# 无壁面参数低雷诺数非线性涡黏性模式研究 [1)]

符 松 郭 阳
(清华大学工程力学系, 北京 100084)

**摘要** 建立了一个低雷诺数的非线性涡黏性湍流模式. 该模式的一个显著特征是它不包含壁面参数 (如 $y^+, n$ 等), 因而特别适用于复杂几何流场的计算. 本模式在几种包括回流、分离、激波等典型流动中进行了验证, 结果令人满意.

**关键词** 雷诺应力, 湍流模式, 非线性涡黏性模式, 低雷诺数模式

## 引 言

传统的壁函数理论立足于湍流边界层的对数率特性, 在复杂流动问题中, 由于复杂结构、旋转、尾流、激波、分离、流线曲率或复杂涡系可能存在, "通用" 的壁面律因而不再成立. 对于这类复杂流动应该采用低雷诺数高阶湍流模式 [1~4], 如低雷诺数雷诺应力输运模式和低雷诺数显式代数应力模式. 在大部分的现有的低雷诺数近壁模式中, 阻尼函数或壁面反射项内包含与壁面距离或垂直壁面单位向量有关的壁面参数 (如 $y^+, n$ 等), 当几何域较复杂时, 例如在动静叶相互干扰的情况下, 这些壁面参数的确定较为困难. 因此, 建立无壁面参数的低雷诺数高阶模式将有助于更准确地预测复杂流动.

采用的模式框架摒弃了壁面参数, 通过对雷诺应力各向异性张量的近壁性质的分析, 壁面对模式的影响是通过湍流内在的近壁区的特性来反映的. 引入描绘湍流尺度变化的湍流雷诺数, $Re_t = k^2/(\nu\varepsilon)$, 通过该参数构造满足近壁湍流特性的近壁函数, 进而提出了适合非线性涡黏性模式的近壁低雷诺数修正. 该模式在湍流边界层、收缩槽流边界层、非对称扩张有分离槽流、ONERA A-Airfoil 绕流和激波与边界层相互干扰 (跨音速边界层) 等流动特性变化较大的流动计算中都取得了较好效果, 表明本文的无壁面参数的低雷诺数非线性涡黏性模式可以在较广泛的范围内用于实际流动, 比线性低雷诺数模式有显著改进.

## 1 高雷诺数非线性涡黏性模式简述

为建立低雷诺数非线性涡黏性模式, 首先我们必须选择合适的高雷诺数非线性涡黏性模式作为背景模式以便在此基础上进行低雷诺数修正. 非线性涡黏性模式是近几年国际学术界的一个研究热点 [2,5~10], 在本文中, 可实现非线性涡黏性模式 [6,8] 被选为进行低雷诺数修正的背景模式, 其形式为

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3}\delta_{ij}k - 2\nu_t\left[S_{ij} + \beta_2\frac{k}{\varepsilon}\left(S_{ik}W_{kj} + S_{jk}W_{ki}\right) - \beta_3\frac{k}{\varepsilon}\left(S_{ij}^2 + \frac{1}{3}\delta_{ij}S_{kk}^2\right)\right] \tag{1}$$

2000-01-17 收到第一稿, 2000-06-21 收到修改稿.
1) 国家杰出青年科学基金 (19725208) 、国家攀登计划及国防科技重点实验室 (航空发动机气动热力重点实验室) 基金资助项目.

其中， $S_{ij}^2 = S_{ik}S_{kj}, S_{kk}^2 = S_{lk}S_{kl}, \nu_t = C_\mu^* k^2/\varepsilon$, 且

$$\left.\begin{aligned} b_{ij} &= \frac{\overline{u_i u_j}}{2k} - \frac{1}{3}\delta_{ij}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \\ W_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) - \frac{C_4 - 4}{C_4 \quad 2} e_{ijm}\Omega_m \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

