

层状分数阶黏弹性饱和地基与梁 共同作用的时效研究¹⁾

艾智勇²⁾ 王禾 慕金晶

(同济大学地下建筑与工程系, 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘要 饱和地基与梁共同作用问题的研究在力学领域及工程界都具有重要意义. 采用分数阶 Merchant 模型研究饱和地基的流变固结, 该模型比常用整数阶黏弹性模型更能精确反映地基的时变特征. 基于层状正交各向异性黏弹性饱和地基的固结解答, 采用有限元法与边界元法耦合的方法, 研究梁与分数阶黏弹性饱和地基的共同作用问题. 依据 Timoshenko 梁理论将梁离散为若干单元, 进而得到梁的总刚度矩阵方程; 将黏弹性地基固结问题的精细积分解答作为边界积分的核函数, 采用边界元法建立地基柔度矩阵方程; 结合梁与地基接触面的位移协调条件以及力的平衡条件, 通过有限元法与边界元法的耦合, 最终求得层状分数阶黏弹性饱和地基与 Timoshenko 梁共同作用的解答. 将本文地基退化为 Kelvin 地基进行计算, 并与已有文献中的算例进行对比, 二者具有很好的 consistency. 在此基础上, 探讨分数阶次和地基成层性对梁与黏弹性饱和地基共同作用的影响. 结果表明: 分数阶次高的黏弹性饱和地基的固结速率明显更快; 对于层状地基, 加固表层土体能有效控制地基整体沉降, 并减小差异沉降. 实际工程中, 应充分考虑饱和地基流变及土体分层性的影响, 以准确分析梁与地基的共同作用过程.

关键词 黏弹性, 层状饱和地基, Timoshenko 梁, 有限元-边界元耦合, 时效性

中图分类号: TU470 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-20-447

TIME-DEPENDENT ANALYSIS OF THE INTERACTION BETWEEN MULTILAYERED FRACTIONAL VISCOELASTIC SATURATED SOILS AND BEAMS¹⁾

Ai Zhiyong²⁾ Wang He Mu Jinjing

(Department of Geotechnical Engineering, Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract The study of the interaction between beams and saturated soils is of great significance in both mechanics and engineering fields. In this paper, the fractional Merchant model is adopted to solve the rheological consolidation of saturated soils, which can simulate the time-depending characteristics of the soils more accurately than the common integer order viscoelastic models. Based on the solution of consolidation for multilayered cross-anisotropic viscoelastic saturated soils, the finite element method (FEM) and the boundary element method (BEM) are coupled to investigate the

2020-12-23 收稿, 2021-02-28 录用, 2021-03-01 网络版发表.

1) 国家自然科学基金 (41672275) 资助项目.

2) 艾智勇, 教授, 主要研究方向: 岩土及地下工程. E-mail: zhiyongai@tongji.edu.cn

引用格式: 艾智勇, 王禾, 慕金晶. 层状分数阶黏弹性饱和地基与梁共同作用的时效研究. 力学学报, 2021, 53(5): 1402-1411

Ai Zhiyong, Wang He, Mu Jinjing. Time-dependent analysis of the interaction between multilayered fractional viscoelastic saturated soils and beams. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(5): 1402-1411

interaction between beams and fractional viscoelastic saturated soils. The beam is discretized into a number of elements according to the Timoshenko beam theory, and then the global stiffness matrix equation of the beam is obtained. The precise integration solution of the viscoelastic soils is considered as the kernel function of the boundary integral, and the flexibility matrix equation of soils is established by the BEM. Finally, by coupling the FEM and the BEM, the solution of the interaction between multilayered fractional viscoelastic saturated soils and the Timoshenko beam is derived by introducing the displacement coordination condition and equilibrium condition for forces between them. The soil model adopted in this study is degenerated into the Kelvin model, and the results obtained are compared with those in the existing literature, which shows a good consistency. On this basis, the effects of the fractional order and stratification of soils on the interaction between beams and viscoelastic soils are discussed. Numerical results show that: the consolidation velocity of viscoelastic saturated soils with higher fractional order is obviously faster; for layered soils, the reinforcement of topsoil can effectively control the ground settlement and reduce the differential settlement. In practical engineering, the effects of rheology of saturated soils and soil stratification should be well considered to analyze the interaction between beams and soils more accurately.

