多工况应力和位移约束下连续体结构拓扑优化

隋允康
(北京工业大学机电学院力学部，北京 100022)
杨德庆 王 备
(大连理工大学工程力学系，大连 116023)

摘要 将文 [1] 所提出的对拓扑变量的独立连续映射 (ICM) 的拓扑优化方法应用于连续体结构，从而建立了统一的以重量为目标，考虑应力和位移约束的连续体结构拓扑优化模型. 通过对位移 - 应力拓扑解和各工况下应力拓扑解的综合协调，进而对于协调拓扑解按照阈值完成从离散到连续的反演，并且采用分层与加权策略克服了“荷载病态”困难. 给出的经典的二维平面问题和三维连续体结构拓扑优化算例表明，这种统一的模型由骨架结构发展到连续体结构的优化也是成功的.

关键词 模型化，连续体，结构拓扑优化

引 言

结构拓扑优化被公认为是具有挑战性和潜在经济效益的研究领域之一. 其研究历史可追溯到 1904 年 Michell 提出的桁架理论. 尽管结构优化理论首先在拓扑布局优化方面提出，但人们从 60 年代以来相继建立了截面优化及形状优化等方面的理论体系. 对拓扑优化的研究是 70 年代末以来的工作. 而连续体结构拓扑优化由于其特有的难度，几乎未得到发展，直到近 10 年来才取得了快速的发展. 代表性的工作有 Bendsoe 和 Kikuchi 提出的均匀化 (Homogenization) 方法以及变密度法、变厚度法等；其它一些工作，如 Xie 和 Steven 提出的“进化算法”,Eschenauer 的“泡泡法”,Jog 和 Haber 等人的“等周方法”也是一些较有意义的工作 [1~5]. 连续体结构拓扑优化的已有工作主要研究了受到整体约束下 (如体积约束、结构自振频率约束等), 以结构柔顺度为目标函数的优化问题. 而实际结构中应力和位移约束是非常重要的，不考虑它们的设计是不能付诸工程使用的. 同时骨架结构与连续体结构的拓扑优化选用了不同的目标函数，前者多以结构重量极小化为目标；后者多以结构柔顺性最小为目标. 因此，骨架结构与连续体结构拓扑优化模型无法统一，无法将骨架结构拓扑优化的有效模型及解法推广到连续体结构拓扑优化中，尤其是柔顺度对应着某一工况，无法处理多工况问题. 另外，利用目前给出的均匀化方法或密度法的模型很难建立位移约束与拓扑设计变量的近似显函数关系；即使建立了这一关系，也由于该问题中拓扑设计变量过多，难以利用常规的数学规划方法进行求解. 为了解决上述问题，我们从文 [6] 对拓扑变量提出的 ICM (Independent-Continuous Mapping) 模型寻找出路，经过推导和算例检验，我们成功地将 ICM 法推广到连续体结构拓扑优化中，并交替使用对偶非线性规划方法和准则法，较好地解决了这一问题.

1998-01-11 收到第一稿， 1999-05-07 收到修改稿.

1 ICM 模型下含应力和位移约束的连续体结构拓扑优化对偶解法

将文 [6] 提出的独立、连续拓扑变量概念用于连续体，即把拓扑变量从依附于截面层等低层次变量上抽象出来，成为独立的层次. 拓扑变量 t_i 表征第 i 号膜或块体的有与无，代替传统的 $t_i=0$ 或 1 的离散值，取 $t_i \in [0\ 1]$ 中连续值，表示从无到有的过渡状态，并用过渡函数 $f(t_i)$ 识别单元重量、刚度和许用应力，于是将离散的拓扑优化模型映射成连续可微的优化模型

$$\left.\begin{aligned}
&\text{求 } t=(t_1,t_2,\ldots,t_n)^{\mathrm{T}}\\
&\text{Min } W=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)w_i^0\\
&\text{s.t. } \sigma_{il}\le f(t_i)\overline{\sigma_i^0}\\
&\qquad u_{vl}\le \overline{u_v}\\
&\qquad 0\le t_i\le 1\\
&\qquad (i=1,\ldots,n;\ l=1,\cdots,L;\ v=1,\ldots,V)
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中 t_i 是 i 单元独立、连续拓扑变量， σ_{il} 为单元 i 在工况 l 的 Mises 应力， $\overline{\sigma_i^0}$ 为单元 i 的许用应力， w_i^0 为 i 单元的固有重量； $\overline{u}_r$ 是位移约束， $f(t)$ 为过滤函数 [6], 本文采用如下形式

$$f(t)=t^3 \tag{2}$$

n 为单元总数， L 与 V 分别为荷载工况总数与位移约束总数.

