

亏损系统模态优化控制 Riccati 方程的求解方法¹⁾

陈宇东 陈塑寰 连华东

(吉林大学力学系, 长春 130025)

摘要 讨论亏损重复特征值的 Riccati 方程的模态控制算法. 由于亏损特征值的 Jordan 块矩阵的阶数 m 小于状态方程的阶数 n , 即 $m \ll n$, 所提出的模态控制算法可极大地减少计算工作量. 其中的数值例子说明了该方法的有效性.

关键词 模态优化控制算法, Riccati 方程, 亏损系统

引 言

在振动优化控制中, Riccati 方程起着重要作用. 已经有许多方法用来求解 Riccati 方程. 其中主要算法包括矩阵变换法^[1,2], 特征向量法^[2,3], Schur 方法^[1] 和迭代法^[4]. 矩阵变换法是将问题变为 $2n$ 阶矩阵的求解; 特征向量法需求解 $2n$ 阶矩阵的全部特征解, 这对于复杂问题是非常困难的. 迭代法虽然比较简单, 但其结果却与初值的选择有关. 最近, 文献^[5] 提出了求解 Riccati 方程的块同时迭代算法, 它既可以节省计算机的内存, 也可以提高计算的效率.

应当指出, 上述有关优化控制的讨论都局限于非亏损系统的问题, 然而, 在工程实际问题中, 例如大阻尼系统, 空气弹性的颤振分析等问题中, 存在不完整的特征模态, 即亏损系统^[6,7]. 因此有必要讨论亏损系统优化控制的 Riccati 方程求解方法.

1 亏损系统模态控制 Riccati 方程的求解算法

考虑系统控制状态方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{Z}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{A}$ 为状态矩阵, $\mathbf{X}(t) \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 为状态向量, $\mathbf{Z}(t)$ 为输入向量, $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^{q \times 1}$ 为输出向量, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 和 $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{q \times n}$ 为执行器的分布矩阵和传感器的分布矩阵.

应用模态变换

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{U}\boldsymbol{\xi}(t) \quad (2)$$

方程 (1) 变为

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\xi}}_m \\ \dots \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_m \\ \dots \\ \boldsymbol{\xi}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V}_m^H \\ \dots \\ \mathbf{V}_d^H \end{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{Z}(t) \quad (3)$$

2000-05-18 收到第一稿, 2001-03-16 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (19872028).

和

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}[\mathbf{U}_m, \mathbf{U}_{n-m}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_m \\ \dots \\ \boldsymbol{\xi}_d \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{U}_m\boldsymbol{\xi}_m(t) + \mathbf{C}\mathbf{U}_{n-m}\boldsymbol{\xi}_d(t) \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{J}_m = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}_{m \times m} \quad (5)$$

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} \lambda_{m+1} & & & 0 \\ & \lambda_{m+2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

在方程 (5) 中, 我们假定 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = \lambda$ 为亏损的 m 重特征值, 而其余的 $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \dots, \lambda_n$ 是孤立特征值, 相应的左、右模态矩阵为 $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_m, \mathbf{V}_{n-m}]$, $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_m, \mathbf{U}_{n-m}]$, $\boldsymbol{\xi}_m$ 和 $\boldsymbol{\xi}_d$ 为相应的模态坐标.

由方程 (3) 和 (4), 我们得到模态控制方程

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_m = \mathbf{J}_m\boldsymbol{\xi}_m + \mathbf{V}_m^H \mathbf{B} \mathbf{z}_m(t) \quad (7)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_d = \mathbf{A}_d\boldsymbol{\xi}_d + \mathbf{V}_{n-m}^H \mathbf{B} \mathbf{z}_d(t) \quad (8)$$

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{C}\mathbf{U}_m\boldsymbol{\xi}_m \quad (9)$$

$$\mathbf{y}_d = \mathbf{C}\mathbf{U}_{n-m}\boldsymbol{\xi}_d \quad (10)$$

方程 (7) 和 (8) 可写成

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_m = \mathbf{J}_m\boldsymbol{\xi}_m + \mathbf{P}_m\mathbf{z}_m(t), \quad \dot{\boldsymbol{\xi}}_d = \mathbf{A}_d\boldsymbol{\xi}_d + \mathbf{P}_d\mathbf{z}_d(t) \quad (11)$$

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{C}_m\boldsymbol{\xi}_m, \quad \mathbf{y}_d = \mathbf{C}_d\boldsymbol{\xi}_d \quad (12)$$

式中

$$\mathbf{P}_m = \mathbf{V}_m^H \mathbf{B}, \quad \mathbf{P}_d = \mathbf{V}_{n-m}^H \mathbf{B} \quad (13)$$

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{C}\mathbf{U}_m, \quad \mathbf{C}_d = \mathbf{C}\mathbf{U}_{n-m} \quad (14)$$

方程 (11) 和 (12) 说明, 状态方程 (1) 已经被变换为两组模态坐标方程, 其中第一组在亏损重特征值的子空间, 第二组在孤立特征值的子空间. 虽然方程 (7) 仍是耦合的, 但 $\mathbf{J}_m$ 的阶数为 $m \times m$, $m \ll n$. 基于方程 (11) 的模态优化控制方程的求解显然比基于原状态方程的求解简单得多. 此时, 就可以应用常用的优化控制算法, 比如 Potter 方法^[2]. 在下面, 我们将 Potter 方法推广用来求解模态优化控制的 Riccati 方程.

