第 32 卷 第 6 期
2000 年 11 月

力 学 学 报
ACTA MECHANICA SINICA

Vol. 32, No.6
Nov., 2000

强压缩湍流雷诺应力模型中压力应变快速项的探索[1)]

解茂昭 李 芳
(大连理工大学动力工程系，大连 116024)

摘要 对压力应变快速项的五个模型作了压缩性修正，即在模型中引入了由于平均流可压而导入的不为零的平均速度散度，并把五个模型计算所得的雷诺应力各向异性张量分量、平均湍能及压力应变快速项的值与快速畸变理论的计算结果作了比较. 结果表明，包含湍流应变史效应的线性模型可达到四阶非线性模型的精度.

关键词 压力应变快速项，雷诺应力，压缩性，平均速度散度，快速畸变理论

引 言

雷诺应力模型中的压力应变项对雷诺应力的输运和湍流结构起着十分重要的作用. 对像内燃机缸内承受的强压缩和大变形率的湍流而言，其中快速项的正确模拟，更是湍流模型成败的关键. 因此本文以内燃机的压缩过程为工程背景，对压力应变项中的快速项进行了研究.

为了寻求一种适合于承受强烈压缩和大变形率这种特殊情况的 $\Pi_{ij}^{(r)}$ 的模型，比较了目前几种较常用的模型： Launder, Reece 和 Rodi[1] 的两个 $\Pi_{ij}^{(r)}$ 模型，下面简称 LRR1 模型， LRR2 模型； Speziale Sarkar 和 Garski[2] 的 $\Pi_{ij}^{(r)}$ 模型，简称 SSG 模型； Lee[3] 提出的 $\Pi_{ij}^{(r)}$ 模型；以及 Johansson[4] 等提出的非线性 $\Pi_{ij}^{(r)}$ 模型.

可压缩湍流的计算，原则上需考虑密度脉动和非零的平均速度散度. 但对于内燃机缸内湍流而言，其平均密度变化大，湍流马赫数却很低. 本文作者对缸内湍能平衡和输运的研究 [5] 表明，与脉动场压缩性有关的压力膨胀项和膨胀耗散项都小到可以忽略的程度. 作为一阶近似，可忽略密度脉动对湍流速度和应力的影响. 因而本文仅采用 Favre 平均的雷诺应力输运方程隐含地计算密度脉动的部分影响，并着重对上述模型做平均速度散度不为零的修正. Kollmann[6] 曾对 LRR 模型进行了散度项的修正，使之适合于可压流的计算. SSG 模型本身已包含了由于可压缩性造成的平均速度散度不为零的修正. 本文采用类似的方法，对复杂的含雷诺应力各向异性张量 a_{ij} 四次方的 Johansson[4] 非线性不可压流模型和 Lee[3] 的线性的模型作了平均速度散度的修正.

研究强压缩湍流，快速畸变理论 (RDT)[7] 是一个常用的工具. RDT 是一种线性统计理论，只要流场满足它所要求的快速畸变等几个假设，它是一种精确的理论，其中不包含其他湍流模型都必有的经验常数. RDT 的一个主要优点是能够考虑整个流场应变历程对湍流应力和结构的影响. 甚至对于一些变形相对缓慢的流动，它也是适用的. 虽然内燃机常用工况条件下，达不到快速畸变的要求 (即初始湍流时间尺度 $k_0/\varepsilon_0 \to \infty$)，但我们在计算中，可把初始湍流时

1999-01-08 收到第一稿， 2000-04-03 收到修改稿.
1) 国防科技“九五”预研重点项目.

间尺度 k_0/ε_0 设定为很大，近似认为达到快速畸变的要求. 然后把各种模型对快速压缩过程的计算结果与快速畸变理论解进行比较，看哪种模型更适于缸内湍流. 实践表明，在缺少实验数据的情况下，通过与快速畸变这样的极限条件下的理论解作比较，仍不失是一种探索与发展强压缩湍流模型的比较好的方法 [3,4,7,8]. 需要指出的是，由于 RDT 只能用于简单的几何形状，故本文只能对平顶活塞的压缩进行计算，同时把 RDT 的结果主要是作为一种定性的参考标准，用以判定几种模型的优劣，而并非一个可评定各种模型计算精度的定量标准. 如何将 RDT 应用于更复杂的湍流，是一个值得深入探索的课题.