分别表示雷诺应力各向异性、应变率和“绝对”涡量张量；

上两式中

$$C_\mu^* = \frac{\beta_1}{1 - 2\eta^2/3 + 2\xi^2}, \quad \eta^2 = \frac{1}{8}(\beta_3 S)^2, \quad \xi^2 = \frac{1}{2}(\beta_2 \Omega)^2,$$

$$S = (k/\varepsilon)\sqrt{2S_{kk}^2}, \quad \Omega = (k/\varepsilon)\sqrt{-2W_{kk}^2}, \quad g = C_1 - 1 + P/\varepsilon,$$

$$\beta_1 = (2/3 - C_2/2)/g, \quad \beta_2 = (1 - C_4/2)/g, \quad \beta_3 = (2 - C_3)/g$$

符松等人对以上显式代数应力模式曾作了详细的可实现性分析，提出了 FRT 非线性涡黏性模式 [6,8], 系数被确定为： $C_1 = 2.6, C_2 = 0.45, C_3 = 0.37, C_4 = 0.5$.

根据 Wallin 等人的讨论 [10], 参数 $g$ 应该与 $S$ 和 $\Omega$ 有关，本文接受这一观点

$$g = f_1(C_1 - 1) + \psi(S, \Omega) \tag{3}$$

这里

$$f_1 = 1 + 0.95\left[1 - \tanh\left(\frac{S}{2.15}\right)^2\right], \quad \psi(S, \Omega) = \frac{S^2}{4 + 1.83\sqrt{0.2S^2 + 0.8\Omega^2}} \tag{4}$$

至此，具有二阶矩模式优点的高雷诺数非线性涡黏性模式已述完毕.

## 2 模式的低雷诺数修正

湍流在近壁区有着重要的特殊性质，由于无滑移条件，脉动速度 $u_i$ 可以壁面距离 $y$ 为变量作 Taylor 展开，即

$$\left.\begin{aligned} u &= a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \cdots \\ v &= b_2 y^2 + b_3 y^3 + \cdots \\ w &= c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

由此，雷诺应力各向异性张量 $a_{ij}$ 在壁面的渐进变化为

$$\left.\begin{aligned} a_{12,w} &= O(y) \\ a_{11,w} &= B - 2/3 + O(y) \\ a_{22,w} &= -2/3 + O(y^2) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

在壁面， $B = 2\overline{a_1^2}/(\overline{a_1^2} + \overline{c_1^2})$. 湍流的这一物理特性在近壁区有普遍意义.

为了探讨本文采用的 FRT 模式 (1) 的近壁特性，有必要在其框架下研究湍流边界层的特性. 我们知道，这种流动的应变率和涡量为

$$S_{11} = S_{22} = 0, \quad S_{12} = W_{12} = \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial y} \tag{7}$$

定义无量纲应变率 $S=(k/\varepsilon)\partial U/\partial y\sim O(y^2)$, FRT 模式 (1) 因而可以给出

$$\left.\begin{aligned}a_{12}&=-C_\mu^* S=O(y^2)\\a_{11}&=C_\mu^* S^2(\beta_3/6+\beta_2)=O(y^4)\\a_{22}&=C_\mu^* S^2(\beta_3/6-\beta_2)=O(y^4)\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

显然，式 (8) 的量级与真实的情况 (6) 相去甚远. 为了使模式结果与湍流实际保持一致量级，模式中的系数 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 及湍流时间尺度等应当作低雷诺数修正.

首先，模式方程中的湍流时间尺度被重新定义为 $(k+\sqrt{\nu\varepsilon})/\varepsilon$, 即在壁面为 Kolmogorov 时间尺度 $\sqrt{\nu/\varepsilon}$, 远离壁面则仍为 $k/\varepsilon$. 同时，引入 Yang-Shih[11] 关于涡黏性系数的修正

$$\widehat{\nu}_t=C_\mu^* f_\mu(k+\sqrt{\nu\varepsilon})k/\varepsilon\tag{9}$$

其中

$$f_\mu=1-\exp(-R/a)\tag{10}$$

参数 $R$ 为 $R=\sqrt{k(k+\sqrt{\nu\varepsilon})^3}/\nu\varepsilon$, 其近壁特性为 $y\to 0$, $R\to O(y)$; $y\to\infty$, $R\to Re_t$, $a$ 为一模式常数. 不难得出，由此可满足 $a_{12}$ 的量级. 低雷诺数的 FRT 非线性涡黏性模式可写作

$$\overline{u_iu_j}=\frac{2}{3}\delta_{ij}k-2\widehat{\nu}_t\left\{S_{ij}+\frac{k+\sqrt{\nu\varepsilon}}{\varepsilon}\left[\widehat{\beta}_2(S_{ik}W_{kj}+S_{jk}W_{ki})-\widehat{\beta}_3\left(S_{ij}^2+\frac{1}{3}\delta_{ij}S_{kk}^2\right)\right]\right\}\tag{11}$$