欲求解问题 (1), 首先要建立位移关于单元拓扑设计变量的近似显函数. 由莫尔定理知道，结构任意节点某一方向的广义位移由下式给出

$$u_j=\sum_{i=1}^{n} D_i=\sum_{i=1}^{n}\int_i \boldsymbol{\sigma}_i^{v^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\varepsilon}_i^l \mathrm{d}v \tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}_i^v$ 为单位虚荷载下单元 i 的应力向量， $\boldsymbol{\varepsilon}_i^l$ 为实荷载下单元 i 的应变向量.

这里应变向量

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^l=\boldsymbol{H}_i^{-1}\boldsymbol{\sigma}_i^l \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{H}$ 为材料刚度矩阵，且

$$\boldsymbol{H}_i=f(t_i)\boldsymbol{H}^0 \tag{5}$$

对二维各向同性材料

$$\boldsymbol{H}^0=\frac{E}{1-v^2}\begin{bmatrix}1 & v & 0\\ v & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-v}{2}\end{bmatrix} \tag{6}$$

由 (5) 得

$$\boldsymbol{H}_i^{-1}=\frac{1}{f(t_i)}\boldsymbol{H}^{0^{-1}} \tag{7}$$

将 (4) 与 (7) 代入 (3) 得

$$D_i=\frac{1}{f(t_i)}\int_i \boldsymbol{\sigma}_i^{v^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{H}^{0^{-1}}\boldsymbol{\sigma}_i^l \mathrm{d}v \tag{8}$$

对模型中位移约束有

$$u_{vl}=\sum_{i=1}^{n}D_{vil}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f(t_i)}\int_i \boldsymbol{\sigma}_i^{v^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{H}^{0^{-1}}\boldsymbol{\sigma}_i^l \mathrm{d}v \tag{9}$$

因位移约束属于整体约束，按上述得到式 (9) 表示的近似显函数是恰当的处理，而应力是局部性约束，作零阶近似可节省大量计算量，由 (1) 式中应力约束得：

首先，采用满应力准则法将应力约束化为动态尺寸下限，获得拓扑变量值的下限．然后再用规划法求解位移约束下的拓扑优化．下面给出应力约束的处理

$$f(t_i)\geq f(\underline{t_i})=\max_l\left(\sigma_{il}/\overline{\sigma_i^0}\right) \tag{10}$$

将 (9) 与 (10) 代入式 (1) 得

$$\left.\begin{aligned}&求\ t\in E^n\\&\mathrm{Min}\ \ W=\sum_{i=1}^{n}f(t_i)w_i^0\\&\mathrm{s.t.}\ \sum_{i=1}^{n}A_{ji}/f(t_i)\leq\overline{a_j}\\&\qquad f(\underline{t_i})\leq f(t_i)\leq 1\\&\qquad (i=1,\ldots,n;\ j=1,\cdots,J)\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

其中

$$A_{ji}=\sum_{i=1}^{n}\int_i \boldsymbol{\sigma}_i^{v^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{H}^{0^{-1}}\boldsymbol{\sigma}_i^l \mathrm{d}v \tag{12}$$

$$\overline{a_j}=\overline{u_r},\quad j=(r-1)\times L+l;\quad v=1,\ldots,V;\quad l=1,\ldots,L;\quad J=V\times L$$

引入变换

$$z_i=f(t_i)-f(\underline{t_i}) \tag{13}$$

式 (11) 化为

$$\left.\begin{aligned}&求\ z\in E^n\\&\mathrm{Min}\ \ W=\sum_{i=1}^{n}w_i^0 z_i\\&\mathrm{s.t.}\ \sum_{i=1}^{n}\frac{A_{ji}}{z_i+c_i}\leq\overline{a_j}\\&\qquad 0\leq z_i\leq\overline{z_i}\\&\qquad (i=1,\ldots,n;\ j=1,\cdots,J)\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

