拟可积哈密顿系统中噪声诱发的混沌运动[1)]

甘春标　郭乙木
(浙江大学力学系，杭州 310027)

摘要 研究拟可积哈密顿系统在谐和与噪声激励联合作用下的混沌运动. 通过对噪声性质的假定，并利用动力系统理论，给出了高维梅尔尼科夫方法应用于随机拟可积哈密顿系统的推广形式. 根据这种推广的方法，研究了谐和与高斯白噪声激励联合作用下两自由度拟可积哈密顿系统的同宿分岔，得出了系统发生混沌运动的参数阈值，并由此讨论了噪声对系统的混沌运动的影响. 蒙特 - 卡罗方法模拟、李雅普诺夫指数等数值结果表明，这种推广的方法是有效的.

关键词 噪声激励，拟可积哈密顿系统，随机梅尔尼科夫方法，混沌运动

引　言

以往在对非线性动力系统的混沌运动进行研究时，往往把随机激励 (如风、地震和海洋波等) 下的系统理想化成确定性模型 [1~3]，通过对这些理想化模型的梅尔尼科夫积分的计算来研究系统的同宿或异宿分岔，从而得出系统发生混沌运动的参数阈值. 这种思想存在两大缺点：其一，通过理想化模型的分析而得到的结果的有效性依赖于模型中的谐和激励的振幅和频率的选取是否合理地反映实际应用中的随机激励；其二，对理想化的模型来说，若系统存在势能阱，激励的振幅足够小而使得系统的梅尔尼科夫积分不存在简单零点，这意味着系统的运动将不能够逃逸出此系统的势能阱. 但实际情况是，对高斯白噪声等随机激励下的系统，不管噪声的强度如何小，系统的运动都有可能随机地逃逸出势能阱，这样理想化的确定性模型就不可能真实地反映实际应用中随机系统的性质.

因此，更自然更合理的选择是将梅尔尼科夫理论直接应用于随机系统的研究. 当外部扰动足够小，且随机激励过程的均值一致连续有界时，梅尔尼科夫理论同样能够适用. 自 90 年代以来，随机梅尔尼科夫方法越来越普遍地应用于随机动力系统的混沌运动的分析。文 [4] 利用高斯白噪声逼近的方法，研究了 Shinozuka 噪声激励下非线性振动系统的同宿分岔，并通过对系统的梅尔尼科夫积分的均值、方差等统计量的计算，得出了系统发生同宿分岔后相空间的流量的渐近表达式. Xie[5] 利用随机梅尔尼科夫方法导出了受谐和外力与高斯白噪声外激励共同作用下的硬弹簧杜芬振子出现混沌运动的条件，得出噪声外激励的作用可减小参数空间的混沌域的结论. 最近，Lin 与 Yim[6] 通过研究硬弹簧杜芬振子在受谐和外力与高斯白噪声参激作用下的随机梅尔尼科夫过程，发现噪声参激的作用可以扩大参数空间的混沌域.

迄今，对随机动力系统的混沌运动的研究还局限于单自由度系统. 本文利用高维梅尔尼科夫理论，分析随机激励下拟可积哈密顿系统的混沌运动. 全文安排如下：第一节，通过动力系统理论以及对噪声性质的假设，给出高维梅尔尼科夫方法应用于随机激励下拟可积哈密顿系统的

1999-06-30 收到第一稿，1999-12-13 收到修改稿.
1) 博士后基金资助项目.

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

推广形式，第二节，利用这种推广的方法，分析高斯白噪声激励下两自由度拟可积哈密顿系统的同宿分岔，给出系统发生混沌运动的参数阈值，并讨论随机激励对系统的混沌运动的影响；第三节，由蒙特 - 卡罗方法模拟系统的运动，并由此计算运动的最大李雅普诺夫指数，以验证理论结果的合理性；在本文的第四节给出我们的结论.