要使 $a_{11}$ 和 $a_{22}$ 也满足近壁区渐进变化的量级，有必要引进参数 $f_1$ 和 $f_2$, 使得

$$\left.\begin{aligned}a_{11,\mathrm{low}}&=f_1a_{11}+(1-f_1)(B-2/3)\\a_{22,\mathrm{low}}&=f_2a_{22}-2(1-f_2)/3\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

与式 (8) 中的 $a_{11},a_{22}$ 不同的是，上式中的 $a_{11},a_{22}$ 量级为 $O(1)$, 即

$$\left.\begin{aligned}a_{11}&=C_\mu^*\widehat{S}^2(\beta_3/6+\beta_2)\\a_{22}&=C_\mu^*\widehat{S}^2(\beta_3/6-\beta_2)\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

其中，$\widehat{S}=\lfloor(k+\sqrt{\nu\varepsilon})/\varepsilon\rfloor\partial U/\partial y\sim O(1)$. 同时，由 $a_{11}$ 和 $a_{22}$ 的量级可以确定参数 $f_1$ 和 $f_2$ 的量级分别为 $O(y)$ 和 $O(y^2)$. 求解式 (12), 最终可得

$$\left.\begin{aligned}\widehat{\beta}_2&=\frac{1}{f_\mu}\left[\frac{1}{2}(f_1+f_2)\beta_2+\frac{1}{12}(f_1-f_2)\beta_3+\frac{(f_1-f_2)/3+(1-f_1)B/2}{\widehat{S}^2C_\mu^*}\right]\\\widehat{\beta}_3&=\frac{1}{f_\mu}\left[\frac{1}{2}(f_1+f_2)\beta_3+3(f_1-f_2)\beta_2+\frac{3B(1-f_1)-2(2-f_1-f_2)}{\widehat{S}^2C_\mu^*}\right]\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

对于湍流边界层来说， DNS 给出 $B$ 为 $1.56\sim 1.84$, 本文取 $B=1.8$. $f_1$ 和 $f_2$ 分别取

$$f_1=1-\exp(-R/a_1),\quad f_2=[1-\exp(-R/a_2)]^2\tag{15}$$

参数 $f_1$ 和 $f_2$ 的物理意义是为了满足近壁处雷诺正应力的各向异性而引入的阻尼函数， Wallin 等人 [10] 已提出这种参数，但他们所取的阻尼函数含有壁面参数 $y^+$, 而本文则避免了这个缺

陷. 在本文模式中，模式系数 $a, a_1, a_2$ 的确定与两方程的模式选取有关，本文选取 Wilcox 较新的 $k$-$\omega$ 模式 [12], 即 $k$ 方程和 $\omega$ 方程的模化与 $k$-$\omega$ 模式相同，最后它们被确定为： $a = 150$, $a_1 = 200$, $a_2 = 150$.

至此，一个低雷诺数的非线性涡黏性模式已经建立起来，该模式不包含表征壁面几何参数的如 $y^+, n$ 等，因而可以比较自由地应用于几何域比较复杂的湍流计算，这是本文研究的一个主要特点.

## 3 模式的数值验证

### 3.1 算例描述

本文发展的低雷诺数 FRT 非线性涡黏性模式在一些典型流动算例中进行了验证，具体为：

(1) 充分发展的槽道流动 ($Re_\tau = 395$)[13];

(2) 收缩的槽道流动 ($k = 1.5 \times 10^{-6}$)[4];

(3) 非对称 10° 平面扩张槽流 [15];

(4) ONERA A-Airfoil 绕流 ($Re = 2 \times 10^6$, $\alpha = 13.3°$)[16];

(5) ONERA Bump (Case ‘C’)[16].