其中

$$c_i=f(\underline{t_i}),\quad \overline{z_i}=1-c_i \tag{15}$$

式 (14) 是从包含单元数量很大的一个区域作为基结构开始优化的，每个单元包含一个拓扑设计变量，因此基结构中拓扑变量数也很大．若单元数量达到 1440 个，也就是说拓扑变量达到 1 440 个．如果再考虑每个单元的应力和位移约束，则问题的全部约束数量将达到数千个以上．对于三维连续体结构拓扑优化，其规模更大．为减少求解规模，我们按对偶非线性规划推导，得到式 (14) 对偶规划的二阶近似

$$\left.\begin{aligned}&\text{求 } \lambda \in E^J \\ &\text{Min} \quad -\phi(\lambda) = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{J}\sum_{i\in n_a}\frac{A_{ji}A_{ki}\lambda_j\lambda_k}{\left(z_i^{(v)}+c_i\right)^3 w_i^0} \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{J}\left[\overline{a_j} - \sum_{i\in n_a}\frac{3A_{ji}}{2\left(z_i^{(v)}+c_i\right)} - \sum_{i\notin n_a}\frac{A_{ji}}{2\left(z_i^{(v)}+c_i\right)}\right]\lambda_j \\ &\text{s.t. } \lambda_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, J)\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

其中 $z_i^{(v)}$ 为 z_i^* 迭代中近似值

$$n_a = \{i \mid 0 < z_i^* < \overline{z_i}\} \tag{17}$$

将上式的解代入原 - 对偶关系中得

$$z_i^* = \begin{cases} 0 & (S_i \leq 0) \\ S_i & (0 < S_i < \overline{z_i}) \\ \overline{z_i} & (S_i \geq \overline{z_i}) \end{cases} \tag{18}$$

$$S_i = \sqrt{\sum_{r=1}^{J}\lambda_r^* A_{ri}/w_i^0} - c_i \tag{19}$$

由式 (13) 得

$$t_i^* = f^{-1}\left(z_i^* + f(\underline{t_i})\right) \tag{20}$$

因 J 远远小于 n, 问题 (16) 的规模要比问题 (1) 小得多，加之采用了对位移约束数值上的粗删策略，问题 (16) 的规模就更小了．

2 应力与位移 - 应力拓扑解的综合协调和拓扑变量由连续向离散的反演

由于拓扑优化实际上要给出体现最佳传力路线的结构构成的空间关系，因而它对各工况的应力是颇为敏感的．仅仅按上节的计算结果确定拓扑，势必忽略应力的作用，因此需把上节求出的位移 - 应力拓扑解同如下，求出的各工况应力拓扑解进行综合协调．

单独考虑某工况下，应力的零阶近似所得的连续拓扑变量称为某工况下的应力拓扑解．由式 (1) 的应力约束得到 i 单元 l 工况下的应力拓扑解

$$\tau_{il}^{(v+1)} = f^{-1}\left(\sigma_{il}/\overline{\sigma_i^0}\right) \tag{21}$$

把前一节所得的位移 - 应力拓扑解看成第 $L+1$ 号荷载工况的应力拓扑解 $\tau_{iL+1}^{(v+1)} = t_i^*$, 从而得

到 i 单元各工况下的协调拓扑解

$$t_i^{(v+1)} = \sum_{l=1}^{L+1} \tau_{il}^{(v+1)} / (L+1) \tag{22}$$

在程序实现这一算法时，结构拓扑开始主要由应力控制，通常只对 L 个应力拓扑解进行综合，当位移 - 应力拓扑解参与控制时，才对 $L+1$ 个解进行综合.