目标是确定优化控制使如下模态二次性能指标为最小^[8]

$$J_m = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}_m^T(t_f)\mathbf{H}_m\boldsymbol{\xi}_m(t) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} [\boldsymbol{\xi}_m^T(t)\mathbf{Q}_m\boldsymbol{\xi}_m + \mathbf{z}_m^T(t)\mathbf{R}_m\mathbf{z}_m(t)]dt \quad (15)$$

因此, 模态优化控制为

$$z_m(t) = -R_m^{-1}P_m^T K_m(t)\xi_m(t) = G_m \xi_m(t) \quad (16)$$

式中模态增益矩阵 G_m 为

$$G_m = -R_m^{-1}P_m^T K_m(t) \quad (17)$$

模态 Riccati 矩阵 $(K_m)_{m \times m}$ 满足 Riccati 方程

$$\dot{K}_m(t) = -Q_m - J_m^T K_m(t) - K_m(t)J_m + K_m(t)P_m R_m^{-1}P_m^T K_m(t) \quad (18)$$

如果 Q_m, R_m, J_m 和 P_m 为常数, 则模态 Riccati 矩阵 $K_m(t) \rightarrow K_m = \text{常数}$, 当 $t_f \rightarrow \infty$, 此时, 方程 (18) 变为

$$-Q_m - J_m^T K_m - K_m J_m + K_m P_m R_m^{-1}P_m^T K_m = 0 \quad (19)$$

如果 Potter 方法用于求解方程 (19), 我们必须求解如下特征问题, 并取有正实部的特征值

$$\begin{bmatrix} J_m^T & \vdots & Q_m \\ \dots & \vdots & \dots \\ P_m R_m^{-1}P_m & \vdots & -J_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ \dots \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ \dots \\ F \end{bmatrix} J_1 \quad (20)$$

模态 Riccati 矩阵方程 (19) 的稳定解为

$$K_m = EF^{-1} \quad (21)$$

方程 (20) 说明, 仅需要计算 $2m$ 对特征解.

由方程 (21), 我们得到模态增益矩阵

$$G_m = -R_m^{-1}P_m^T EF^{-1} \quad (22)$$

由方程 (16), 优化模态反馈控制为

$$z_m(t) = -R_m^{-1}P_m^T EF^{-1}\xi_m(t) = G_m \xi_m(t) \quad (23)$$

将方程 (23) 代入方程 (7), 我们可得到相应 m 个重特征值的闭环模态方程

$$\dot{\xi}_m = J_m \xi_m + V_m^H B z_m(t) = (J_m - V_m^H B R_m^{-1}P_m^T EF^{-1})\xi_m \quad (24)$$

其相应的特征方程为

$$\det [J_m - V_m^H B R_m^{-1}P_m^T EF^{-1} - \rho I] = 0 \quad (25)$$

由方程 (25) 可求出 m 个闭环特征值.

应用广义模态的正交条件, 相应的实际反馈控制为

$$Z_m(t) = -R_m^{-1}P_m^T EF^{-1}V_m^H x(t) \quad (26)$$

如果 Potter's 方程用来处理优化控制方程 (8), 则需要求解如下特征值问题

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \vdots & \mathbf{Q}_d \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{P}_d \mathbf{R}_d^{-1} \mathbf{P}_d & \vdots & -\mathbf{A}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_d \\ \dots \\ \mathbf{F}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_d \\ \dots \\ \mathbf{F}_d \end{bmatrix} \mathbf{J}_2 \quad (27)$$

式中 $\mathbf{A}_d, \mathbf{Q}_d, \mathbf{R}_d, \mathbf{E}_d$ 和 $\mathbf{F}_d$ 为与孤立特征值有关的相应符号, 相应的 Riccati 方程的解为

$$\mathbf{K}_d = \mathbf{E}_d \mathbf{F}_d^{-1} \quad (28)$$

相应的模态增益矩阵为

$$\mathbf{G}_d = -\mathbf{R}_d^{-1} \mathbf{P}_d^T \mathbf{E}_d \mathbf{F}_d^{-1} \quad (29)$$