1 高维随机梅尔尼科夫方法

考虑如下系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{X}} &= \boldsymbol{J}D_{\boldsymbol{X}}H(\boldsymbol{X})+\varepsilon\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{c},\boldsymbol{G};\varepsilon)\\ \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\omega}, \qquad (\boldsymbol{X},\boldsymbol{\theta})\in \boldsymbol{R}^{2n}\times\boldsymbol{T}^{l}\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

其中，$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{I}_d\\ -\boldsymbol{I}_d & 0\end{pmatrix}$ ($\boldsymbol{I}_d$ 为 $n\times n$ 单位矩阵)；$0\ll\varepsilon<1$；$\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{R}^p$ 为参数向量；$\boldsymbol{G}(t)\equiv(\xi_1(t),\xi_2(t),\cdots,\xi_{2n}(t))^{\mathrm{T}}$ 为随机激励过程向量. 假设

(1) 当 $\varepsilon=0$ 时，系统 (1.1) 是完全可积的，即此时系统存在 n 个独立的首次积分 $H\equiv K_1,K_2,\cdots,K_n$，除去系统的不动点外，$D_{\boldsymbol{X}}K_1,D_{\boldsymbol{X}}K_2,\cdots D_{\boldsymbol{X}}K_n$ 是逐点线性独立的，且 K_i 与 K_j 的泊松括弧 $\{K_i,K_j\}\equiv\langle JD_{\boldsymbol{X}}K_i,D_{\boldsymbol{X}}K_j\rangle\geq 0$ (对 $\forall i,j$)，其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为欧氏内积.

(2) 当 $\varepsilon=0$ 时，系统 (1.1) 存在双曲不动点，其 n 维稳定和 n 维不稳定流形重合构成一个 n 维同宿不变流形 $\boldsymbol{\Gamma}$.

(3) 对 $\forall i=1,2,\cdots,2n$，随机激励过程 $\xi_i(t)$ 的集合平均 (均值) $E[\xi_i(t)]$ 为一致连续有界的.

则从集合平均的意义上来说，系统 (1.1) 的双曲不动点在随机扰动下将继续存在[4]，且确定性情形下的高维尔尼科夫方法仍然适用，不过此时梅尔尼科夫函数应看成是扰动后系统的稳定和不稳定流形间的随机距离的一种量度. 综合文献 [4, 7] 可得系统 (1.1) 的梅尔尼科夫函数向量为

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{c})\equiv(M_1(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{c}),M_2(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{c}),\cdots,M_n(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{c}))^{\mathrm{T}} \tag{1.2}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{c})=\int_{-\infty}^{\infty}\langle D_{\boldsymbol{X}}K_i,\boldsymbol{g}\rangle(\boldsymbol{q}_0(t),\boldsymbol{\omega}t+\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{G}(t+t_0),\boldsymbol{c};0)\mathrm{d}t &\equiv M_{id}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{c})+M_{ir}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{c})\\ i=1,2,\cdots,n\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

式 (1.3) 中，$\boldsymbol{q}_0(t)=(q_{10}(t),q_{20}(t),\cdots,q_{2n,0}(t))^{\mathrm{T}}$ 为无扰动 ($\varepsilon=0$) 时同宿不变形 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的参数表达式；$M_{id}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{c})$ 为 $M_i(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{c})$ 的均值，$M_{ir}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{c})$ 为由随机激励 $\boldsymbol{G}(t+t_0)$ 引起的 $M_i(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{c})$ 的随机部分 ($i=1,2,\cdots,n$).

若系统不存在随机激励的作用 (即 $M_{ir}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{c})\equiv 0$ ($i=1,2,\cdots,n$))，由动力系统理论可知，当谐和激励的振幅足够大而使得 $M_{id}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{c}_0)$ 存在简单零点的话，系统的稳定和不稳定流形将横截相交，从而系统的内部将发生混沌运动. 然而，随机激励的作用往往使得确定性情况下发生混沌运动的参数阈值发生偏离，其偏离程度依赖于随机激励过程的性质，需要计算它们的统计量，并进一步利用数值模拟才能够确定. 以下，我们将通过一个实例来进行说明.

2 实例分析

我们选取高斯白噪声激励下两自由度拟可积哈密顿为进行具体研究.

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda & -\omega & 0 & 0\\ \omega & -\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & \omega\\ 0 & 0 & -\omega & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}+2\sqrt{2}\lambda\begin{pmatrix}x_3\left(x_2^3+x_4^2\right)\\ x_4\left(x_3^2+x_4^2\right)\\ -x_1\left(x_1^2+x_2^2\right)\\ -x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix}\mu x_2\\ \gamma x_1\xi(t)\\ 0\\ -\mu x_3+bx_4\cos\omega t\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

其中 λ,ω 为正常数；μ,b,γ 为无量纲化参数；$0\ll\varepsilon<1$；$\xi(t)$ 为高斯白噪声过程，谱密度为 S_0.

