广义特征值问题的 Collatz 包含定理 1),2)

郑兆昌 李惠彬* 吴雄华
(清华大学工程力学系, 北京 100084)
*(清华大学土木工程系, 北京 100084)

摘要 工程中已发展了许多矩阵特征值问题的近似求解方法, 由 Duncley 法给出固有频率基频的下界, Rayleigh-Ritz 近似法建立的方程, 给出基频的上界, 以及通常的矩阵迭代法给出的矩阵的固有频率程序中是以某一元素迭代前后比值确定的, 这样实际上很难说是上界或下界. Collatz 包含定理仅适用于对称标准特征值问题, 可以给出特征值上、下界.

采用矩阵 Cholesky 三角分解的原理, 把 Collatz 包含定理推广到适用于具有对称矩阵的一般结构系统的广义征值问题, 对于分解刚度矩阵或质量矩阵可给出基频, 或最高固有频率. 为了验证理论的正确性, 给出了算例.

关键词 广义特征值, Collatz, 包含定理, Cholesky 三角分解

引 言

矩阵特征值问题近似求解中, 由 Duncley 法给出基频的下界, Rayleigh-Ritz 近似法建立的方程, 给出固有频率的上界, 以及通常的矩阵迭代法认为给出建立的矩阵的固有频率的上界, 但是实际上程序中是以某一元素迭代前后比值确定的, 这样实际上很难说是上界或下界, Collatz[1] 包含定理给出了对称标准特征值问题特征值上、下界, 但 Collatz 包含定理不适用于广义特征值问题, Crandall[2] 和胡海昌 [3] 都指出过, 胡海昌 [3] 利用矩阵非负分解建立了两个适用于广义特征值问题 Collatz 包含定理. Jin, Pilkey[4] 指出利用矩阵迭代法不但可给出基频的上界而且也可给出基频的下界, 实质上是利用了 Collatz 包含定理, 但不适用于质量矩阵是非对角矩阵的情况下的广义特征值问题, 其原因是由于两个对称矩阵的乘积一般不再是对称矩阵, 因此 Collatz 包含定理不再适用. 本文采用矩阵的 Cholesky 三角分解, 把对称矩阵广义特征值问题化为对称矩阵的标准特征值问题, 从而把 Collatz 包含定理推广到适用于具有对称矩阵的一般结构系统的广义特征值问题. 利用矩阵迭代法取 Collatz 最小和最大比值, 可给出特征值的上、下界, 最后收敛于精确值.

1 标准特征值问题

先扼要介绍 Collatz[1] 包含定理. 对于实对称正定或半正定 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的标准特征值问题有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{X} \tag{1}$$

1998-08-26 收到第一稿, 1999-05-17 收到修改稿.
1) 国家重点基础研究专项资助 (G1998020316) 和国家自然科学基金资助项目 (19972029).
2) 本文为编委姚振汉推荐.

适当选取矢量

$$\boldsymbol{X} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

当 $\boldsymbol{A}$ 作用于矢量 $\boldsymbol{X}$, 经迭代后即得

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{Y} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

将迭代前后矢量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 对应的元素相除，得比值

$$l_i = \frac{y_i}{x_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4}$$

取比值 l_i 中最小和最大的分别记为

$$\lambda^- = \min_i l_i, \quad \lambda^+ = \max_i l_i \tag{5}$$

Collatz 包含定理断定，在区间 $\lambda^- \leq \lambda \leq \lambda^+$ 内至少有一个特征值.

以上论证表明： Collatz 包含定理确定特征值上、下界是在矩阵迭代过程中得到的. 通常矩阵迭代法用确定于上界， Collatz 包含定理实质上是在矩阵迭代法的基础上建立起来的.

2 广义特征值问题

对于由质量矩阵和刚度矩阵构成的广义特征值问题

$$\boldsymbol{KX} = \lambda \boldsymbol{MX} \tag{6}$$

Crandall[2] 和胡海昌 [3] 都指出了 Collatz 定理不适用于广义特性值问题，若化成标准特征值问题

$$\boldsymbol{DX} = \mu \boldsymbol{X}, \quad \mu = \frac{1}{\lambda} \tag{7}$$

虽然逆矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$ 仍为对称矩阵，由于对称矩阵的乘积，其动力矩阵 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}$ 一般不再具有对称性，因之 Collatz 包含定理不再适用，只有当 $\boldsymbol{M}$ 为对角矩阵，矩阵 $\boldsymbol{D}$ 仍为对称矩阵，因此化广义特性值问题为对称矩阵的标准特征问题， Collatz 包含定理仍适用.