1 数学模型

1.1 修正后的压力应变快项的模型

本文所求解的雷诺应力输运方程及其中各项详细的推导过程见文献 [9]. 压力应变快速项模型可用以下的通式来表示，各种模型的区别只是系数不同而已.

$$\begin{aligned}\Pi_{ij}^{(r)} =\ & kQ_1\Big(\boldsymbol{S}_{ij} - \underbrace{\frac{1}{3}\boldsymbol{S}_{kk}}_{*}\Big) + kQ_2\Big(\boldsymbol{a}_{ip}\boldsymbol{S}_{pj} + \boldsymbol{a}_{jp}\boldsymbol{S}_{pi} - \frac{2}{3}\boldsymbol{a}_{pq}\boldsymbol{S}_{pq}\boldsymbol{\delta}_{ij}\Big) + \underbrace{kQ_{10}\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{S}_{kk}}_{*} + \\ & kQ_3\boldsymbol{a}_{pq}\boldsymbol{S}_{pq}\boldsymbol{a}_{ij} + kQ_4\Big(\boldsymbol{a}_{ip}\boldsymbol{S}_{pq}\boldsymbol{a}_{qj} - \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_{kp}\boldsymbol{S}_{pq}\boldsymbol{a}_{qk}\boldsymbol{\delta}_{ij}\Big) + \underbrace{kQ_{11}\boldsymbol{S}_{kk}\Big(\boldsymbol{a}_{ik}\boldsymbol{a}_{kj} - \frac{1}{3}\mathrm{II}_a\boldsymbol{\delta}_{ij}\Big)}_{*} + \\ & kQ_6\boldsymbol{a}_{kp}\boldsymbol{S}_{pq}\boldsymbol{a}_{qk}\boldsymbol{a}_{ij} + kQ_5\boldsymbol{a}_{pq}\boldsymbol{S}_{pq}\Big(\boldsymbol{a}_{ik}\boldsymbol{a}_{kj} - \frac{1}{3}\mathrm{II}_a\boldsymbol{\delta}_{ij}\Big) + \\ & kQ_5\boldsymbol{a}_{lp}\boldsymbol{S}_{pq}\boldsymbol{a}_{ql}\Big(\boldsymbol{a}_{ik}\boldsymbol{a}_{kj} - \frac{1}{3}\mathrm{II}_a\boldsymbol{\delta}_{ij}\Big) + kQ_7(\boldsymbol{a}_{ip}\boldsymbol{\Omega}_{pj} + \boldsymbol{a}_{jp}\boldsymbol{\Omega}_{pi}) + \\ & kQ_8\boldsymbol{a}_{pk}(\boldsymbol{a}_{jk}\boldsymbol{\Omega}_{pi} + \boldsymbol{a}_{ik}\boldsymbol{\Omega}_{pj}) + kQ_9\boldsymbol{\Omega}_{pq}\boldsymbol{a}_{pk}(\boldsymbol{a}_{jk}\boldsymbol{\Omega}_{iq} + \boldsymbol{a}_{ik}\boldsymbol{\Omega}_{jp})\end{aligned} \tag{1}$$

式中带 * 的项就是由于压缩性造成平均速度散度不为零而新增的项， $\boldsymbol{a}_{ij}$ 是雷诺应力的各向异性张量， $\boldsymbol{S}_{ij}$ 是平均应变率张量， $\boldsymbol{\Omega}_{ij}$ 是旋转张量， II_a 和 III_a 分别是雷诺应力的各向异性张量的不变量. 它们可表示为

$$\boldsymbol{a}_{ij} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j}}{k} - \frac{2}{3}\delta_{ij},\quad \boldsymbol{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{U}}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{U}}_j}{\partial x_i}\right),\quad \boldsymbol{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{U}}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{U}}_j}{\partial x_i}\right) \tag{2}$$

$$\mathrm{II}_a = \boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{a}_{ji},\qquad \mathrm{III}_a = \boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{a}_{jk}\boldsymbol{a}_{ki} \tag{3}$$

在 LRR1 模型中：$Q_1 = 4/5,\ Q_2 = (9C_2+6)/11,\ Q_7 = (7C_2-10)/11,\ Q_{10} = -(4+6C_2)/11$ 其中 C_2 取 0.4.

