

湍流边界层外区相干结构的三维波模型¹⁾

陆利蓬

(北京航空航天大学动力系, 北京 100083)

罗纪生

(天津大学力学系, 天津 300072)

摘要 根据流动稳定性理论, 提出了一种三维波模型来描述湍流边界层外区大尺度相干结构.

计算所得流线和等涡量线图较罗纪生, 周恒 (1993) 的二维波模型更符合实验结果. 说明该三维模型能够较好地反映湍流边界层外区大尺度相干结构的物理特征.

关键词 湍流边界层外区, 相干结构, 三维波

引 言

Antonia 等^[1]对湍流边界层外区的大尺度相干结构作了详细的实验研究, 给出了湍流边界层中不同 Reynolds 数上经相位平均后的大尺度相干结构的拓扑结构以及流线和等涡量线图. 罗纪生、周恒^[2]基于流动稳定性理论提出了一种二维波模型来描述相干结构, 采用了沿壁面法向变化的复涡黏系数, 他们的计算结果与实验符合较好, 但仍存在两个问题: (1) 实验中流线的两个鞍点中间是一个发散的焦点, 而计算结果为中心点; (2) 计算得到的涡量分布凸出的部分对应于流线的中心点, 而实验结果是在流线的焦点与鞍点之间. 导致这一结果的主要原因可能是由于理论模型纯二维造成的.

本文提出了一种三维波模型来描述外区大尺度相干结构. 该模型由一个二维波和一对对称的三维波组成, 它们有相同的流向波数. 按此模型计算所得流线和等涡量线图与实验结果符合很好.

1 理论分析

任一流动量 q 可以分解为

$$q = \bar{q} + \tilde{q} + q'$$

其中 $\bar{q}$ 为长时间平均值, $\tilde{q}$ 是相位平均值与 $\bar{q}$ 的差, 相当于相干结构的值, q' 是小尺度脉动, 其长时间平均与相位平均都为零. 将有关量代入 Navier-Stokes 方程并分别取长期平均及相位平均, 从后者减去前者, 就可以得到 $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}$ 满足的方程. 这里 $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}$ 分别表示流向、法向及展向的速度分量及压力项. 另外从文献 [1] 的实验结果可知, 外区相干结构的幅值并不大, 因

2000-03-05 收到第一稿, 2000-06-05 收到修改稿.

1) 航空基金资助项目 (99A51075, 99C51074).

此计算中略去了相干结构运动本身产生的非线性项, 文献 [2] 的研究结果表明这样近似是完全可以的. 利用连续方程消去相干结构引起的压力项可得到 $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ 所满足的方程

$$\left(\gamma \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} - \bar{U} \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \tilde{v} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \bar{U}'' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{\gamma}_{11} - \tilde{\gamma}_{22}) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\gamma}_{12} + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{\gamma}_{23}\right) + 2 \frac{\partial^3 \tilde{\gamma}_{31}}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{\gamma}_{33} - \tilde{\gamma}_{22}) \quad (1)$$

$$\left(\gamma \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} - \bar{U} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}\right) - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \frac{d\bar{U}}{dy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (\tilde{\gamma}_{33} - \tilde{\gamma}_{11}) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tilde{\gamma}_{13} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\gamma}_{23} - \frac{\partial}{\partial z} \tilde{\gamma}_{12}\right) \quad (2)$$

其中 x, y, z 分别为流向、法向及展向坐标, $\bar{U}(y)$ 为平均流, $\tilde{\gamma}_{ij} = -(\langle u'_i u'_j \rangle - \overline{u'_i u'_j})$ ($i, j = 1, 2, 3$) 表示小尺度脉动对大尺度相干结构的雷诺应力, $\langle u'_i u'_j \rangle$ 和 $\overline{u'_i u'_j}$ 分别为 $u'_i u'_j$ 的相位平均和长期平均. Reynolds 应力用涡黏模型计算, 有 $\tilde{\gamma}_{ij} = \bar{\gamma}_T \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i}\right)$, $\bar{\gamma}_T$ 为涡黏系数, 下标 1, 2, 3 分别表示 x, y, z 方向.