算例 1 和 2 为简单剪切流动， DNS 的近壁数据较为丰富，是测试低雷诺数模式近壁特性的较好流动. 在算例 3 流动中，扩张导致逆压梯度出现而产生流动分离现象，流动的物理机理较为复杂，在最近的 ERCOFTAC 的湍流模式研讨会中尚未找到能够比较准确计算该流动的模式. 算例 4 和 5 都直接和航空空气动力学有关，前者为一不可压翼型的大攻角绕流，后者为一跨音速流动，且都有分离现象存在. 因此，本文测试的算例不仅仅停留在简单剪切流，还包括回流、绕流、分离、激波 - 边界层相互干扰等，应当说流动算例的面是比较宽的.

### 3.2 算例结果与讨论

在充分发展的槽道流动中，从结果来看 (图 1), 本文模式能够很好地捕捉近壁区的“壁面率”和雷诺应力的强各向异性的特点，而线性的 Wilcox $k$-$\omega$ 模式得出的雷诺应力趋向各向同性. 在收缩的槽道流动中，结果类似 (图 2).

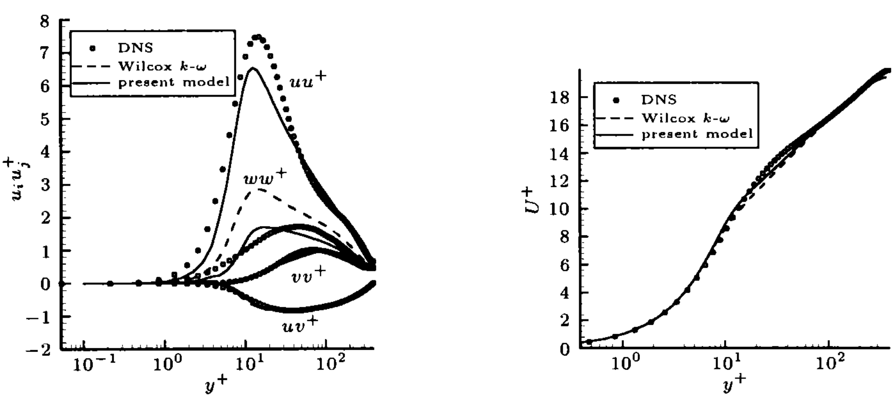


图 1 充分发展槽流的近壁特性

Fig.1 Near-wall behaviour of fully-developed channel flow

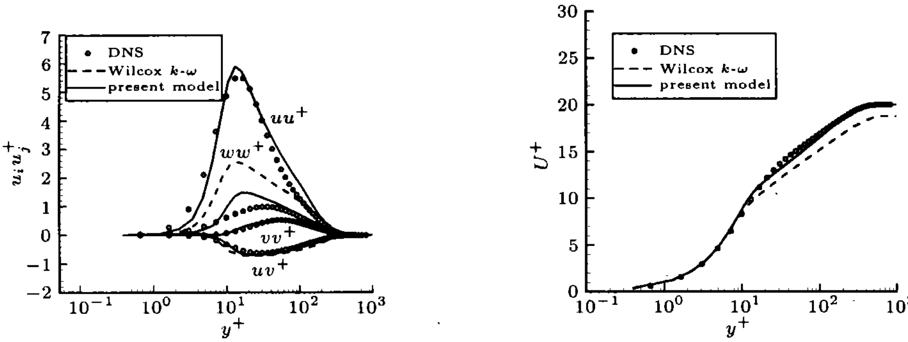


图 2 收缩槽流的近壁特性

Fig.2 Near-wall behaviour of sink channel flow

在非对称平面扩张槽流中，本文的非线性低雷诺数模式能较准确地预测出回流区的大小 (图 3) 、阻力系数沿壁面的分布和平均速度剖面及雷诺正应力的各向异性特性 (图 4, 图 5), 计算结果大大优于线性的 Wilcox $k$-$\omega$ 模式. 在 A-Airfoil 绕流的计算中，本文模式与 Wilcox $k$-$\omega$ 模式相比较，结果稍好 (图 6, 图 7), 尤其反映在平均速度剖面，但在翼型后椽，计算与实验还