按通常的矩阵迭代法，一般也避免矩阵的直接求逆，而是采用 Cholesky 三角分解. 按两种情况将广义特性值问题构成标准特征值问题，分别讨论如下：

(1) 若刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 正定，作三角分解得 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{LL}^{\mathrm{T}}$, 令

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$$

代入 (6) 式，并前乘 $\boldsymbol{L}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{ML}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} = \lambda \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{LL}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$$

于是得标准特征值问题

$$\boldsymbol{AY} = \lambda \boldsymbol{Y} \tag{8}$$

其中对称矩阵

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{ML}^{-\mathrm{T}} \tag{9}$$

(2) 若质量矩 $\boldsymbol{M}$ 阵正定，作三角分解 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$, 令

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$$

代入 (6) 式，并前乘 $\boldsymbol{R}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{R}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\mu\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{Y},\quad \mu=\frac{1}{\lambda}$$

于是得标准特征值问题

$$BY=\mu Y \tag{10}$$

其中对称矩阵

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{R}^{-\mathrm{T}} \tag{11}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵

3 算　例

文献 [3] 中为了说明质量矩阵是非对角矩阵的情况下，Collatz 包含定理不再适用于广义特性值问题，举了下面的实例．现仍以此实例加以说明.

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}5 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$$

两个精确的特征值为

$$\lambda_1=0.381\,966,\qquad \lambda_2=2.618\,033$$

$$\mu_1=\frac{1}{\lambda_1}=2.618\,033,\quad \mu_2=\frac{1}{\lambda_2}=0.381\,966$$

表 1　刚度矩阵三角分解计算结果

Table 1　Results of stiff matrix triangle decomposition

Vector	Iterate No.				
	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{Y}=\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\end{Bmatrix}$	1.000 000 1.000 000	1.000 000 4.666 667	1.000 000 9.250 000	1.000 000 10.777 778	1.000 000 11.043 500
$\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{A}\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\end{Bmatrix}$	0.600 000 2.800 000	1.333 333 12.333 330	2.250 000 24.250 000	2.555 556 28.222 200	2.608 700 28.913 000
Collatz λ^-	0.600 000	1.333 333	2.250 000	2.555 560	2.608 700
λ^+	2.800 000	2.642 860	2.621 620	2.618 560	2.618 110

Vector	Iterate No.				
	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{Y}=\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\end{Bmatrix}$	1.000 000 11.083 300	1.000 000 11.089 200	1.000 000 11.090 000	1.000 000 11.090 100	
$\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{A}\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\end{Bmatrix}$	2.616 670 29.016 700	2.617 830 29.031 800	2.618 000 29.034 100	2.618 000 29.034 400	
Collatz λ^-	2.616 667	2.617 830	2.618 000	2.618 030	
λ^+	2.618 050	2.618 040	2.618 030	2.618 030	

(1) 刚度矩阵三角分解

$$K = LL^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

得

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \sqrt{5} \end{bmatrix}, \quad L^{-\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}, \quad A = L^{-1}ML^{-\mathrm{T}} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 13 \end{bmatrix}$$

选取 $Y = [1.0, 1.0]^{\mathrm{T}}$ 作为初始矢量，按 (8) 式进行迭代，计算结果见表 1.

4 质量矩阵三角分解

$$M = RR^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

得

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad R^{-\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad B = R^{-1}KR^{-\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

选取 $Y^{\mathrm{T}} = [1.0, 0.20]^{\mathrm{T}}$ 作为初始矢量，按 (10) 式进行迭代，计算结果见表 2.

表 2 质量矩阵三角分解计算结果

Table 2 Results of mass matrix triangle decomposition

Vector	Iterate No.				
	1	2	3	4	5
$Y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000
	0.200 000	−0.166 667	−0.225 8060	−0.234 568	−0.235 849
$BY = B\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$	2.400 000	2.583 330	2.612 900	2.617 280	2.617 920
	−0.400 000	−0.583 330	−0.612 903	−0.617 280	−0.617 925
Collatz μ^-	2.400 000	2.583 330	2.612 900	2.617 280	2.617 920
μ^+	−2.000 000	3.500 000	2.714 290	2.631 580	2.620 000
	Iterate No.				
Vector	6	7	8	9	10
$B = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	
	−0.236 036	−0.236 063	−0.236 067	−0.236 068	
$BY = Y\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$	2.618 020	2.618 030	2.618 030	2.618 030	
	−0.618 018	−0.618 032	−0.618 034	−0.618 034	
Collatz μ^-	2.618 020	2.618 030	2.618 030	2.618 030	
μ^+	2.618 320	2.618 080	2.618 040	2.618 030	

算例 2 四阶系统的刚度和质量矩阵为

$$
\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}24&0&-12&6\\0&8&-6&2\\-12&-6&12&-6\\6&2&-6&4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\frac{312}{420}&0&\frac{54}{420}&-\frac{13}{420}\\0&\frac{8}{420}&\frac{13}{420}&-\frac{3}{420}\\\frac{54}{420}&\frac{13}{420}&\frac{156}{420}&-\frac{22}{420}\\-\frac{13}{420}&-\frac{3}{420}&-\frac{22}{420}&\frac{4}{420}\end{bmatrix}
$$