无扰时 ($\varepsilon=0$) 系统 (2.1) 是可积的，其两个独立的积分为：

$$H=K_1=\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\left[\left(x_1^2+x_2^2\right)^2+\left(x_3^2+x_4^2\right)^2\right]-$$
$$\lambda(x_1x_3+x_2x_4)-\omega(x_2x_3-x_1x_4) \tag{2.2a}$$
$$K_2=x_2x_3-x_1x_4 \tag{2.2b}$$

此时，$\varepsilon=0$ 时系统 (2.1) 在双曲不动点 $(0,0,0,0)$ 处分别有一个二维的稳定和不稳定流形，并重合构成一个二维同宿不变流形 $\boldsymbol{\Gamma}$. $\boldsymbol{\Gamma}$ 的解析表达式为

$$\boldsymbol{\Gamma}=\left\{(x_{1h}(t),x_{2h}(t),x_{3h}(t),x_{4h}(t))=2^{-1/4}[\sec h(4\lambda t)]^{1/2}(\mathrm{e}^{-\lambda t}\cos\omega t,\mathrm{e}^{-\lambda t}\sin\omega t,\right.$$
$$\left.\mathrm{e}^{\lambda t}\cos\omega t,\mathrm{e}^{\lambda t}\sin\omega t)\in\boldsymbol{R}^4,t\in\boldsymbol{R}\right\} \tag{2.3}$$

不难验证，系统 (2.1) 满足上一节的三个假设. 由推广的高维梅尔尼科夫方法，系统受到扰动后的二维随机梅尔尼科夫积分向量为

$$\boldsymbol{M}(\alpha;\mu,b,\gamma)=(M_1(\alpha;\mu,b,\gamma),M_2(\alpha;\mu,b\gamma))^{\mathrm{T}} \tag{2.4}$$

其中

$$M_1(\alpha;\mu,\gamma,b)=\int_{-\infty}^{\infty}\langle D_{\boldsymbol{X}}K_1,\boldsymbol{g}\rangle(x_{1h}(t),x_{2h}(t),x_{3h}(t),x_{4h}(t),\omega t+\alpha,\mu,b,\gamma,\xi(t+\alpha/\omega))\mathrm{d}t\equiv$$
$$M_{1d}(\alpha;\mu,\gamma,b)+M_{1r}(\alpha;\mu,\gamma,b) \tag{2.5a}$$
$$M_2(\alpha;\mu,\gamma,b)=\int_{-\infty}^{\infty}\langle D_{\boldsymbol{X}}K_2,\boldsymbol{g}\rangle(x_{1h}(t),x_{2h}(t),x_{3h}(t),x_{4h}(t),\omega t+\alpha,\mu,b,\gamma,\xi(t+\alpha/\omega))\mathrm{d}t\equiv$$
$$M_{2d}(\alpha;\mu,\gamma,b)+M_{2r}(\alpha;\mu,\gamma,b) \tag{2.5b}$$

$M_{id}(\alpha;\mu,\gamma,b)$ $(i=1,2)$ 为系统 (2.1) 在受到谐和外力和阻尼力作用下的梅尔尼科夫过程的均值，通过积分计算可得

$$M_{1d}(\alpha;\mu,\gamma,b)=\frac{\sqrt{2}\pi}{16\lambda}b\left[\frac{\mathrm{e}^{-\pi\omega/8\lambda}}{1+\mathrm{e}^{-\pi\omega/4\lambda}}-\frac{\mathrm{e}^{-3\pi\omega/8\lambda}}{1+\mathrm{e}^{-3\pi\omega/4\lambda}}\right]\cos\alpha-$$
$$\frac{5\sqrt{2}\pi\omega}{32\lambda}b\left[\frac{\mathrm{e}^{-\pi\omega/8\lambda}}{1+\mathrm{e}^{-\pi\omega/4\lambda}}-\frac{\mathrm{e}^{-3\pi\omega/8\lambda}}{1+\mathrm{e}^{-3\pi\omega/4\lambda}}\right]\sin\alpha-$$
$$\frac{\sqrt{2}\pi}{2\lambda}\mu\omega\mathrm{e}^{-\pi\omega/4\lambda}/[1+\mathrm{e}^{-\pi\omega/2\lambda}] \tag{2.6}$$