在 LRR2 模型中： $Q_1 = 4/5,\ Q_2 = 0.6,\ Q_7 = -0.6$

在 SSG 模型中： $Q_1 = 4/5 - 0.65\mathrm{II}_a^{1/2},\ Q_2 = 0.625,\ Q_3 = 0.9,\ Q_7 = -0.2,\ Q_{10} = 0.6$

在 Lee 的模型中： $Q_1 = 4/5,\ Q_2 = -12A_0,\ Q_7 = -3/4 + 3/28A_0,\ Q_{10} = -8A_0$，其余的 Q 皆为零. 其中

$$A_0 = -\frac{1}{7} - \frac{3}{70}[(C^r-1)/(C^r+1)]A_a(-12\mathrm{II}_a)^s,\qquad A_a = \frac{(\mathrm{III}_a/2)}{(-\mathrm{II}_a/3)^{3/2}} \tag{4}$$

式中，$r = 2.0, s = 0.21$, C 称为参考总应变，是一个压缩参数，可表示为

$$C = \exp\left[-\int_0^t S(z)\mathrm{d}z\right] = \frac{\rho}{\rho_0}, \qquad S = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = S_{kk} \tag{5}$$

C 的物理意义为从压缩开始到某一时刻，气体密度的总的增长倍数. 在 Johansson 模型中

$$\left.\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{4}{5} - \left(\frac{8}{5}\alpha_2 + 6\alpha_3\right)\mathrm{II}_a + \left(\frac{9}{80} + \frac{63}{10}\alpha_2 + 3\alpha_3 - \frac{1}{12}\alpha_{10}\right)\mathrm{II}_a^2 - \left(\frac{3}{5} + 24[\alpha_2 + \alpha_3]\right)\mathrm{III}_a \\
Q_2 &= 12\alpha_1 - \left(\frac{3}{40} - \frac{27}{2}\alpha_1 + \frac{96}{5}\alpha_2 + 39\alpha_3\right)\mathrm{II}_a - \left(\frac{27}{2}\alpha_1 - 27[\alpha_2 + \alpha_3] + \frac{1}{2}\alpha_{10}\right)\mathrm{III}_a \\
Q_3 &= -8\alpha_2 + 36\alpha_3 - \left(\frac{9}{20} - \frac{126}{5}\alpha_2 + 12\alpha_3 - \frac{1}{3}\alpha_{10}\right)\mathrm{II}_a \\
Q_4 &= 96\alpha_2 - 36\alpha_3 - \left(\frac{27}{40} + \frac{189}{5}\alpha_2 + 18\alpha_3 + \frac{1}{2}\alpha_{10}\right)\mathrm{II}_a \\
Q_5 &= \frac{3}{2} + 60(\alpha_2 + \alpha_3) \\
Q_6 &= \alpha_{10} \\
Q_7 &= -\frac{4}{3} - \frac{28}{3}\alpha_1 - \left(\frac{9}{40} - \frac{21}{2}\alpha_1 + \frac{228}{5}\alpha_2 + 17\alpha_3 - \frac{2}{9}\alpha_{10}\right)\mathrm{II}_a - \\
&\quad \left(\frac{21}{2}\alpha_1 - 21[\alpha_2 + \alpha_3] + \frac{1}{6}\alpha_{10}\right)\mathrm{III}_a \\
Q_8 &= -16\alpha_2 + 28\alpha_3 - \left(\frac{9}{40} + \frac{63}{5}\alpha_2 + 6\alpha_3 - \frac{1}{6}\alpha_{10}\right)\mathrm{II}_a \\
Q_9 &= -\frac{3}{2} - 132\alpha_2 + \frac{2}{3}\alpha_{10} \\
Q_{10} &= 8\alpha_1 + \left(\frac{1}{20} - 9\alpha_1 + \frac{64}{5}\alpha_2 + 26\alpha_3\right)\mathrm{II}_a + \left(9\alpha_1 - 18[\alpha_2 + \alpha_3] + \frac{1}{3}\alpha_{10}\right)\mathrm{III}_a \\
Q_{11} &= -64\alpha_2 + 12\alpha_3 + \frac{31}{11}\left(\frac{9}{40} + \frac{63}{5}\alpha_2 + 6\alpha_3 + \frac{23}{186}\alpha_{10}\right)\mathrm{II}_a
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式中，$\alpha_1 = -1/7, \alpha_2 = 0.0295, \alpha_3 = -0.0484, \alpha_{10} = 0.1$.

以上诸模型中，对各向异性雷诺应力而言，SSG 是二阶，Johansson 模型是四阶，其余三个模型均为线性.