对刚度矩阵三角分解，得

$$
\boldsymbol{L}^{-1}=\begin{bmatrix}0.204\,124&0&0&0\\0&0.353\,553&0&0\\0.408\,248&0.612\,372&0.816\,497&0\\0.353\,553&0.707\,107&1.414\,21&1.414\,21\end{bmatrix}
$$

并得：　$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{L}^{-\mathrm{T}}$

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3.095\,24&0&8.333\,33&8.179\,13\\0&0.238\,095&1.305\,91&1.666\,66\\8.333\,33&1.305\,91&49.523\,8&61.584\,0\\8.179\,13&1.666\,66&61.584\,0&80.000\,0\end{bmatrix}\times10^{-2}
$$

选取 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}=[1,2,3,4]$ 作为初始矢量，按 (8) 式进行迭代，计算结果见表 3. 根据表 3 结果可计算出该系统的基频：　$\omega=\sqrt{1/\lambda}=0.879\,43$.

表 3　刚度矩阵三角分解计算结果

Table 3　Results of stiff matrix triangle decomposition

Vector		Iterate No. 1	2	3	4	5
$\boldsymbol{Y}=$	y_1	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000
	y_2	2.000 000	0.181 882	0.178 762	0.178 815	0.178 817
	y_3	3.000 000	6.673 920	6.725 870	6.727 470	6.727 520
	y_4	4.000 000	8.489 550	8.573 290	8.575 690	8.575 750
$\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{A}$	y_1	0.608 118	1.281 480	1.292 660	1.292 990	1.293 000
	y_2	0.110 606	0.229 081	0.231 147	0.231 208	0.231 210
	y_3	4.058 530	8.619 090	8.696 350	8.691 862	8.698 680
	y_4	5.162 650	10.98650	11.085 50	11.088 40	11.088 40
Collatz	λ^-	0.055 303	1.259 500	1.292 660	1.292 990	1.293 000
	λ^+	1.352 840	1.352 840	1.293 040	1.293 000	1.293 000

5 结　论

以上计算结果表明，若刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 、质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 中有一个矩阵是正定的，即可进行三角分解，将广义特征值问题化为标准特征值问题，从而根据 Collatz 包含定理，求出其中一个特征值的上、下界. 由于采用矩阵迭代算法，可再次进行迭代，最终收敛于最大的特征值，利用 Collatz 包含定理则得到上、下界的范围不断减小.

当 K 取三角分解，求出的最大特征值，即为最低固有频率，这是工程上最关心的；当取 M 三角分解时，则得到的是最高的固有频率.

参 考 文 献

1 Collatz L. Eigenwertaufgaben mit Technischen Anwendungen. Akademische Verlagsgesellschafte, 1949

2 Crandall SH. Engineering Analysis. New York: McGraw-Hill, 1956

3 胡海昌. 多自由度结构固有振动理论. 北京：科学出版社，1987 (Hu Haichang. Natural Vibration Theory of Multi-degrees of Freedom Structures. Beijing: Academic Press, 1987 (in Chinese))

4 胡海昌. 代数本征值的 Collatz 包含定理的推广. 力学学报，1983, (5): 429~433 (Hu Haichang. Extension of the Collatz inclution theorem for algebraic eigenvalues. *Acta Mechanica Sinica*, 1983, (5): 429~433 (in Chinese))

5 Jin DW, Pilkey WD, Wang BP, Okada YJ. A direct method for estimating lower and upper bounds of the fundamental frequency. The Shock and Vibration Bulletin Bulletin 55 (Part 3). 155~166

THE COLLATZ INCLUSION THEOREM EXTENDED FOR GENERALIZED EIGENVALUE PROBLEMS [1)]

Zheng Zhaochang Li Huibin* Wu Xionghua

(*Dept. of Mechanical Engineering, Tsinghua University, Beijing* 100084, *China*)

* (*Departmeht of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing* 100084, *China*)

Abstract There are a lot of developed approaches to attract fundamental eigenvalue of matrix in engineering, Duncley method gives lower bound and the Rayleigh-Ritz method gives upper bound. As for he matrix iteration method is difficult to say which gives lower or upper bound, due to the eigenvalue is obtained by taking the ratio of before with after iteration of an arbitrary element. The Collatz inclusion theorem studied by many authors, it can be used to find the lower and upper bounds both, but the theorem can be only used to standard eigenvalue problem.

In this paper, the Collatz inclusion theorem is extended to generalized eigenvalue problems. When the mass matrix or stiffness matrix is positive definite symmetric matrix, therefore the generalized eigenvalue problem can be reduced to standard eigenvalue problem by using Cholesky decomposition. The fundamental natural frequency or the highest natural frequency can be obtained from decomposition of mass matrix or stiffness matrix respectively. To verify the theory, some examples are presented.

Key words generalized eigenvalue problems, Collatz inclusion theorem, Cholesky decomposition

Received 26 August 1998, revised 17 May 1999.

1) The project supported by the National Key Project on Basic Research and Applied Research (G199820316) and the National Natural Science Foundation of China (19972029).