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$M_{2d}(\alpha;\mu,\gamma,b) = -\frac{\sqrt{2}\pi}{16}b\left[\frac{\mathrm{e}^{-3\pi\omega/8\lambda}}{1+\mathrm{e}^{-3\pi\omega/4\lambda}} - \frac{\mathrm{e}^{-\pi\omega/8\lambda}}{1+\mathrm{e}^{-\pi\omega/4\lambda}}\right]\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}\pi}{4\lambda}\mu\mathrm{e}^{-\pi\omega/4\lambda}/[1+\mathrm{e}^{-\pi\omega/2\lambda}] \tag{2.7}$$

而 $M_{ir}(\alpha;\mu,\gamma,b)$ $(i=1,2)$ 为系统受高斯白噪声 $\xi(t)$ 激励作用下的梅尔尼科夫积分的随机部分，其方差 $\sigma_{M_{ir}}$ $(i=1,2)$ 通过下式决定

$$\sigma^2_{M_{1r}} = \int_{-\infty}^{\infty}|F(\Omega)|^2 S_{\xi(t+\alpha/\omega)}(\Omega)\mathrm{d}\Omega, \quad \sigma^2_{M_{2r}} = \int_{-\infty}^{\infty}|G(\Omega)|^2 S_{\xi(t+\alpha/\omega)}(\Omega)\mathrm{d}\Omega \tag{2.8}$$

其中，由于 $\xi(t)$ 是高斯白噪声过程，故 $S_{\xi(t+\alpha/\omega)}(\Omega)\equiv S_0$，而

$$\begin{aligned} F(\Omega) = {} & \int_{-\infty}^{\infty}\gamma x_{1h}\left[-\lambda x_{4h} - \omega x_{3h} + 2\sqrt{2}\lambda x_{2h}\left(x_{1h}^2 + x_{2h}^2\right)\right]\mathrm{e}^{-j\Omega t}\mathrm{d}t = \\ & -\frac{\sqrt{2}\pi}{8\lambda}\gamma\omega\mathrm{e}^{-\pi\Omega/8\lambda}/[1+\mathrm{e}^{-\Omega/4\lambda}] - \frac{\sqrt{2}\pi(4\omega+\Omega)}{32\lambda}\gamma\mathrm{e}^{-\pi(2\omega+\Omega)/8\lambda}/[1+\mathrm{e}^{-\pi(2\omega+\Omega)/4\lambda}] - \\ & \frac{\sqrt{2}\pi(4\omega-\Omega)}{32\lambda}\gamma\mathrm{e}^{-\pi|2\omega-\Omega|/8\lambda}/[1+\mathrm{e}^{-\pi|2\omega-\Omega|/4\lambda}] + \\ & j\frac{\sqrt{2}\pi}{16\lambda}\gamma\left[\frac{\mathrm{e}^{-\pi(2\omega+\Omega)/8\lambda}}{1+\mathrm{e}^{-\pi(2\omega+\Omega)/4\lambda}} - \frac{\mathrm{e}^{-\pi|2\omega-\Omega|/8\lambda}}{1+\mathrm{e}^{-\pi|2\omega-\Omega|/4\lambda}}\right] \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} G(\Omega) = {} & \int_{-\infty}^{\infty}\gamma x_{1h}x_{3h}\mathrm{e}^{-j\Omega t}\mathrm{d}t = \\ & \frac{\sqrt{2}\pi}{8\lambda}\gamma\mathrm{e}^{-\pi\Omega/8\lambda}/[1+\mathrm{e}^{-\pi\Omega/4\lambda}] + \frac{\sqrt{2}\pi}{16\lambda}\gamma\left[\frac{\mathrm{e}^{-\pi(2\omega+\Omega)/8\lambda}}{1+\mathrm{e}^{-\pi(2\omega+\Omega)/4\lambda}} - \frac{\mathrm{e}^{-\pi|2\omega-\Omega|/8\lambda}}{1+\mathrm{e}^{-\pi|2\omega-\Omega|/4\lambda}}\right] \end{aligned} \tag{2.10}$$

其中 "j" 表示复数 $F(\Omega)$ 的虚部.

