(x)$ is increasing and arrives its maximum, and is then decreasing to zero at $x = 1$. For each fixed power law n $(0 < n \le 1)$, the solutions of the boundary value problems do not exist for values of C larger than a positive critical value C^*, it is known as the boundary layer blow-off.

Key words boundary layer, similarity solutions, suction/injection, shooting technique

Received 25 September 1999, revised 5 June 2001.