Key words viscoelasticity, layered saturated soils, Timoshenko beam, FEM-BEM coupling, time-dependent effect

引言

弹性地基梁模型在公路、铁路和建筑基础等工程的设计计算中有广泛应用, 并因为简单适用而备受青睐。国内外很多学者针对弹性地基梁问题开展过研究工作^[1-9], 但这些研究多基于弹性地基或 Winkler 地基模型。当基础置于饱和地基时, 土体同时存在固结和蠕变变形, 故需要考虑地基与基础相互作用的时效性。许多学者对饱和地基的固结问题进行过深入研究, 一般将地基视为饱和弹性介质^[10-16] 或饱和黏弹性介质^[17-18]。Gemant^[19] 通过试验发现, 经典的整数阶微分流变模型存在一定局限性, 建议采用基于分数阶导数的微分流变模型。近年来, 不少学者采用分数阶黏弹性模型对饱和土体的流变固结问题开展了研究^[20-24]。解益等^[25]、汪磊等^[26] 将分数阶导数理论引入 Kelvin-Voigt 模型, 给出了黏弹性饱和土体一维固结问题的半解析解法。基于 Merchant 流变模型, 时刚等^[27] 研究发现: 分数阶导数模型在固结后期所表现出的特征与整数阶模型有显著差异。刘忠玉等^[28] 引入 Koeller 定义的弹壶元件以建立分数阶 Merchant 模型, 然后对考虑非达西渗流的饱和土体流变固结机制进行了分析。借助分数阶 Kelvin 本构模型, 王珏等^[29] 研究了循环载荷作用下黏土地基的一维固结沉降特征。吴奎等^[30] 采用 Abel 黏壶替代牛顿黏壶, 基于改进的分数阶 Burger 模型研究了高地应力深埋软岩的流变问题。已有的研究表明^[20-23], 分数阶黏弹性本构模型能以少量的参数较为准确地

描述土体的流变行为。

基于饱和黏弹性地基的固结解, Ai 和 Hu^[31] 利用有限元-解析层元耦合法研究了层状饱和地基与梁的共同作用问题, 并考虑了地基的渗透各向异性和孔隙流体的可压缩性。Kobayashi 和 Sonoda^[32] 基于 Winkler 地基假定, 借助弹性-黏弹性对应原理, 给出了多种线性黏弹性地基上 Timoshenko 梁弯曲问题的解答。苏超等^[33] 也利用弹性-黏弹性对应原理, 建立了黏弹性地基上基础梁的计算方法, 并将其应用于软土地基上船闸底板的计算。Bhattiprolu 等^[34] 提出了非线性黏弹性地基上弹性梁的有效求解方法, 且该方法能够处理二者间接触区域非连续的情况。Sreekantan 和 Basudhar^[35] 基于 Burger 模型对黏弹性地基上梁的受弯响应进行了分析。目前针对黏弹性地基上梁的研究中, 很少考虑到分数阶黏弹性以及地基的成层特点。因此, 开展层状分数阶黏弹性饱和地基与梁的共同作用研究具有重要的理论意义和工程应用价值。

本文采用有限元法对 Timoshenko 梁进行分析, 采用边界元法对地基进行分析, 将文献 [36] 中分数阶黏弹性饱和地基的固结解答作为地基边界积分方程的核函数, 建立梁节点沉降与地基反力间的柔度矩阵方程; 然后根据梁与地基接触面上的位移协调条件和力的平衡条件, 推导出层状黏弹性饱和地基与 Timoshenko 梁共同作用的解答; 最后探讨分数阶次和地基成层性对梁与饱和黏弹性地基共同作用的影响。

1 Timoshenko 梁的有限元分析

如图 1 所示, Timoshenko 梁置于一层状黏弹性饱和地基上, 并在外载荷和地基反力的共同作用下处于平衡状态.