用来流速度 U_e 、边界层厚度 δ 为特征量, 对方程 (1), (2) 进行无量纲化, 把涡黏系数与运动黏性系数之比仍记为 $\bar{\gamma}_T$, 并设 $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ 有行进波形式, 记为

$$\tilde{u} = u(y)A, \quad \tilde{v} = v(y)A, \quad \tilde{w} = w(y)A$$

其中, $A = \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]$, α, β, ω 分别为流向波数、展向波数和频率. 则 u, v, w 满足方程

$$\{[D^2 - (\alpha^2 + \beta^2)]^2 - i\alpha R[(D^2 - (\alpha^2 + \beta^2))(\bar{U} - c) - \bar{U}']\}v + \{\bar{\gamma}_T''[D^2 + (\alpha^2 + \beta^2)] + 2\bar{\gamma}_T' D[D^2 - (\alpha^2 + \beta^2)] + \bar{\gamma}_T[D^2 - (\alpha^2 + \beta^2)]\}v = 0 \quad (3)$$

$$\{[D^2 - (\alpha^2 + \beta^2)] + i\alpha R(c - \bar{U})\}(i\beta u - i\alpha w) = i\beta Rv \frac{d\bar{U}}{dy} - \bar{\gamma}_T' D(i\beta u - i\alpha w) - \bar{\gamma}_T(D^2 - (\alpha^2 + \beta^2))(i\beta u - i\alpha w) \quad (4)$$

同样连续方程为

$$i\alpha u + i\beta w = -Dv \quad (5)$$

其中 Reynolds 数 $Re = U_e \delta / \gamma$, 波速 $C = \omega / \alpha$, $D = d/dy$.

参照文献 [2], 边界条件为

$$y = 0.05\delta, \quad y \rightarrow \infty, \quad u = 0, \quad v = Dv = 0, \quad w = 0$$

本文模型中 3 个波的波数满足 $\alpha_M = \alpha_L = \alpha_R$, $\beta_M = 0$, $\beta_L = -\beta_R$, 其中 M, L, R 分别代表二维波和两个对称的三维波.

涡黏性假设与分子黏性的本质不同之一就是: 小尺度脉动所产生的雷诺应力与大尺度变形之间存在着滞后, 在这里通过将涡黏系数设为复数的形式来体现这一物理现象, 其表达式为

$$\bar{\gamma}_T = \gamma_T e^{i\Delta\theta} [1 - \text{sech}(13 \cdot y/\delta)]$$

其中 γ_T 为 $\bar{\gamma}_T$ 的幅值, $\Delta\theta$ 为相位差, 反映滞后的程度. 文献 [2] 的研究结果表明这样设是完全可行的.

2 计算结果

由文献 [1] 的实验结果可知, 外区相干结构的流向尺度约为边界层厚度的二倍, 因此本文中 3 个波的流向波数选取为 $2\pi/\lambda = 3.14$. 对不同的展向波数进行了计算, 结果表明: 当三维波展向波数的绝对值约为流向波数的一半时所得流线和等涡量线图与实验结果符合均好.

计算采用时间模式, 波速 $C = C_r + iC_i$ 是复数, C_r 表示波的相速度, αC_i 表示波幅的增长率. 方程 (3) 在给定 R, α 后, 对于不同的 γ_T 和 $\Delta\theta$ 可以得到不同的波速. 在湍流边界层的外区, 大尺度相干结构的强度变化不大, 更准确地说其能量变化率很小, 基本上处于中性状态. 另外, 文献 [1] 给出的相干结构向下游传播的速度约为 $0.8U_e$, 因此对 γ_T 和 $\Delta\theta$ 的选取原则是使 C_i 很小, 同时 C_r 近似等于 0.8. 图 1, 图 2 分别给出了由此得出的三维波和二维波的 γ_T 和 $\Delta\theta$ 随 Re 的变化曲线.