记

$$h_1(\omega,\lambda) \equiv \frac{\mathrm{e}^{-\pi\omega/8\lambda}}{1+\mathrm{e}^{-\pi\omega/4\lambda}} - \frac{\mathrm{e}^{-3\pi\omega/8\lambda}}{1+\mathrm{e}^{-3\pi\omega/4\lambda}} \quad h_2(\omega,\lambda) \equiv \frac{\mathrm{e}^{-\pi\omega/4\lambda}}{1+\mathrm{e}^{-\pi\omega/2\lambda}}$$

若系统 (2.1) 不存在随机扰动 (即 $\gamma=0$)，令 $M_{2d}(\alpha;\mu,\gamma,b)=0$，由 (2.7) 式可得

$$\sin\alpha = -\frac{4\mu h_2(\omega,\lambda)}{b\lambda h_1(\omega,\lambda)} \tag{2.11}$$

把 (2.11) 式代入 (2.6) 并令 $M_{1d}(\alpha;\mu,\gamma,b)=0$，有

$$\cos\alpha = -\frac{2\mu\omega h_2(\omega,\lambda)(5-4\lambda)}{b\lambda h_1(\omega,\lambda)} \tag{2.12}$$

这样，我们可知，在不受随机扰动作用下系统 (2.1) 中的参数满足

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{2.13}$$

时，系统 (2.1) 的稳定和不稳定流形将发生横截相交，从而出现混沌运动.

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

若系统存在随机激励 (即 $\gamma \neq 0$) 时， $M_i(\alpha;\mu,\gamma,b)$ $(i=1,2)$ 在此时为一随机过程，其均值 $M_{id}(\alpha;\mu,\gamma,b)$ 为 $M_i(\alpha;\mu,\gamma,b)$ 的波动中心，而方差 $\sigma_{M_{ir}}$ 则表示 $M_i(\alpha;\mu,\gamma,b)$ 对 $M_{id}(\alpha;\mu,\gamma,b)$ 的均方偏离程度，这样 $M_i(\alpha;\mu,\gamma,b)$ 将在 $[M_{id}(\alpha;\mu,\gamma,b)-\sigma_{M_{ir}}, M_{id}(\alpha;\mu,\gamma,b)+\sigma_{M_{ir}}]$ 区间内波动. 从而， $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 分别随机地在区间

$$I_1 \equiv \left[-\frac{4\mu h_2(\omega,\lambda)}{b\lambda h(\omega,\lambda)} - \frac{8\sqrt{2}\sigma_{M_{2r}}}{\pi b h(\omega,\lambda)}, -\frac{4\mu h_2(\omega,\lambda)}{b\lambda h_1(\omega,\lambda)} + \frac{8\sqrt{2}\sigma_{M_{2r}}}{\pi b h_1(\omega,\lambda)} \right] \tag{2.14}$$

与

$$\begin{aligned} I_2 \equiv \Bigg[& -\frac{2\mu\omega h_2(\omega,\lambda)(5-4\lambda)}{b\lambda h_1(\omega,\lambda)} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi b h_1(\omega,\lambda)}(5\omega\sigma_{M_{2r}} + 2\lambda\sigma_{M_{1r}}), \\ & -\frac{2\mu\omega h_2(\omega,\lambda)(5-4\lambda)}{b\lambda h_1(\omega,\lambda)} + \frac{4\sqrt{2}}{\pi b h_1(\omega,\lambda)}(5\omega\sigma_{M_{2r}} + 2\lambda\sigma_{M_{1r}}) \Bigg] \end{aligned} \tag{2.15}$$

内取有意义的值. 由 (2.14) 与 (2.15) 两式可知，即使在确定性情形下式 (2.13) 不满足，但随机激励的出现可使 (2.13) 式随机地得到满足，只要方差 $\sigma_{M_{ir}}$ $(i=1,2)$ 足够大的话. 这说明随机激励的作用可增大系统的混沌域，使得系统更容易产生混沌运动. 以下我们通过数值模拟来进行说明.