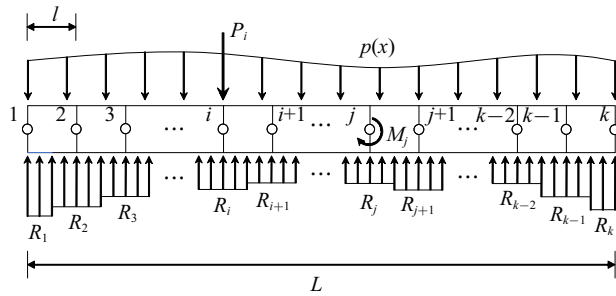


图 1 Timoshenko 梁受力示意图

Fig. 1 Force diagram of a Timoshenko beam

已知的外载荷可以是分布载荷 $p(x)$ 、集中载荷 P_i 或集中力偶 M_j . 梁的总长度为 L , 以 k 个节点将其等分为 $(k - 1)$ 个梁单元, 每个梁单元的长度为 $l = L/(k - 1)$. 为使地基反力 $R(x)$ 对应的单元个数与梁节点数量相同, 将梁与地基的接触面划分为 k 个单元, 并假设各单元分别受到大小为 $R_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 的均布反力. 其中, R_1 和 R_k 所在的接触面单元长度为 $l/2$, 其他接触面单元长度均为 l . 本文假定各梁单元底部的地基反力为均布力, 这与实际情况有所不同. 因此, 需要通过选取合适的单元数目, 将地基反力的计算误差控制在可接受范围内.

取任意梁单元进行分析, 单元节点的载荷分量和位移分量如图 2 所示. M 和 Q 分别为截面上的弯矩和横向剪力, w 和 θ 分别为梁的挠度和截面转角, 角标 1 和 2 用以指示载荷及位移分量所在截面.

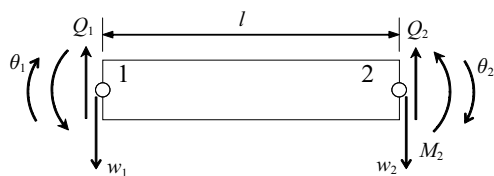


图 2 梁单元示意图

Fig. 2 Sketch of a beam element

基于 Timoshenko 梁理论, 可得梁单元的有限元求解方程^[37]

$$\mathbf{K}^{(e)} \boldsymbol{\delta}^{(e)} = \mathbf{P}^{(e)} \quad (1)$$

式中

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} 12a & 6al & -12a & 6al \\ 6al & al^2(4 + b) & -6al & al^2(2 - b) \\ -12a & -6al & 12a & -6al \\ 6al & al^2(2 - b) & -6al & al^2(4 + b) \end{bmatrix} \quad (2a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{(e)} = [w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2]^T \quad (2b)$$

$$\mathbf{P}^{(e)} = [Q_1 \quad M_1 \quad Q_2 \quad M_2]^T = \int_0^l [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]^T p(x) dx \quad (2c)$$

其中, $\mathbf{K}^{(e)}$ 为梁单元刚度矩阵, $\boldsymbol{\delta}^{(e)}$ 和 $\mathbf{P}^{(e)}$ 分别为梁单元节点的位移向量和等效节点载荷向量; $b = 12D_b/(C_b l^2)$, $a = D_b/[(1 + b)l^3]$, $D_b = E_b I_b$ 为梁的抗弯刚度, E_b 为梁的弹性模量, I_b 为梁截面关于中性轴的惯性矩, $C_b = kG_b A_b$ 为梁的抗剪刚度, $G_b = E_b/[2(1 + \nu_b)]$ 为梁的剪切模量, ν_b 为梁的泊松比, A_b 为梁的横截面积, k 为 Timoshenko 梁修正系数, 矩形截面取 $k = 5/6$; $N_1 = 1 - 3z_2 x^2 + 2z_2(x^3 - 3z_1 x)/l$, $N_2 = x - x^2 [1/(2l) + 3z_2 l/2] + z_2(x^3 - 3z_1 x)$, $N_3 = 1 - N_1$, $N_4 = x^2 [1/(2l) - 3z_2 l/2] + z_2(x^3 - 3z_1 x)$; $z_1 = 2D_b/C_b$, $z_2 = 1/(l^2 + 12D_b/C_b)$.