$t_i^{(v+1)}$ 由连续型变量向离散型变量的反演是借助于 $f\left(t_i^{(v+1)}\right)$ 同一个阈值 $D^{(v+1)}$ 的比较而实现的，其算法为

$$t_i^* = \begin{cases} 1 & \left(f\left(t_i^{(v+1)}\right) \geq D^{(v+1)}\right) \\ 0 & \left(f\left(t_i^{(v+1)}\right) < D^{(v+1)}\right) \end{cases} \tag{23}$$

阈值的取法依赖于数值计算的经验．鉴于最优拓扑结构体现了各单元对于结构整体的综合效应，因此每轮阈值的选取就应当同各单元的“无有转化”状态有关．显然，$t_i^* = 1$ 的那些不必再处理了，只需关注那些还没有达到 1 的拓扑量.

取单元的 $f\left(t_i^{(v+1)}\right)$ 的算术平均为有、无之间的界限是容易接受的，为了便于调控，再乘一个折减系数 $\delta^{(v+1)}$

$$D^{(v+1)} = \left(\sum_{i \in n_c} f\left(t_i^{(v+1)}\right) / n_c\right) \cdot \delta^{(v+1)} \tag{24}$$

其中，n_c 为待反演单元总数，$\delta^{(v+1)}$ 在 0.55~0.85 之间取值.

经过上述“反演计算”，这一轮的拓扑优化就完成了由连续型的拓扑变量向传统 0-1 型的转换．记这一轮 $t_i^* = 1$ 的所有拓扑变量的集合为 $E^{(v+1)}$．相应地，若 $t_i^* = 0$, 则 $t_i^* \notin E^{(v+1)}$.

此时折减系数不应选得过大，因为位移起作用时，一般拓扑结构已很接近最优拓扑．把每个单元拓扑值同阈值相比较，确定单元的取舍．经过本层反演计算，得到新的拓扑结构，再进入下一轮迭代.

拓扑优化迭代终止于两个准则的同时满足

$$\left|\left(W^{(v+1)} - W^{(v)}\right) / W^{(v+1)}\right| \leq \varepsilon \tag{25}$$

$$E^{(v+1)} = E^{(v)} \tag{26}$$

式 (25) 中的 $W^{(v)}, W^{(v+1)}$ 为前轮与本轮迭代的结构名义重量，ε 为输入的收敛精度．式 (26) 表明拓扑变量集合不再变动.

在进行每轮新的迭代伊始，为了避免结构总刚度阵奇异，采用如下措施处理被删除的单元

$$t_i^{(v+1)} = \begin{cases} 1 & \left(t_i^* \in E^{(v+1)}\right) \\ 0.001 & \left(t_i^* \notin E^{(v+1)}\right) \end{cases} \tag{27}$$

新的一轮迭代时，单元刚度按下式计算

$$k_i = \int_{v_i} \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H}_i \boldsymbol{B}_i \mathrm{d}v_i = f(t_i) k_i^0 = f(t_i) \int_{v_i} \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H}_i^0 \boldsymbol{B}_i \mathrm{d}v_i \tag{28}$$

3　利用分层与加权系数策略克服“荷载病态”困难

给定了作为基结构的区域，影响单元拓扑值大小的因素除了同该单元在结构中的位置有关，还与荷载分量间量级有关．以单工况为例，如果各荷载分量数值绝对值量级相差悬殊，会

出现小荷载分量对应的单元被删除而没有传递小荷载的单元. 如果用减小阈值的方法保留传递小荷载的单元, 必然导致传递大荷载的结构过于 "粗壮", 因结构不清晰而给不出最优拓扑. 类似情况在多工况时各工况荷载量级相差悬殊时也会出现. 这种荷载量级相差悬殊引起的困难非常类似于结构分析时各部分刚度量级相差悬殊所引起的 "总刚病态" 的困难, 因此我们称之为结构拓扑优化中的 "荷载病态".

从 "总刚病态" 的克服可以得到解决这一困难的思路. 把刚度量级过大的单元或子结构视为刚性的, 而不对总刚度矩阵提供贡献, 于是 "总刚病态" 的困难被克服了. 其实质是把结构分成刚体和弹性体两层处理, "荷载病态" 困难也可引入分层处理策略去克服. 另一个同时采用的策略是适当缩小荷载量级差距, 这即是加权系数法.

经验表明, 大小荷载绝对值之比在 100 以内不会出现 "荷载病态", 因此可以用比值超过 100 为限将荷载分为大小两层. 从工程角度看, 不应将荷载分为三个层次, 因为在 10000 的比值下小荷载实际上已达到可忽略的程度.