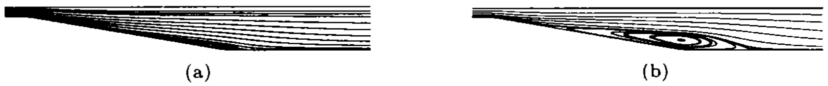

图 3 非对称扩张槽流线图　(a) $k$-$\omega$ 模式，(b) 本文模式

Fig.3 Streamline of asymmetric diffuser　(a) $k$-$\omega$ model, (b) Present model

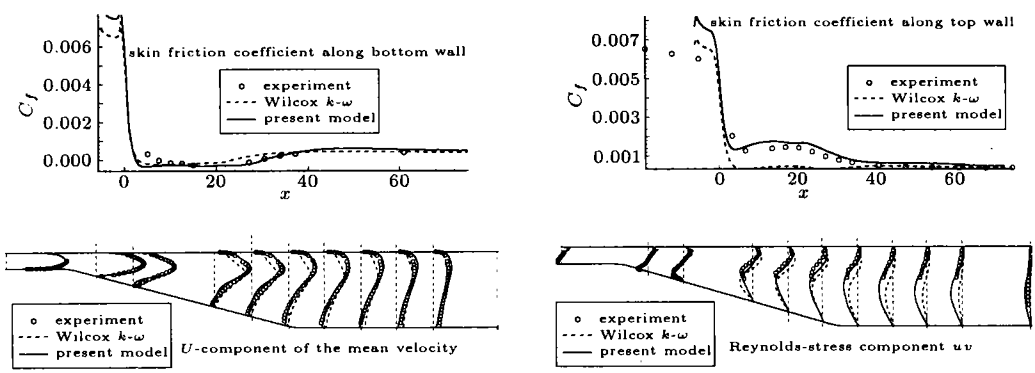


图 4 非对称扩张槽流表面摩阻系数、平均速度及雷诺剪应力剖面

Fig.4 Skin friction, mean-velocity and shear stress profile of asymmetric diffuser

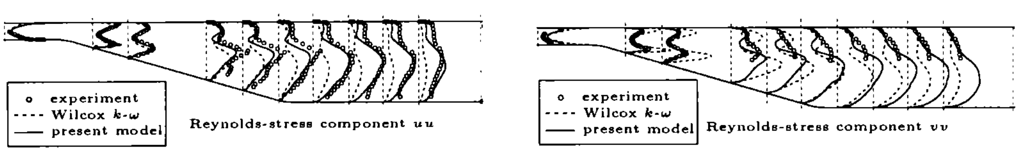


图 5 非对称扩张槽流雷诺正应力剖面

Fig.5 Normal Reynolds-stress profile of asymmetric diffuser

有一定的误差. 在 ONERA Bump 流动中, 本文模式能较好地反映激波和边界层的相互作用的强度 (图 8, 图 9), 而 Wilcox $k$-$\omega$ 模式捕捉激波的结构较差.