其优化模态反馈控制为

$$\mathbf{Z}_d(t) = \mathbf{G}_d \boldsymbol{\xi}_d \quad (30)$$

由方程 (8), 我们可得到相应的闭环模态方程

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_d = \mathbf{A}_d \boldsymbol{\xi}_d + \mathbf{P}_d \mathbf{G}_d \boldsymbol{\xi}_d = (\mathbf{A}_d + \mathbf{P}_d \mathbf{G}_d) \boldsymbol{\xi}_d \quad (31)$$

其相应的特征方程为

$$\det[\mathbf{A}_d + \mathbf{P}_d \mathbf{G}_d - \rho \mathbf{I}] = 0 \quad (32)$$

实际的反馈控制为

$$\mathbf{Z}_d(t) = \mathbf{G}_d \mathbf{V}_{n-m}^H \mathbf{X}(t) \quad (33)$$

在方程 (1) 中的输入 $\mathbf{Z}(t)$ 为

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z}_m(t) + \mathbf{Z}_d(t) = \mathbf{G}_m \mathbf{V}_m^H \mathbf{X}(t) + \mathbf{G}_d \mathbf{V}_{n-m}^H \mathbf{X}(t) = (\mathbf{G}_m \mathbf{V}_m^H + \mathbf{G}_d \mathbf{V}_{n-m}^H) \mathbf{X}(t) \quad (34)$$

2 数值算例

考虑一般阻尼矩阵系统, 其状态矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2.8284 & -36 & 0 \\ 2.8284 & -6 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -81 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其控制矩阵 $\mathbf{B}$ 为

$$\mathbf{B} = [1, 1, 1, 1]^T$$

$\mathbf{A}$ 有两对二重特征值

$$\lambda_1 = -2.5 + 6.910141i, \quad \lambda_2 = -2.5 - 6.910141i$$

式中 $i = \sqrt{-1}$, 其 Jordan 形矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

右、左模态矩阵为

$$U = \begin{bmatrix} -0.767\,520 & 0.565\,130 - 0.255\,16i & -0.767\,520 & 0.565\,130 + 0.255\,16i \\ 0.045\,226 - 0.265\,742i & -0.265\,742 - 0.723\,783i & 0.045\,226 + 0.265\,742i & -0.265\,742 + 0.723\,783i \\ 0.035\,533 + 0.098\,216i & -0.088\,492 - 0.091\,033i & 0.035\,533 - 0.098\,216i & -0.088\,492 + 0.091\,033i \\ -0.082\,078 + 0.023\,150i & -0.053\,706 + 0.045\,145i & -0.082\,078 - 0.023\,150i & -0.053\,706 - 0.045\,145i \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -0.096\,852 & -0.010\,030 + 0.130\,224i & -0.096\,852 & -0.010\,030 - 0.130\,224i \\ 0.0057\,05 + 0.078\,851i & -0.080\,859 - 0.000\,375i & 0.005\,705 - 0.078\,851i & -0.080\,859 + 0.000\,375i \\ -0.161\,374 + 0.446\,047i & 0.788\,270 + 0.355\,813i & -0.161\,374 - 0.446\,047i & 0.788\,270 - 0.355\,813i \\ 0.838\,700 + 0.236\,553i & -164\,682 + 0.448\,675i & 0.838\,700 - 0.236\,553i & -164\,682 - 0.448\,675i \end{bmatrix}$$

在与 J_1 相应的子空间中的控制矩阵为

$$P_{m1} = V_{m1}^H B = \begin{bmatrix} 0.838\,700 - 0.236\,553i \\ -0.184\,395 - 0.174\,632i \end{bmatrix}$$

Potter 方法要求解如下特征值问题

$$\begin{bmatrix} J_{m1}^T & \vdots & Q_{m1} \\ \dots & \vdots & \dots \\ P_{m1} R_{m1}^{-1} P_{m1} & \vdots & -J_{m1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ \dots \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ \dots \\ F_1 \end{bmatrix} S$$

取 $H_{m1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Q_{m1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R_{m1} = 1$, 则有

$$\begin{bmatrix} -2.5 + 6.910\,141i & 0.0 & 1 & 0 \\ 1 & -2.5 + 6.910\,141i & 0 & 1 \\ 0.759\,375 & -0.1133\,425 + 0.190\,083i & 2.5 - 6.910\,141i & -1 \\ -0.113\,3425 + 0.190\,083i & 0.064\,497 & 0 & 2.5 - 6.910\,141i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ \dots \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ \dots \\ F_1 \end{bmatrix} S$$

我们只取有正实部的特征值

$$S_1 = 2.563\,360 - 6.771\,249i$$

$$S_2 = 2.456\,670 - 6.996\,915i$$

相应的模态矩阵为

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ \dots \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.068\,047 + 0.000\,000i & -0.066\,873 + 0.000\,000i \\ 0.001\,446 + 0.001\,725i & -0.005\,530 - 0.013\,108i \\ \dots & \dots \\ -0.344\,549 + 0.930\,985i & -0.331\,472 + 0.930\,020i \\ 0.098\,971 - 0.011\,052i & -0.142\,730 + 0.011\,968i \end{bmatrix}$$