1.2 快速畸变解析解

本文中的压力应变快速项的快速畸变解析解系根据 Lee[3] 一维轴向压缩给出的结果推导而得来 [9]

$$\frac{\Pi_{zz}^{(r)}}{2Sk} = C^{2/3}\left\{\frac{3(1-\sigma^2)^{3/5}}{8\sigma^4}\left(\frac{3-\sigma^2}{1-\sigma^2}\right) - (3+\sigma^2)\sigma' - \frac{2}{3}\,\frac{(1-\sigma^2)^{2/3}}{4\sigma^2}[-1 + (1+\sigma^2)\sigma']\right\} \tag{7}$$

$$\Pi_{xx}^{(r)} = \Pi_{yy}^{(r)} = -\frac{1}{2}\Pi_{zz}^{(r)} \tag{8}$$

对于湍能 k 和雷诺应力各向异性张量 a_{ij} 采用 Borgnakke 和 Xiao[7] 的简化表达式

$$k = \frac{1}{2}k_0(1+\sigma C^2), \quad a_{zz} = \frac{1}{3} - \frac{\sigma C^2 - 1}{\sigma C^2 + 1}\cdot\frac{1}{C^2 - 1}, \quad a_{xx} = a_{yy} = -\frac{1}{2}a_{zz} \tag{9}$$

式中

$$\sigma=\sqrt{|c^2-1|},\quad \sigma'=\frac{1}{\sigma}\arctan\sigma \tag{10}$$

2 计算结果及分析

对一台平顶活塞内燃机缸内的压缩过程进行了计算. 缸径为 105 mm, 冲程 95 mm, 压缩比 8.5 : 1, 转速为 1500 rpm. 压缩时, 缸内的初始湍流时间尺度取得非常大: $k_0/\varepsilon_0 \approx 500\,\mathrm{s}$, 正常的内燃机缸内压缩过程中, k_0/ε_0 为 $0.002\sim 0.010\,\mathrm{s}$, 因此可认为此时压缩非常快, 可近似认为是快速畸变 (快速畸变的要求是 $k_0/\varepsilon_0 \to \infty$). 因此, 计算结果可与快速畸变理论的分析解作比较.

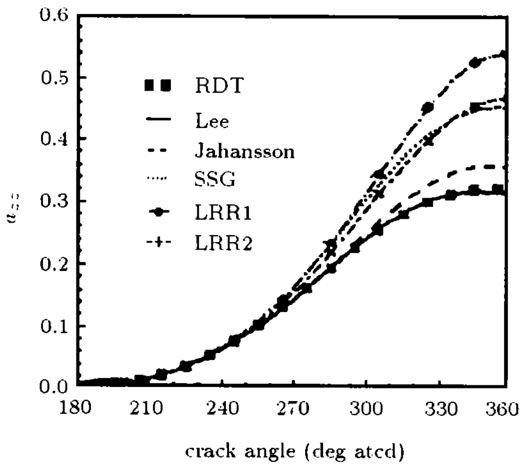

图 1 轴向雷诺应力各向异性张量分量 a_{zz} 的比较 (1500 rpm)

Fig.1 Axial component of anisotropy tensor

图 1 为轴向的雷诺应力的各向异性张量分量 a_{zz} 在压缩过程中随曲轴转角的变化. 从图中可见, Lee 的模型所得的值在整个压缩过程中与 RDT 解都很吻合, Johansson 的高级非线性模型在 350 ÅTDC 之前, 与 RDT 解很接近, 但到上死点时, a_{zz} 的值偏大. 而 LRR1, LRR2 和 SSG 模型都比 RDT 值大, 尤其是 LRR1 模型.

图 2 为径向的雷诺应力各向异性张量分量 a_{xx} 的值. 从图可见, 仍是 Lee 的模型最接近 RDT 值, Johansson 的模型次之, LRR1, LRR2 和 SSG 模型计算的值都与 RDT 值偏差较大.

图 3 为缸内平均湍能值. 从图中可看出, Lee 和 Johansson 的模型计算的湍能值都与 RDT 值很接近, 而 LRR1, LRR2 和 SSG 模型所得的值偏大. LRR1 模型偏差最大.