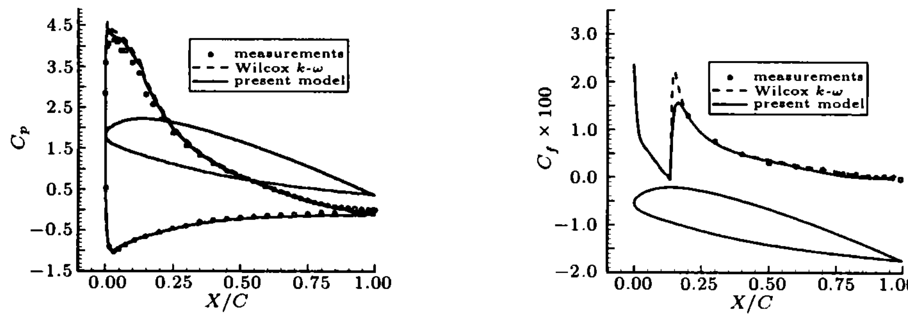


图 6 ONERA A- 翼型表面压力系数、摩阻系数分布

Fig.6 Pressure coefficient and skin friction of ONERA A-airfoil

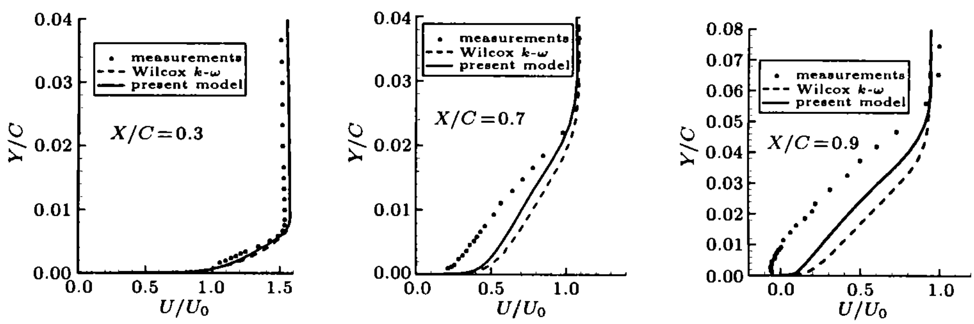


图 7 ONERA A- 翼型平均速度 $U$- 剖面的变化

Fig.7 $U$-component of mean-velocity profile of ONERA A-airfoil


图 8 ONERA Bump 的等马赫线 (a) $k$-$\omega$ 模式, (b) 本文模式

Fig.8 Mach-contour of ONERA Bump (a) $k$-$\omega$ model, (b) present model

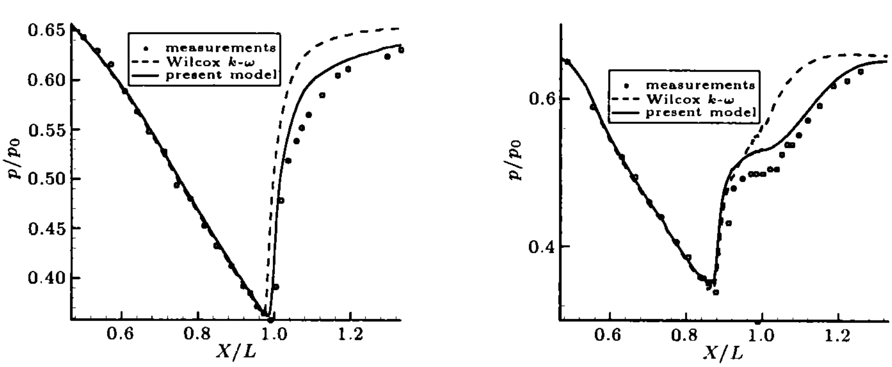


图 9 ONERA Bump 的壁面压力分布 (a) 上壁面, (b) 下壁面

Fig.9 Wall pressure of ONERA Bump (a) upper wall, (b) lower wall

以上计算结果表明，本文提出的低雷诺数 FRT 非线性涡黏性模式较好地再现了上面提到的 5 种不同的流动，与线性的两方程涡黏性模式相比能得到更好的结果．而且，模式不显式出现壁面参数，计算量与线性涡黏性模式相当，这使得它能处理更复杂的有壁面约束的流动．

## 4 结　论

在 FRT 模式基础上建立了一个低雷诺数的非线性涡黏性模式．该模式的一个显著特征是它不包含壁面参数 (如 $y^+, n$ 等)，因而适用于包括复杂流场的湍流模拟．本模式在几种包括回流、绕流、分离、激波 - 边界层相互干扰等典型可压与不可压流动中进行了验证，结果令人满意．

## 参　考　文　献


1 Batten P, Craft TJ, Leschziner MA, et al. Reynolds-stress-transport modeling for compressible aerodynamics applications. *AIAA J*, 1999, 37(7): 785～797

2 Knoell J, Taulbee DB. A nonlinear stress-strain model for wall-bounded turbulent flows. Eng Turbul Modelling & Exp-4, 1996, 113～124

3 Lai YG, So RMC. On near-wall turbulent flow modelling. *J Fluid Mech*, 1991, 221: 641～673

4 Launder BE, Shima N. Second-moment closure for the near-wall sublayer: Development and application. *AIAA J*, 1989, 27: 1319～1325

5 Craft TJ, Launder BE, Suga K. A nonlinear eddy-viscosity model including sensitivity to stress anisotropy. In: Durst F, Launder B E, Schmidt F W, Whitelaw J H eds. Proceedings of 10th Symposium on Turbulent Shear Flows. Penn State: Penn State University, 1995, 2: 23.19～23.24

6 Fu S, Rung T, Thiele F. On the realizability of nonlinear stress-strain relationships for Reynolds stress closure. In: Durst F, Launder B E, Schmidt F W, Whitelaw J H eds. Proceedings of 11th Symposium on Turbulent Shear Flows. Grenobles, France: the University Joseph Fourier of Grenoble, 1997, 2: 13.1～13.6.