下面以多工况为例说明分层与加权系数两个策略的执行. 首先把多工况分为大荷载工况和小荷载工况两大类.

a) 第一层优化时主要计算出传递大荷载工况的结构, 由于此时不必考虑小荷载工况的传递路线是否被结构包含, 所以可选择较大的删除率 (即取大的阈值), 用较少的单元组成清晰的结构, 称为第一层结构.

b) 第二层优化时, 保持组成第一层结构的单元不变, 第一层结构的单元参与结构分析, 但不参与优化. 将结构在小荷载工况作用下所得单元拓扑值 $\tau_{il}^{(v+1)}$ 乘以一荷载加权系数 c_l, 然后与其它工况下单元拓扑值进行综合评价, 确定出阈值, 对剩余的单元进行反演计算, 得到既能传递大荷载工况又能传递小荷载工况的最终的拓扑结构形式.

顺便指出, 第一层对小荷载工况的效应不予考虑, 第二层在大荷载工况的结果上考虑小荷载工况的效应, 这类似于分层加载的做法. 上述第二层的执行中涉及到对于加权系数 c_l 的计算

$$c_l = \begin{cases} 1 & (l \text{ 为大荷载工况}) \\ P_l \cdot P_m/(3P_a) & (l \text{ 为小荷载工况}) \end{cases} \tag{29}$$

其中 P_l, P_m 分别是 l 号荷载工况和最大荷载工况的荷载绝对值的最大值. P_a 为所有小荷载工况的荷载绝对值的最大值的算术平均. 加权系数 c_l 的选取体现了使荷载数值缩小差距且保持差别的原则. 相应地, 第二层计算中的阈值采用如下算法

$$D^{(v+1)} = \delta^{(v)} \cdot \sum_{l=1}^{L} \sum_{i \in n_c} f\left(\tau_{il}^{(v+1)}\right) \cdot c_l/(n_c L) \tag{30}$$

数值实验表明这一阈值的选定十分有效.

关于单工况中存在大小荷载绝对值量级比为 100 以上的亦是类似的算法. 有位移 - 应力拓扑解时作为大荷载的第 $L+1$ 号解参与进去即可.

4 算例与讨论

例 1 如图 1 所示, 基结构为 0.24 m×0.1 m 的平面体, 厚度 0.009 m, 材料弹性模量为 6.889×

$10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$, 许用应力为 $1.55\times10^{8}\,\mathrm{N/m^2}$, 设密度为 $1.0\,\mathrm{g/mm^3}$. 划分为 48×20 个矩形单元. 一集中荷载 $P=15\,600\,\mathrm{N}$ 作用于右边界中点，为避免应力集中的影响，将荷载分散在右边界中间的三个节点上. 右边界中点处垂直向下位移约束 $=0.15\,\mathrm{mm}$. 左边界全部采用固定约束. 优化后拓扑结构如图 2 所示. $\delta=0.775$, 迭代次数 $=5$, $W=62\,500\,\mathrm{g}$. 仅在应力约束下的拓扑与文 [1] 结果相同, 见图 3.

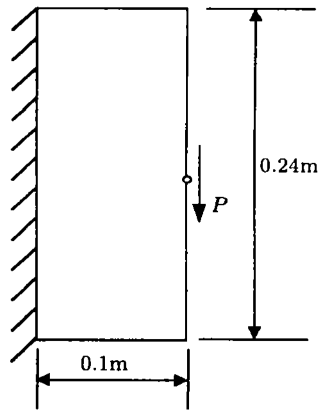

图 1　例 1 基结构

Fig.1　Basic structure of example 1

例 2 如图 4 所示, 基结构为一 $16\,\mathrm{mm}\times10\,\mathrm{mm}$ 的平面体, 厚度为 1 mm, 材料弹性模量为 $2.0\times10^{5}\mathrm{N/m^2}$, 许用应力为 $7\,000\,\mathrm{N/mm^2}$, 设密度为 $1.0\,\mathrm{g/mm^3}$. 划分为 64×40 个矩形单元, 荷载 $F=1\,000\,\mathrm{N}$, A 点处垂直向下位移约束 $=0.6\,\mathrm{mm}$, B, C 点处垂直向下位移约束 $=0.12\,\mathrm{mm}$. 优化后拓扑结构如图 5 所示. $\delta=0.615$, 迭代次数 $=18$, $W=44.375\,\mathrm{g}$.