对式 (1) 进行适当变换, 可以得到同时考虑弯曲和剪切变形的 Timoshenko 梁单元刚度矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\theta\theta}^{(e)} & \mathbf{K}_{\theta w}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{w\theta}^{(e)} & \mathbf{K}_{ww}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^{(e)} \\ \mathbf{w}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_M^{(e)} \\ \mathbf{P}_Q^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中, $\boldsymbol{\theta}^{(e)} = [\theta_1 \quad \theta_2]^T$, $\mathbf{w}^{(e)} = [w_1 \quad w_2]^T$; $\mathbf{P}_M^{(e)} = [M_1 \quad M_2]^T$, $\mathbf{P}_Q^{(e)} = [Q_1 \quad Q_2]^T$; 梁单元刚度矩阵 $\mathbf{K}_{\theta\theta}^{(e)} = al^2 \begin{bmatrix} 4 + b & 2 - b \\ 2 - b & 4 + b \end{bmatrix}$, $\mathbf{K}_{\theta w}^{(e)} = 6al \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{K}_{w\theta}^{(e)} = 6al \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{K}_{ww}^{(e)} = 12a \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

将载荷向量拆分为由外力和基底反力产生的两类等效节点载荷向量, 并对式 (3) 进行关于时间的 Laplace 积分变换. 这时, 考虑到梁单元刚度矩阵不随时间变化, 则式 (3) 可改写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\theta\theta} & \mathbf{K}_{\theta w} \\ \mathbf{K}_{w\theta} & \mathbf{K}_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\theta}}(s) \\ \tilde{\mathbf{w}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_M(s) \\ \tilde{\mathbf{F}}_Q(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_{*M}(s) \\ \tilde{\mathbf{R}}_{*Q}(s) \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中, $\mathbf{K}_{\theta\theta}$, $\mathbf{K}_{\theta w}$, $\mathbf{K}_{w\theta}$ 和 \mathbf{K}_{ww} 由各梁单元刚度矩阵组装而成; $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(s) = [\tilde{\theta}_1(s) \quad \tilde{\theta}_2(s) \quad \dots \quad \tilde{\theta}_k(s)]^T$, $\tilde{\mathbf{w}}(s) = [\tilde{w}_1(s) \quad \tilde{w}_2(s) \quad \dots \quad \tilde{w}_k(s)]^T$, $\tilde{\theta}_i(s)$ 和 $\tilde{w}_i(s) (i = 1, 2, \dots, k)$ 分别为 i 节点在 s 时刻的转角和挠度, 上

标“~”表示该变量已进行关于时间 t 的 Laplace 变换, s 为关于时间 t 的 Laplace 变换参数; $\tilde{F}_M(s)$ 和 $\tilde{F}_Q(s)$ 分别为弹性地基梁上已知外载荷引起的节点弯矩向量和节点剪力向量; $\tilde{R}_{*M}(s)$ 和 $\tilde{R}_{*Q}(s)$ 分别为地基反力引起的节点弯曲向量和节点剪力向量, 具体表达式如下

$$\tilde{R}_{*M}(s) = \tilde{R}_M(s) \cdot \tilde{R}(s) \tag{5a}$$

$$\tilde{R}_{*Q}(s) = \tilde{R}_Q(s) \cdot \tilde{R}(s) \tag{5b}$$

式中, $\tilde{R}(s)$ 为地基反力矩阵, $\tilde{R}_M(s)$ 和 $\tilde{R}_Q(s)$ 分别为单位地基反力向量引起的节点弯矩向量和节点剪力向量, 各矩阵表达式如下

$$\tilde{R}(s) = [\tilde{R}_1(s) \quad \tilde{R}_2(s) \quad \cdots \quad \tilde{R}_k(s)]^T \tag{6a}$$

$$\tilde{R}_M(s) = \frac{l^2}{192(1+b)} \begin{bmatrix} 11+8b & 5+8b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -5-8b & 0 & 5+8b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -5-8b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 5+8b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -5-8b & -11-8b \end{bmatrix}_{k \times k} \tag{6b}$$

$$\tilde{R}_Q(s) = \frac{l}{32(1+b)} \begin{bmatrix} 13+12b & 3+4b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3+4b & 26+24b & 3+4b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3+4b & 26+24b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 26+24b & 3+4b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3+4b & 13+12b \end{bmatrix}_{k \times k} \tag{6c}$$