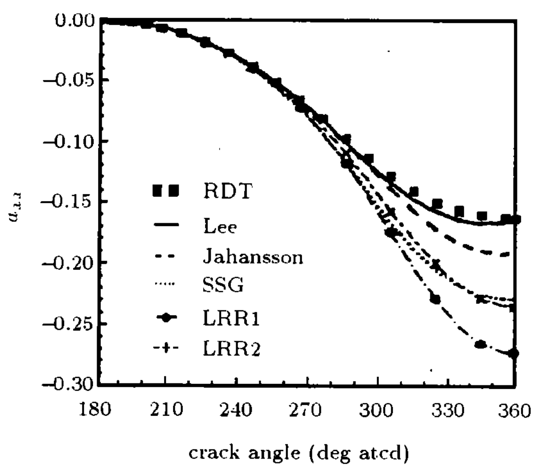

图 2 径向雷诺应力各向异性张量分量 a_{xx} 的比较 (1500 rpm)

Fig.2 Radial component of anisotropy tensor

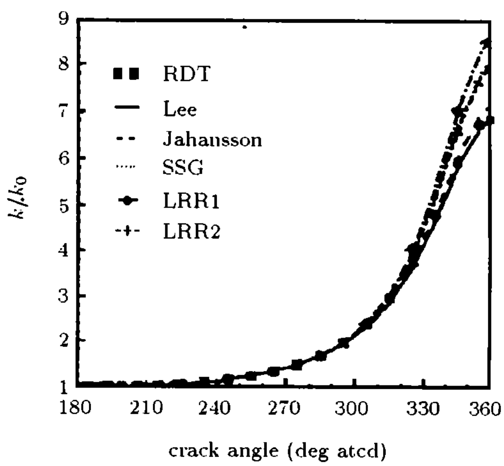

图 3 平均湍能值的比较 (1500 rpm)

Fig.3 Averaged turbulent kinetic energy

图 4, 图 5 分别为轴向和径向无量纲的平均压力应变快速项. 从图中可看出，Lee 模型、LRR1 、LRR2 模型和 Johansson 的模型在上死点之前都与 RDT 值很接近，但在上死点处，都比 RDT 值偏大，Lee 模型的偏差最小. 而 SSG 模型比 RDT 值小，而且小得很多. 图 5 也是这样的趋势.

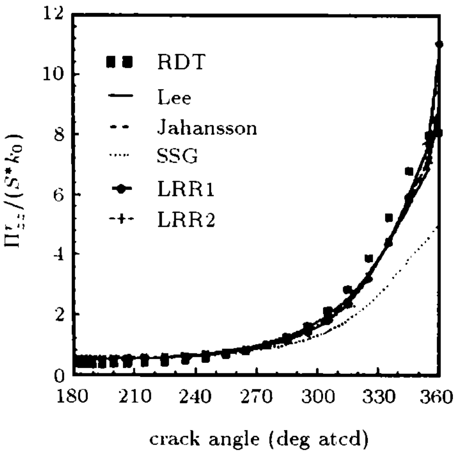

图 4　轴向无量纲的压力应变快速项的比较 (1500 rpm)

Fig.4　Axial component of rapid pressure-strain rate

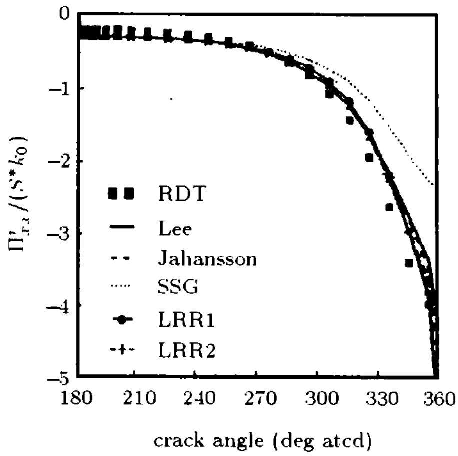

图 5　径向无量纲的压力应变快速项的比较 (1500 rpm)

Fig.5　Radial component of rapid pressure-strain rate

从上面的分析，我们可看出在这几种模型中，线性的 Lee 模型最好，甚至比 Johansson 的含 a_{ij} 高达四次方的非线性高级模型更接近于 RDT 值. 其原因就在于 Lee 模型中引入了一个含 A_0 的系数. 从 A_0 的表达式 (4) 中可看出，模型中引入了一个压缩参数 C, 即它包含了总应变，这是该模型最突出的特点. 众所周知，由于湍流的弛豫时间相当长，故一个湍流状态不仅依赖于流场参数的瞬时值 (如各向异性张量等), 而且还依赖于在发生应变过程中的记忆积累效应. 因此可以说，系数 A_0 的模拟包含了关于雷诺应力各向异性张量的精确的结构信息，因此，该模型比高级的非线性模型更精确，也就不足为奇了.