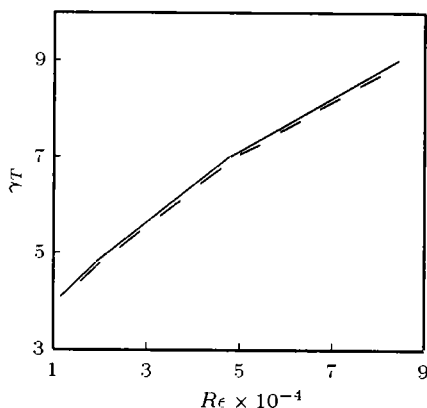


图 1 涡黏系数幅值随 Re 变化

Fig.1 Relation of γ_T to Re number

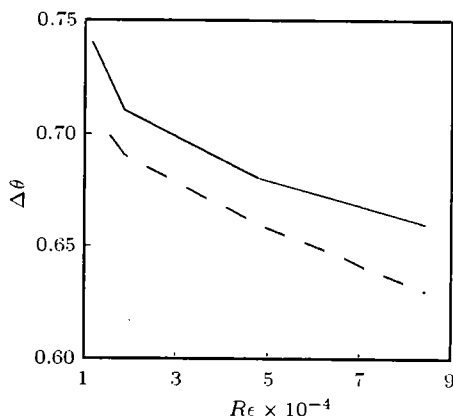
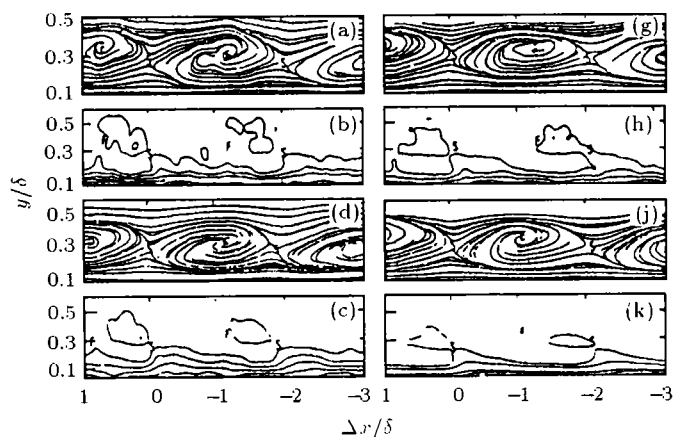


图 2 涡黏系数项位差随 Re 变化

Fig.2 Relation of $\Delta\theta$ to Re number

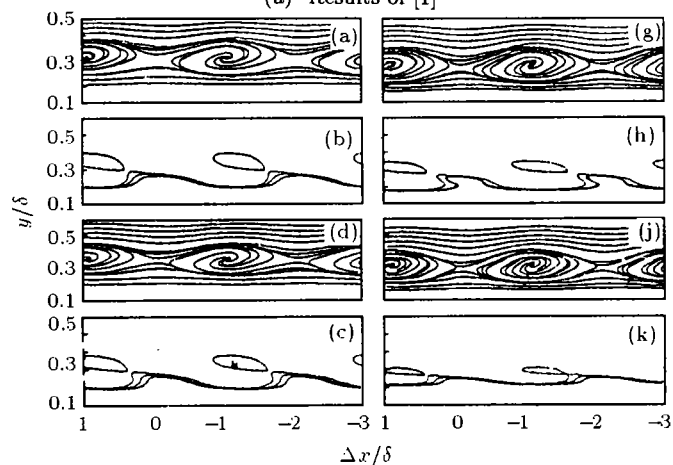
图中可见三维波模型的计算结果都小于二维结果, 尤其是相位差 $\Delta\theta$ 更为明显. 我们认为在二维波模型中, 大尺度相干结构所产生的变形以及小尺度脉动引起的流体微团间的动量交换是在平面内进行的. 而三维波模型所表示的大尺度相干结构的变形是空间三维的, 因此小尺度脉动引起的流体微团间的动量交换是在空间三个方向进行的. 理论上讲, 这种空间上的动量交换较二维平面情况应更快、更充分, 这就体现为雷诺应力与大尺度运动变形之间的滞后减小, 即相位差相对减小. 最后计算结果与实验符合很好, 也是对上述理论分析的验证.

为了便于与实验及二维结果 [2] 比较, 计算了 4 个不同雷诺数下的流动. 图 3(b) 给出了本文计算所得的流线和等涡量线图, 图 3(a) 图 3(c) 分别为实验结果 [1] 和二维模型结果 [2]. 图中 (a) (d) (g) (j) 为流线, (b) (c) (h) (k) 为等涡量线, 分别对应 Re 为 11 800, 19 005, 47 949, 84 427. 从图中可见, 三维模型计算所得流线图在两个相邻鞍点的中间是一个发散的焦点, 这与实验结果是符合一致的, 而原二维模型的结果为中心点 (图 3(c)). 图 3(b) 的流线图中还可以看出, 由于大涡卷曲而使得涡的左上部和右下部的流线密集, 这一点与图 3(a) 的实验结果是一致的. 从