2 Timoshenko 梁与地基共同作用方程

如图 3 所示, 采用分数阶 Merchant 模型描述黏弹性地基的本构关系, 该模型由线弹性体和 Kelvin 体串联而成, E_0 和 E_1 分别为线弹性体和 Kelvin 体的弹性模量, η 为黏滞系数, α 为分数阶次. 不同的分数阶次可以表征不同的蠕变状态, 从而有效模拟饱和地基的流变特征. 其对应本构方程如下

$$\sigma'_s + \frac{\eta_1}{E_0 + E_1} \frac{d^\alpha \sigma'_s}{d^\alpha t} = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} \varepsilon + \frac{\eta_1 E_0}{E_0 + E_1} \frac{d^\alpha \varepsilon}{d^\alpha t} \tag{7}$$

式中, σ'_s 为土体有效应力, ε 为土体应变.

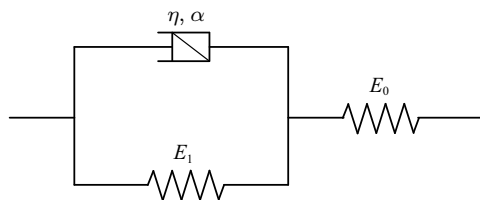


图 3 分数阶 Merchant 模型

Fig. 3 Fractional Merchant model

shenko 梁见图 4. 梁截面的宽度和高度分别为 b_b 和 h_b , 梁端自由, 其与地基的接触面光滑, 且二者在加载后紧密接触. 黏弹性饱和土体正交各向异性参数 $\zeta = E_{0h}/E_{0v} = E_{1h}/E_{1v} = \eta_h/\eta_v$, 下标 h 和 v 分别表示水平向和竖向参数; ν_h 为水平应力引起正交水平向应变的泊松比, ν_{vh} 为竖向应力引起水平向应变的泊松比; k_h 和 k_v 分别为水平向和竖向渗透系数.

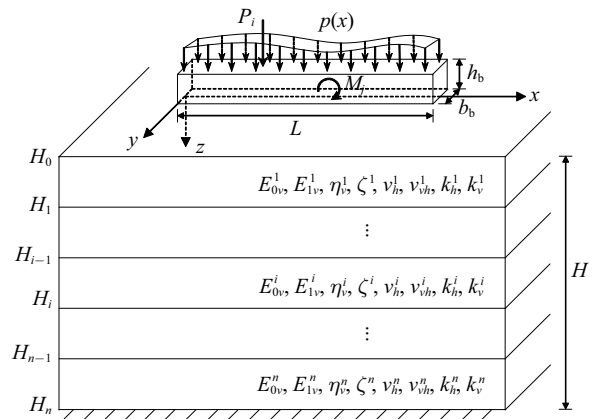


图 4 层状正交各向异性黏弹性饱和地基上的 Timoshenko 梁
Fig. 4 Timoshenko beam on the layered cross-anisotropic viscoelastic saturated soils

层状正交各向异性黏弹性饱和地基上的 Timo-

文献 [36] 利用弹性-黏弹性对应原理对层状正交各向异性黏弹性饱和地基的固结问题进行了求解, 但该解答仅针对地基上作用骤加载荷的情况. 实际上, 由于孔隙水的存在, 梁与饱和地基的相互作用过程中, 地基反力和沉降会随时间缓慢变化. 这时任意地基单元 i 在 t 时刻受到的作用力有如下积分型表达^[31]

$$q(i, t) = q(i, 0) + \int_0^t \frac{\partial q(i, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (8)$$

式中, $q(i, 0)$ 和 $q(i, t)$ 分别表示 0 时刻和 t 时刻作用在梁单元 i 上的作用力.

因此, t 时刻由 i 梁单元下的地基表面受到的作用力引起的 j 节点处地基表面的位移可表示为

$$u(j, i, t) = I_s(j, i, t)q(i, 0) + \int_0^t I_s(j, i, t - \tau) \frac{\partial q(i, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (9)$$

式中, $I_s(j, i, t)$ 为在第 i 个地基单元表面作用单位均布载荷, 经过 t 时间段时, 在梁节点 j 下地基表面处产生的竖向位移, 其可根据地基固结解^[36] 求得.