3 数值结果

在本文的数值结果中，我们均取 $\omega=1$, $\lambda=1.25$, $\varepsilon=0.1$, 步长取为 0.001. 对高斯白噪声的模拟，目前普遍采用的是蒙特 - 卡罗方法 [8]. 对确定性动力系统，混沌运动的定量判别方法有很多，如系统运动的响应、庞卡莱映射、功率谱分析、最大李雅普诺夫指数等等. 其中，李雅普诺夫指数是刻画系统的相空间中轨道的指数收敛或发散率的无量纲化单位，最大李雅普诺夫指数大于零即意味着内部出现混沌运动，它适用于任何确定性或随机动力系统的混沌运动的判别，而庞卡莱映射以及功率谱分析等方法却无这个优点，根据它们来判别随机动力系统中的混沌运动往往比较复杂，甚至会导致错误的结论. 对于随机动力系统，若系统的样本响应幅值不是太大，其最大李雅普诺夫指数往往近似地等于或小于零，由文献 [5, 9] 可知，此时系统的运动不是混沌的. 以下我们就利用系统 (2.1) 中变量 $x_1(t)$ 运动的时间历程 $(t \sim x_1(t))$ 以及最大李雅普诺夫指数 L_1 的计算来进行判别.

在对以下各图的描绘中，系统 (2.1) 中的参数取值参考式 (2.13~2.15). 当 $\gamma=0$, $b=3.0$, $u=1.0$ 时，通过数值积分可得 (2.11) 式的右边近似为 -3.210, 故 (2.13) 式不满足，系统的运动为周期的 (见图 1)，其最大李雅普诺夫指数近似为 $L_1 \approx 0.0032$. 随着 b 的增大 ((2.11) 式的右边近似为 -1.926, 不满足 (2.13) 式)，由图 2 可知，系统的运动变为拟周期的，此运动的前两个较大的李雅普诺夫指数分别为 $L_1 \approx 0.0044$ 与 $L_2 \approx 0.0017$. 随着 b 的进一步增大 ((2.11) 式的右边约为 -0.963, 近似地满足 (2.13) 式)，系统的运动变为混沌运动 (见图 3. $L_1 \approx 0.23$). 对随机激励下系统的运动的模拟，我们首先计算 10 个不同的样本，然后再对它们进行平均，取它们的均值来刻画，并利用此均值来计算最大李雅普诺夫指数. 对于图 4, 由于 $I_1=[-3.714,-2.706]$, 故 (2.13) 式不满足，此时系统的运动虽无规则，但不是混沌运动，其最大李雅普诺夫指数为 $L_1 \approx 0.0087$. 随着 γ 与 S_0 的增大，式 (2.13) 可随机地得到满足 (由图 5 中所给参数，可得 $I_1=[-2.333,-0.307]$, $I_2=[-1.018,+1.018]$, 而对于图 6, 有 $I_1=[-4.632,+0.780]$, $I_2=[-2.544,+2.544]$, 由图 5、图 6

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

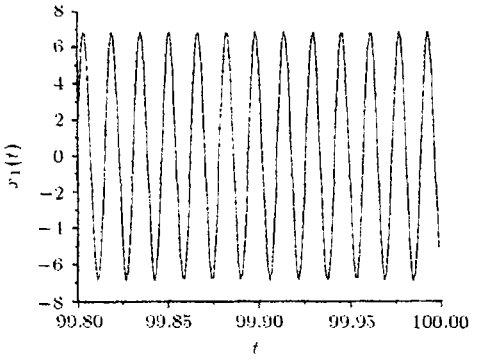

图 1 确定性情形下系统 (2.1) 的周期运动

Fig.1 Periodic motion of system (2.1) in deterministic case

($\gamma = 0$, $b = 3.0$, $u = 1.0$; $L_1 \approx 0.0032$)

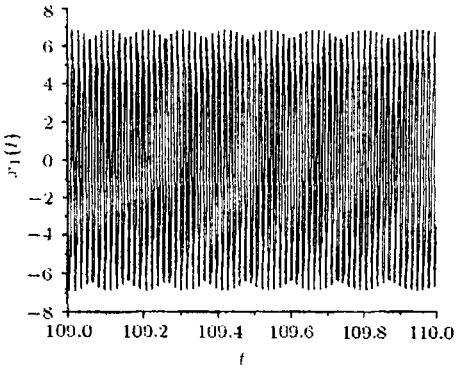

图 2 确定性情形下系统 (2.1) 的拟周期运动

Fig.2 Quasi-periodic motion of system (2.1) in deterministic case

($\gamma = 0$, $b = 5.0$, $u = 1.0$; $L_1 \approx 0.0044$, $L_2 \approx 0.0017$)