7 Gatski TB, Speziale CG. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. *J Fluid Mech*, 1993, 254: 59～75

8 Rung T, Thiele F, Fu S. On the realizability of nonlinear stress-strain relationships for Reynolds stress closure. *Flow, Turbulence & Combustion*, 1999, 60: 333～359

9 Shih TH, Zhu J, Lumley JL. A realizable Reynolds stress algebraic equation model. NASA TM-105993 (ICOMP Report 92-27), NASA Lewis Research Center, 1993

10 Wallin S, Johansson AV. A new explicit algebraic Reynolds stress turbulence model for 3D flow. In: Durst F, Launder B E, Schmidt F W, Whitelaw J H eds. Proceedings of 11th Symposium on Turbulent Shear Flows. Grenobles, France: the University Joseph Fourier of Grenoble, 1997, 2:13.13～13.17.

11 Yang Z, Shih TH. A new time scale based $k$-$\varepsilon$ model for near-wall turbulence. *AIAA J*, 1993, 31: 1191～1198

12 Wilcox DC. Turbulence Modeling for CFD. France: DCW Industries Inc, 1993

13 Kim J, Moin P, Moser R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J Fluid Mech*, 1987, 117: 133～166

14 Spalart PR. Numerical study of sink-flow boundary layers. *J Fluid Mech*, 1986, 172: 307～328

15 Buice CU, Eaton JK. Experimental investigation of flow through an asymmetric plane diffuser. TSD-107. Stanford, CA, USA: Stanford University, 1997

16 Haase W, Bradsma F, Elsholz E, et al. Euroval-A European initiative on validation of CFD code, Notes on Numerical Fluid Mech.(42). Germany: Vieweg, GmbH, 1993

# STUDY OF WALL-PARAMETER FREE LOW-REYNOLDS-NUMBER NONLINEAR EDDY- VISCOSITY MODEL [1)]

Fu Song Guo Yang

(*Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing* 100084, *China*)

**Abstract** In complex wall-bounded turbulent flows, the "universal" behavior of the law of wall is often not observed and the application of the wall-law in conjunction with linear two-equation turbulence models fail to give accurate predictions. For these flow calculations low-Reynolds-number high-order models are required, for instance, full Reynolds-stress transport model and explicit algebraic stress model. In most of these models, wall-distance or normal unit vector to the wall appears in damping functions or wall-reflection term. These wall parameters are difficult to define when the flow geometry is complex. A wall-parameter-free low-Reynolds-number high-order turbulence model is thus of great benefit to the prediction of complex wall-bounded turbulent flows.

Based on the turbulence near-wall asymptotic behavior, this article presents a low-Reynolds-number nonlinear eddy-viscosity model. A particular feature of the model is that it contains no wall parameters like $y^+, \boldsymbol{n}$ which are difficult to define in complex flow geometry. The turbulence time scale in the model is modified to adapt to Kolmogorov time scale very close to the wall while remaining the eddy-turnover time scale away from the wall. To validate the performance of these models, a number of test cases have been calculated and results are compared with DNS or experiment data which include fully-developed channel flow, sink channel flow, flow through an asymmetric plane diffuser, ONERA A-Airfoil flow, shock/boundary-layer interaction. The results are very satisfactory as compared with experiments or DNS data which shows the present model can be applied to the calculations of a wide range of complex flows with practical significance and exhibits superior performance than linear two-equation turbulence models.

**Key words** Reynolds-stress, turbulence model, nonlinear eddy-viscosity model, low-Re model

Received 6 August 1997, revised 18 December 1997.

1) The project supported by the National Distinguished Youth's Science Foundation of China (19725208), National Climbing Project and National Defense Technology Key Laboratory Foundation.