对于形如式 (9) 的方程, 可采用卷积公式进行化简. 卷积公式的定义如下^[38]

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau \quad (10)$$

式 (10) 在 Laplace 变换域内具有如下性质

$$\tilde{\ell}[f_1(t) * f_2(t)] = \tilde{\ell}[f_1(t)] \cdot \tilde{\ell}[f_2(t)] \quad (11)$$

对式 (9) 进行 Laplace 变换, 并结合该性质, 可以得到 Laplace 变换域内 s 时刻地基单元 i 处作用的缓变载荷与梁节点 j 下地基表面竖向位移之间的关系

$$\tilde{u}(j, i, s) = s\tilde{I}_s(j, i, s)\tilde{q}(i, s) \quad (12)$$

式中, $s\tilde{I}_s(j, i, s)$ 为 Laplace 变换域内的柔度系数.

梁节点 j 下地基表面的总竖向位移由所有地基单元表面所受的作用力共同作用产生, 故将式 (12) 应用于所有地基单元, 可得 Laplace 变换域内地基表面位移和地表作用力之间的关系如下

$$\tilde{\mathbf{u}}(s)_{k \times 1} = \tilde{\mathbf{K}}_s(s)_{k \times k} \tilde{\mathbf{q}}(s)_{k \times 1} \quad (13)$$

式中, $\tilde{\mathbf{u}}(s)_{k \times 1} = [\tilde{u}(s, 1), \tilde{u}(s, 2), \dots, \tilde{u}(s, k)]^T$ 为变换域内与梁节点对应的地基点的竖向位移向量, $\tilde{\mathbf{q}}(s)_{k \times 1} = [\tilde{q}(s, 1), \tilde{q}(s, 2), \dots, \tilde{q}(s, k)]^T$ 为变换域内基础对地基的

作用力向量, $\tilde{\mathbf{K}}_s(s)_{k \times k}$ 为 Laplace 变换域内的地基柔度矩阵, 其具体表达式如下

$$\tilde{\mathbf{K}}_s(s)_{k \times k} = s \cdot \begin{bmatrix} \tilde{I}_s(1, 1, s) & \tilde{I}_s(1, 2, s) & \cdots & \tilde{I}_s(1, k, s) \\ \tilde{I}_s(2, 1, s) & \tilde{I}_s(2, 2, s) & \cdots & \tilde{I}_s(2, k, s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{I}_s(k, 1, s) & \tilde{I}_s(k, 2, s) & \cdots & \tilde{I}_s(k, k, s) \end{bmatrix}_{k \times k} \quad (14)$$

至此, 已经分别建立了 Laplace 变换域内梁的总刚度矩阵方程和地基的柔度矩阵方程. 利用梁-土接触面间的协调条件, 可以将梁与地基联系起来. 假定外载荷作用下地基与梁底面紧密接触, 则梁节点的竖向位移与对应位置的地基沉降相等, 而地基反力与基础对地基的作用力大小相等, 即

$$\tilde{\mathbf{w}}(s) = \tilde{\mathbf{u}}(s) \quad (15a)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}(s) = \tilde{\mathbf{q}}(s) \quad (15b)$$

结合式 (15), 并将地基柔度矩阵方程式 (13) 代入梁的总刚度矩阵方程式 (4) 中, 可得到梁与地基共同作用的总矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \\ \tilde{\mathbf{R}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\theta\theta} & \mathbf{K}_{\theta w} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_s + \tilde{\mathbf{R}}_M \\ \mathbf{K}_{w\theta} & \mathbf{K}_{ww} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_s + \tilde{\mathbf{R}}_Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_M \\ \tilde{\mathbf{F}}_Q \end{bmatrix} \quad (16)$$

求解该式即可得出 Laplace 变换域内梁各节点转角和单元底部的地基反力, 地基沉降可通过式 (13) 进一步获得. 对以上解答进行 Laplace 数值逆变换^[31], 即可得到各分量在物理域内的真实解.

3 数值计算与分析

3.1 验证

Kobayashi 和 Sonoda^[32] 针对多种线性黏弹性地基上 Timoshenko 梁的弯曲问题进行了研究, 其中基于 Kelvin 地基模型的相关研究可视为本文模型的特例. 为此将本文模型退化至 Kelvin 地基, 并与文献 [32] 中的算例进行对比. 算例中均布载荷 p 作用于梁中部 $0.4L \leq x \leq 0.6L$ 区域, 弹性梁与黏弹性地基的相关参数满足: $\sqrt{E_b I_b / [k A_b G_b (L/2)^2]} = 0.2$, $\sqrt{k_s (L/2)^4 / (E_b I_b)} = 3$. 其中, k_s 为地基基床系数, 需借助 Vesic^[39] 给出的理论公式将其换算为弹性模量.