模态 Riccati 矩阵的稳态解为

$$\mathbf{K}_{m1} = \mathbf{E}_1 \mathbf{F}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0.023\,357 + 0.064\,098i & -0.003\,624 + 0.003\,029i \\ -0.003\,564 + 0.002\,925i & 0.0226\,18 + 0.063\,667i \end{bmatrix}$$

相应的模态增益为

$$\mathbf{G}_{m1} = -\mathbf{R}_{m1}^{-1} \mathbf{P}_{m1}^T \mathbf{K}_{m1} = [-0.004\,573 - 0.058\,123i, 0.019\,045 + 0.006\,106i]$$

优化模态控制为

$$\mathbf{Z}_{m1}(t) = \mathbf{G}_{m1} \boldsymbol{\xi}_{m1}(t) = [-0.004\,573 - 0.058\,123i, 0.019\,045 + 0.006\,106i] \boldsymbol{\xi}_{m1}(t)$$

根据方程 (25) 可以求出闭环的特征值为

$$\rho_1 = -2.563\,360 + 6.771\,249i$$

$$\rho_2 = -2.456\,670 + 6.99\,6915i$$

利用上述相似的计算可得到相应于第二 Jordan 块的优化模态控制为

$$\mathbf{Z}_{m2}(t) = \mathbf{G}_{m2} \boldsymbol{\xi}_{m2}(t) = [-0.004\,573 + 0.058\,123i, 0.019\,045 - 0.006\,106i] \boldsymbol{\xi}_{m2}(t)$$

相应的闭环特征值为

$$\rho_3 = -2.563\,360 - 6.771\,249i$$

$$\rho_4 = -2.456\,670 - 6.996\,915i$$

3 结 语

本文针对亏损重特征值系统, 提出了在广义模态子空间中的优化模态控制 Riccati 方程的求解方法, 它具有计算简单的优点. 数值例子的结果表明, 优化控制的结果可使亏损系统变为非亏损系统, 动态特性由病态变为良态, 即原系统二对二重亏损特征值变为二对有负实部的共轭复根.

参 考 文 献

- 1 Laub A.J. A Schur method for solving algebraic Riccati equations. *IEEE Trans*, 1968, AC-24(6): 913~921
- 2 Potter J.E. Matrix quadratic solutions. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 1966, 14(3): 496~501
- 3 Kwakernaak H, Sivan R. Linear Optimal Control Systems. New York: Wiley, 1972
- 4 Kleiman D.L. On an iterative technique for Riccati equation computation. *IEEE Trans*, 1968, AC-13(1): 114~115
- 5 Yao G.F., Chen S.H. A block iterative algorithm of the continuous Riccati equation in the optimal shape control. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 187: 173~180
- 6 Xu T., Chen S.H. Perturbation sensitivity of generalized modes of defective systems. *Computers and Structures*, 1994, 52(2): 1377~1380
- 7 陈望衰. 结构动态设计的矩阵摄动理论. 北京: 科学出版社, 1999 (Chen S.H. Matrix Perturbation Theory in Structural Dynamic Design. Beijing: Science Press, 1999 (in Chinese))
- 8 Meirovitch L. Dynamics and Control. New York: Wiley, 1990

MODAL OPTIMAL CONTROL ALGORITHM OF THE RICCATI EQUATIONS FOR DEFECTIVE SYSTEMS ¹⁾

Chen Yudong Chen Suhuan Lian Huadong

(*Department of Mechanics, Jilin University, Changchun 130025, China*)

Abstract This study presents a modal optimal control algorithm for solving the Riccati equations in the generalized modal subspace corresponding to defective repeated eigenvalues. The discussions on vibration optimal control mainly involve the eigenvectors to span the eigenspace. However, in engineering problems, such as general damping systems, flutter analysis of aeroelasticity, the system which is called defective system has not a set of complete eigenvectors to span the eigenspace. This paper focuses on the case of defective systems with repeated eigenvalues. By using modal transformation, the state control equation can be transferred into two sets of modal control equations. The first is in the subspace corresponding to defective repeated eigenvalues. The second is in the subspace corresponding to distinct eigenvalues. The solution based on the modal control equations is simpler than that of the original state control equations. The Potter's algorithm is extended to deal with the optimal control based on the modal control equations corresponding to defective repeated eigenvalues. A numerical example is given to illustrate the application of the present procedure. The numerical results show that the present procedure is effective for dealing with the optimal control problem of defective systems.

Key words modal optimal control algorithm, Riccati equation, defective systems

Received 18 May 2000, revised 16 March 2001.

¹⁾ The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19872028).