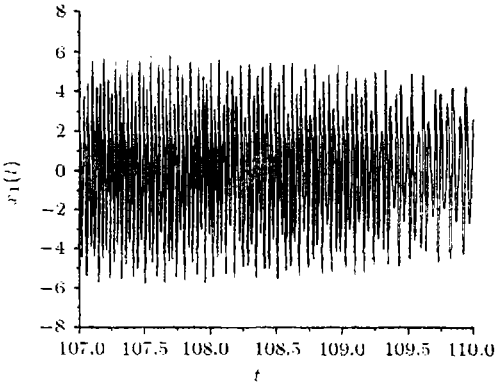

图 3 确定性情形下系统 (2.1) 的混沌运动

Fig.3 Chaotic motion of system (2.1) in deterministic case

($\gamma = 0$, $b = 6.0$, $u = 1.0$; $L_1 \approx 0.23$)

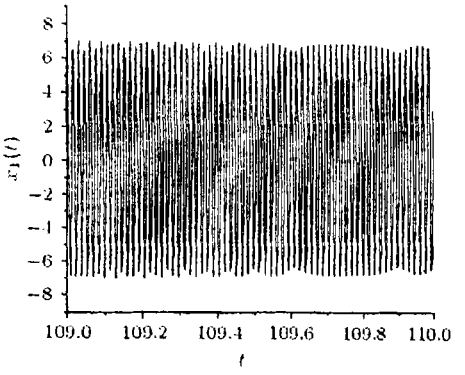

图 4 随机激励下系统 (2.1) 的非混沌运动

Fig.4 Non-chaotic motion of system (2.1) in stochastic case

($\gamma = 0$, $b = 3.0$, $u = 1.0$, $S_0 = 0.2$; $L_2 \approx 0.0082$)

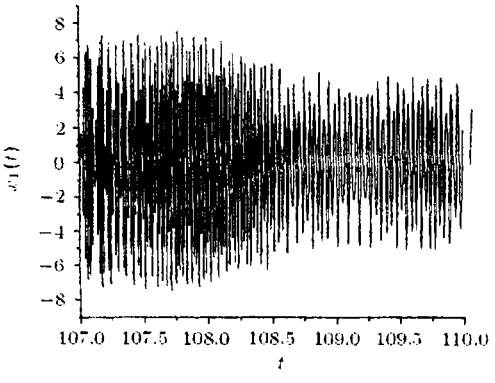

图 5 随机激励下系统 (2.1) 的混沌运动

Fig.5 Chaotic motion of system (2.1) in stochastic case

($\gamma = 2.0$, $b = 3.0$, $u = 1.0$, $S_0 = 0.5$; $L_1 \approx 0.57$)

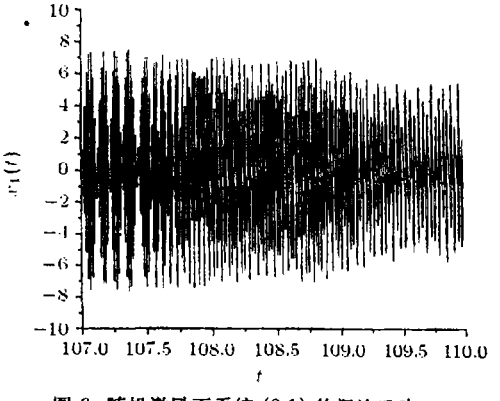

图 6 随机激励下系统 (2.1) 的混沌运动

Fig.6 Chaotic motion of system (2.1) in stochastic case

($\gamma = 1.0$, $b = 5.0$, $u = 1.0$, $S_0 = 0.8$; $L_1 \approx 0.41$)

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

可见，图 1 中的周期运动与图 2 中的拟周期运动在附加随机激励作用后将变为混沌运动，从而，我们可知，噪声激励的作用可使系统更容易出现混沌运动．需要对图 3 、图 5 与图 6 说明的是，随着时间的增加，系统的运动仍将继续无规则地振荡，并不会衰减至平衡位置．

4 结 论

本文利用动力系统理论，通过对随机激励性质的假定，给出了高维梅尔尼科夫方法应用于拟可积随机哈密顿系统的同宿分岔与混沌运动研究的推广形式．实例的理论与数值研究结果表明，高维梅尔尼科夫方法同样适用于本文所讨论的随机动力系统的分析．此外，通过实例的研究还可发现，在高斯白噪声外激励的作用下，确定性情形下的混沌阈值往往要发生偏离，随着随机梅尔尼科夫过程的方差的增加，混沌阈值也随机地变化于一个更大的区间，从而也就使得系统更容易出现混沌运动．