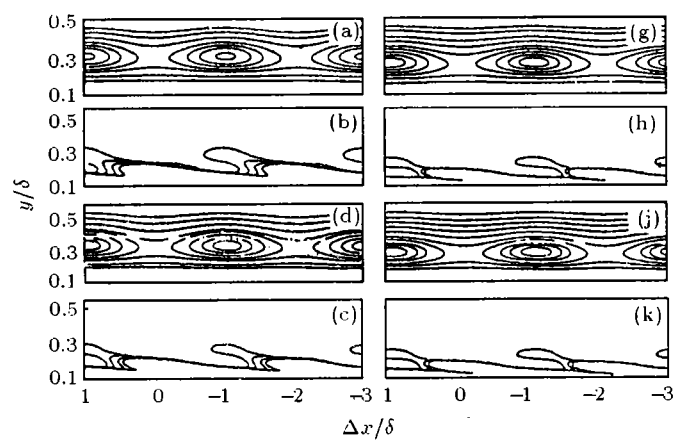
(a) 实验结果 [1]

(a) Results of [1]



(b) 本文计算结果

(b) Results of this paper



(c) 二维模型结果 [2]

(c) Results of [2]

图 3 流线及等涡量线图

Fig.3 Streamlines and spanwise vorticity contours

整体上看, 三维模型所得流线图较二维结果更加接近实验结果. 从图 3(b) 的等涡量线图可见, 在底部, 等涡量线相对平缓, 即使凸出部分也并不像二维结果 (图 3(c)) 那样弯折得很厉害. 另外凸出部分顶端附近也与二维结果不同, 是一封闭环线. 这些结果都与图 3(a) 的实验结果更为接近.

3 结 论

湍流边界层外区大尺度相干结构是可以用水波模型来描述, 计算结果表明本文提出的三维模型较二维模型更接近流动的实际情况. 本文模型所得流线图与等涡量线图的流向相对位置与实验结果还稍有不同, 其主要原因可能是由于没有考虑边界层内区的猝发对外区大尺度相干结构的影响所致.

致谢 在本文的完成过程中得到了周恒教授的指导, 在此表示衷心地感谢!

参 考 文 献

- 1 Antonia RA, Bisset DK, Brown LW. Effect of Reynolds number on the organized motion in a turbulent boundary layer. *J Fluid Mech*, 1990, 213: 267~288
- 2 罗纪生, 周恒. 湍流边界层外区大尺度相干结构的理论模型及与实验的比较. 中国科学, A 辑, 1993, 23(1): 56~62

A 3-D WAVE MODEL FOR THE COHERENT STRUCTURES IN THE OUTER REGION OF A TURBULENT BOUNDARY LAYER¹⁾

Lu Lipeng

(Department of Jet Propulsion, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Luo Jisheng

(Tianjin University, Department of Mechanics, Tianjin 300072, China)

Abstract Based on the theory of hydrodynamic instability, a new theoretical model containing a 2-D wave and a pair of 3-D waves was proposed for the coherent structures in the outer region of a turbulent boundary layer. In calculation, we assumed that the Reynolds stresses induced by small-scale eddies acting on the large-scale eddies can be expressed by eddy viscosity model, where the complex eddy viscosity is used to embody the lag of the stresses to the deformation of large-scale eddies. According to the experiments that the scale of the coherent structures in the streamwise is about 2δ , the streamwise wave number of the waves is chosen as $2\pi/\lambda = 3.14$. At present, there have been no experimental results about the spanwise wave number. In this paper, several cases with different spanwise numbers were computed. The results showed that both the

Received 5 March 2000, revised 5 June 2000.

1) The project supported by the Aeronautical Science Foundation of China (99A51075, 99C51074).

streamlines and the isovorticity lines obtained were in good agreement with those of experimental observations only when the spanwise number of 3-D wave was about half of the streamwise number. The streamlines and isovorticity lines for four different Reynolds numbers $R = 11800, 19005, 47949$ and 84427 were calculated. The results agree with the experimental results much better than those by 2-D wave model. It is can concluded that large-scale coherent structures in the outer region of a turbulent boundary layer can be described by the unstable wave model. The 3-D model proposed in this paper can correctly describe the physical mechanism of the coherent structures in the outer region of a turbulent boundary layer.

Key words outer region, turbulent boundary layer, coherent structures, 3-D wave