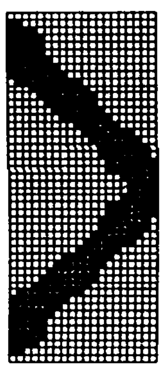

图 2　例 1 拓扑优化结果

Fig.2　Optimum topology

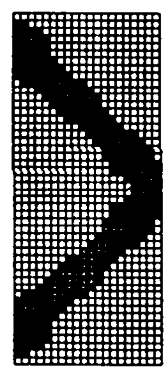

图 3　例 1 仅在应力约束下的结果

Fig.3　The result with stress constraints only

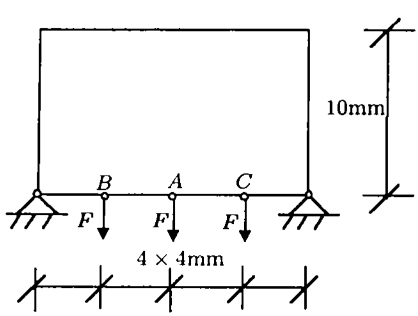

图 4　例 2 基结构

Fig.4　Basic structure of example 2

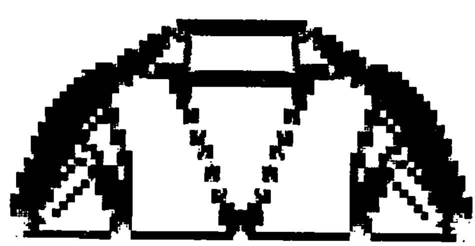

图 5　例 2 拓扑优化结果

Fig.5　Optimum topology result of example 2

例 3 如图 6 所示, 基本结构为 $1\times1\times1\,(\mathrm{m^3})$ 的立方体, 划分为 $10\times10\times10$ 个正方体块体元, 材料弹性模量为 $6.889\times10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$, 设密度为 $1.0\,\mathrm{g/mm^3}$, 许用应力为 $1.55\times10^{8}\,\mathrm{N/m^2}$. 四个集中荷载 $P=25\,000\,\mathrm{N}$ 作用于立方体上表面, 立方体下方四个角点处有铰链支承. 本文迭代

次数 =10, $W=1.32\times10^{8}$ g. 最优拓扑结构如图 7 所示.