参 考 文 献

1 Allen JS, Samelson RM, Newberger PA. Chaos in a model of forced quasi-geostrophic flow over topography: An application of Melnikov's method. *J Fluid Mech,* 1991, 226: 511～547

2 Thompson JMT, Rainey RCT, Soliman MS. Ship stability criteria based on chaotic transients from incursive fractals. *Philosophical Trans of the Royal Soc of London A*, 1990, 332: 149～167

3 Yim SCS, Lin H. Probabilistic analysis of a chaotic dynamical system. In: Kim JH, Stinger J eds. Applied Chaos. New York, NY: Wiley, 1992

4 Frey M, Simiu E. Noise-induced chaos and phase space flux. *Physica D,* 1993, 63: 321～340

5 Xie WM. Effect of noise on chaotic motion of buckled column under periodic excitation. *ASME Nonlinear and Stochastic Dynamics,* 1994, AMD-Vol.192/De-Vol.73: 215～225

6 Lin H, Yim SCS. Analysis of a nonlinear systems exhibiting chaotic, noisy chaotic and random behaviors. *ASME Journal of Applied Mechanics,* 1996, 63: 509～516

7 Wiggins S. Global Bifurcations and Chaos. New York: Springer-Verlag, 1990

8 朱位秋. 随机振动. 北京: 科学出版社, 1998 (Zhu Weiqi. Stochastic Oscillations. Beijing: Science Press, 1998 (in Chinese))

9 Wolf A, Swift J, Swinney H, Vastona A. Determining Lyapunov exponents form a time series. *Physica D,* 1985, 16: 285～317

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

NOISE-INDUCED CHAOTIC MOTIONS IN QUASI-INTEGRABLE-HAMILTONIAN SYSTEMS

Gan Chunbiao Guo Yinu
(*Department of Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou* 310027, *China*)

Abstract Engineering structures are often subjected to stochastic loadings, such as those occurring due to wind, earthquakes and ocean waves, etc. Such systems used to be idealized to the deterministic ones with harmonic excitations in order to study the chaotic dynaniics by the well-known Melnikov method. However, one knows that the validity of such idealized models depends on whether an appropriate choice was made of the amplitude and frequency of the harmonic function used as an idealization of the actual stochastic excitation. So there exist many drawbacks in such method. Recently, a more natural and effective approach is put forward to study the chaotic behavior of the stochastic systems, i.e., to apply the Melnikov theory directly to such systems where the noisy excitations are assumed to be bounded and uniformly continuous. There have been a number of publications analyzing the effects of noises on the chaotic behavior of dynamical systems, but till now, these studies are still limited to the systems with single degree of freedom.

In the present paper, the chaotic motions in quasi-integrable-Hamiltonian systems with multi-degree of freedom under both harmonic and noisy excitations are investigated. When the excitations are assumed to be sufficiently small and the noisy excitation is ensemble uniformly continuous, an extended form of high-dimensional Melnikov method is given to analyze the stochastic quasi-integrable-Hamiltonian systems by using the dynamical theory. By computing the mean value and the variance of the Melnikov integrals which can be divided into the deterministic part and the stochastic part, the homoclinic bifurcations of a two DOF quasi-integrable-Hamiltonian system are studied in detail by this extended method, the parametric threshold for chaotic motions is obtained and the effects of noise on the system's motions are also discussed. It is shown that the addition of external excitation of Gauss white noise can make the parametric threshold for chaotic motions vary in a larger region, so that chaotic motions may occur more easily.

Moreover, simulations by Monte-Carlo method and computations of the Lyapunov exponents, which characterize the average exponential rate of divergence or convergence of nearby orbits in phase space, are performed. It is shown that the system's periodic and quasi-periodic motions may become chaotic ones and their maximal Lyapunov exponents become positive when external Gaussian white noise is added to the system. Therefore these numerical results are in excellent agreement with the theoretical ones and one then can conclude that the extended method given in the present paper is reasonable.

Key words Noisy excitation, quasi-integrable-Hamiltonian system, stochastic Melnikov method, chaotic motion

Received 30 June 1999, revised 13 December 1999.

1) The project supported by the Post-Doctoral Fellow Foundation.

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net