但无论是 Lee 的工作, 还是本文的工作, 都只是在考虑历史效应方面作了一些初步的尝试, 这初步工作的成功给了我们继续沿此方向探索的信心.

3 小　结

从上面对平均湍能，雷诺应力各向异性张量和无量纲的压力应变快速项的比较分析我们可看出，在快速畸变的条件下，Lee 模型所得结果与 RDT 非常接近，Johansson 模型次之，但与 RDT 值也比较吻合. SSG 模型所得值与 RDT 偏差最大. LRR1 和 LRR2 模型介于中间，而 LRR2 模型比 LRR1 模型相对更好. 从计算精确性角度考虑，Lee 模型和 Johansson 模型都可以采用. 但从计算成本考虑，则首选 Lee 模型. 因为 Lee 模型只是一个线性模型，而 Johansson 模型则是一个相当复杂的含 a_{ij} 高达四次方的非线性模型. 对于工程应用，既要考虑精度，又要考虑计算的成本. 故对强压缩或大变形率的湍流模拟问题，Lee 的模型值得推荐. 但本结论仅限于平顶活塞对缸内湍流进行轴向压缩这一特定情况. 对于更复杂的湍流变形运动，还需进行更全面深入的考查.

参　考　文　献

1 Launder BE, Reece GJ, Rodi W. Progress in the development of a Reynolds strains turbulence closure. *J Fluid*

Mech, 1975, 68: 557~566

2 Speziale CG, Sarkar S, Gatski TB. Modeling the pressure-strain correlation of turbulence: An invariant dynamical systems approach. *J Fluid Mech*, 1991, 227: 245~272

3 Lee MJ. Distortion of homogeneous turbulence by axisymmetric strain and dilatation. *Phys Fluid*, 1989, A1: 1541~1557

4 Johansson AV, Hallaback M. Modeling of rapid pressure-strain in Reynolds-stress closures. *J Fluid Mech*, 1994, 269: 143~168

5 Kollmann W. Prediction Methods for Turbulent Flows. Hemisphere Publish Corporation, 1979

6 李芳, 解茂昭. 压缩对内燃机缸内湍能的影响. 内燃机学, 1999, 17(3): 285~290 (Li Fang, Xie Maozhao. Effects of compression on turbulent energy in the cylinder of ICE. *Transaction of CSICE*, 1999, 17(3): 285~290 (in Chinese))

7 Hunt JCR, Canuthers DJ. Rapid distortion theory and the "problem" of turbulence. *J Fluid Mech*, 1990, 212: 497~532

8 Borgnakke C, Xiao Y. Compressible turbulence predicted by Reynolds stress models. SAE Trans, Paper 910260, 1991. 100341~354

9 李芳. 内燃机缸内湍流流动的二阶矩封闭模型的研究. 大连: 大连理工大学 [博士论文]. 1998. 12 (Li Fang. Second moment closures modeling of turbulent flow in the cylinder of ICE: [Ph D Dissertation]. Dalian University of Technology, 1998. 1~120 (in Chinese))

A STUDY ON THE RAPID PRESSURE-STRAIN RATE IN THE SECOND-MOMENT CLOSURE FOR TURBULENT FLOWS UNDERGOING STRONG COMPRESSIONS

Xie Maozhao Li Fang

(Power Engineering Dept., DUT Dalian, Dalian 116024, China)

Abstract To clarify applicability of the existing models for the rapid pressure-strain correlation in the Reynolds-stress closures, modifications accounting for the nonzero divergence of the mean velocity have been set into five turbulence models. These are two models of Launder et al. (LRR1 and LRR2), model of Speziale et al. (SSG), model of Johansson et al. and model of Lee. Computations have been carried out with these models for compression process in the cylinder of an internal combustion engine. The calculation results of the mean turbulent kinetic energy, the anisotropy tensor of Reynolds stress and rapid pressure-strain have been compared with the analytical solutions of Rapid Distortion Theory(RDT) in order to identify a suitable model for turbulent flows undergoing strong compressions as in the engines. The results demonstrate that the linear model of Lee which includes the history effect of the total strain can even give the same accurate predictions as those of the Johansson's nonlinear models up to fourth order in the Reynolds-stress anisotropy tensor.

Key words rapid pressure-strain correlation, Reynolds stress, compressibility, divergence of mean velocity, RDT

Received 8 Jaunary 1999, revised 3 April 2000.

1) The project supported by the National Defense Science and Technology "9·5" Research and Development Foundation Key.