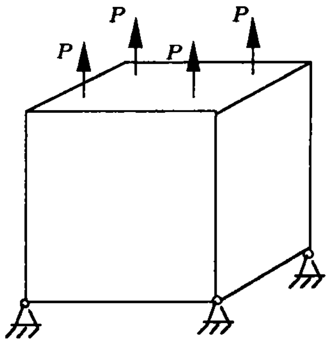

图 6 例 3 基结构

Fig.6 Basic structure of example 3

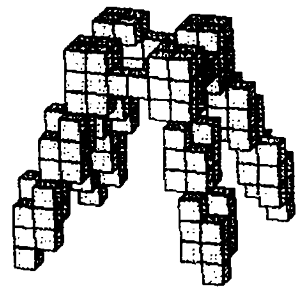

图 7 算例 3 优化结果

Fig.7 Optimum topology result of example 3

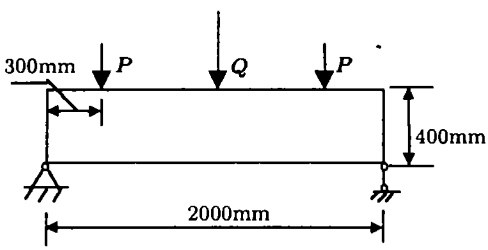

图 8 例 4 基结构

Fig.8 Basic structure of example 4

例 4 基结构为 $2\,000\,\mathrm{mm}\times400\,\mathrm{mm}^2$ 的长方形平面体, 厚度 $=9.0\,\mathrm{mm}$, 材料弹性模量 $6.889\times10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$. 左右两端由铰链支承, 荷载 P,Q 作用其上 (见图 8), 划分为 100×20 个正方形单元, $P=200\,\mathrm{N}$, $Q=20\,000\,\mathrm{N}$. 单元许用应力为 $1.55\times10^{8}\,\mathrm{N/m^2}$, 设密度为 $1.0\,\mathrm{g/mm^3}$. 只是受两种工况作用, 工况一: 只作用两个对称荷载 P, 工况二: 只作用荷载 Q. 荷载 Q 为第一层, 此时 $\delta=0.55$. 第一层结构见图 9, 最终结构见图 10, $W=3\,506\,400\,\mathrm{g}$, 迭代次数为 14 次.

比较图 9 及图 10 可以看出, 本文给出的方法是成功的, 既获得了各工况综合作用下的清晰的拓扑, 又使重量目标减轻.

图 9 第一层结构拓扑

Fig.9 Structural topology of first level

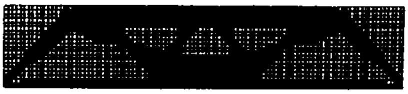

图 10 最终结构拓扑

Fig.9 Final structure topology

5 结 论

本文表明, 对拓扑变量的 ICM 方法引入连续体结构拓扑优化不同于以往的各种连续体结构拓扑优化模型化方法, 它实现了以重量为目标函数、多工况下应力和位移约束模型的建立与求解. 有关的对偶规划解法、综合评价和阈值反演方法都是有效的, 利用分层与加权系数策略克服“荷载病态”困难也是成功的, 数值实验支持了本文的理论与方法, 且迭代次数很少.

参 考 文 献

1 Bendsoe MP Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Comp Meth Appl Mech Engrg*, 1988, 71(1): 197~224

2 Yang RJ, Chuang CH. Optimal topology design using programming. *Computers & Structures*, 1994, 52(2): 265～275

3 Jog CS, Haber RB, Bendsoe MP. A new approach to variable topology shape design using a constraint on perimeter. *Struct Opt*, 1996, 11(1): 1～12

4 Eschenauer HA, Kobelev VV, Schumacher. A bubble method for topology and shape optimization of structures. *Struct Opt*, 1994, 8: 42～51

5 Xie YM, Steven GP. A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers & Structures*, 1993, 49(5): 885～896

6 隋允康. 建模 · 变换 · 优化 —— 结构综合方法新进展. 大连理工大学出版社, 1996 (Sui Yunkang. Modelling, Transformation and Optimization——New Developments of Structural Synthesis Method. China: Dalian University of Technology Press, 1996 (in Chinese))

TOPOLOGICAL OPTIMIZATION OF CONTINUUM STRUCTURE WITH STRESS AND DISPLACEMENT CONSTRAINTS UNDER MULTIPLE LOADING CASES

Sui Yunkang

(Department of Engineering Mechanics, College of Mechanical Engineering and Applied Electronic Technique, Beijing Polytechnic University, Beijing 100022, *China)*

Yang Deqing　　Wang Bei

(Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, *China)*

Abstract ICM (Independent Continuous Mapping) methodology is used to establish an optimization model for continuum structure in which the formulation is identical to skeleton structure's. The model minimizes the structural weight with stress and displacement constraints for multiple loading cases. The topological variable is independent so that it doesn't attach to the sectional or shape variable any longer. Moreover, the topological variable is continuous instead of discrete because of the use of a filter function. The filter function can also recognize element weight, stiffness and allowable stress and it is the key to construct ICM model. Inverse mapping from the continuous variable to the discrete variable is implemented using an adaptive threshold. In each iteration, stress topology variables and displacement topology variables are obtained using the zero order and the first order approximate models respectively and the later is the solution of a quadratic programming that is a second order approximation of the dual programming corresponding to the primal problem with displacement constraints under multiple loading cases. A multiple-level strategy and a weight factor are used when the loads are of different order of magnitude whose state is called as ill loading case in the paper. Typical topology optimization examples of both two and three dimension show that the method is successfully extended from the skeleton structure to the continuum structure.

Key words structural topological optimization, independent and continuous topological variable, filter function, mapping method, continuum structure

Received 13 March 1998, revised 14 December 1998.