图 5 和图 6 分别为梁中点处地基沉降和地基反力随时间的变化曲线. 由图可见, 本文理论退化至 Kelvin 地基后所得解答与文献 [32] 结果吻合良好, 具有很好的 consistency.

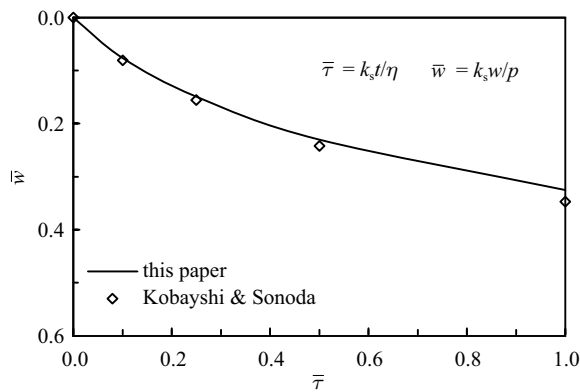


图 5 Timoshenko 梁中点处地基沉降随时间的变化
Fig. 5 Settlement at the midpoint of the Timoshenko beam with time

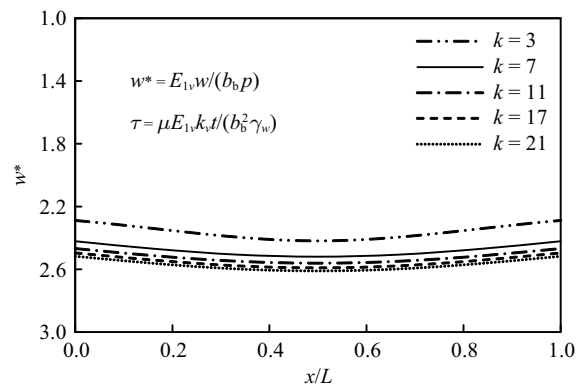


图 7 单元数目对地基沉降的影响

Fig. 7 Effects of the number of elements on settlements

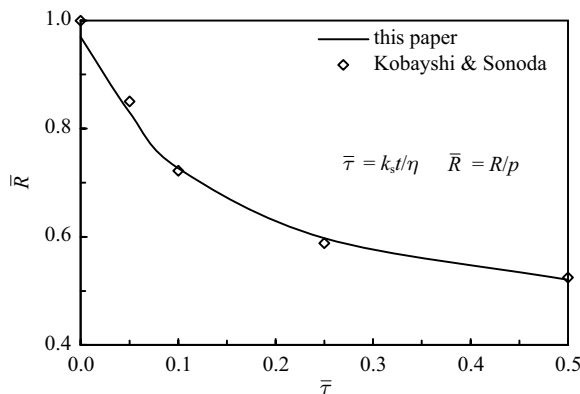


图 6 Timoshenko 梁中点处地基反力随时间的变化
Fig. 6 Subgrade reaction at the midpoint of the Timoshenko beam with time

由图 7 可见, 当梁节点数目 $k \geq 7$, 即梁单元数目大于等于 6 时, 梁单元数目的增加对梁与地基相互作用的计算结果影响已不再显著. 显然, 随着单元数目的增加, 数值解答的精度随之提高, 但计算效率也在逐渐下降. 考虑到计算效率和精度的平衡, 本文算例均取 $k = 11$, 即将梁划分为 10 个单元, 此时所得结果的误差在可接受的范围内.

3.2 单元数目的影响分析

为便于分析, 本文将对梁与地基的部分参数及固结计算结果进行无量纲化处理. 无量纲位移 w^* 、地基反力 R^* 及时间参数 τ 的具体定义见各图中标注, 其中 $\mu = (1 - \nu_{vh}) / [2(1 + \nu_{vh})(1 - 2\nu_{vh})]$. 梁-土相对刚度比定义为 $K_b = 4E_b b_b h_b^3 (1 - \nu_{vh}^2) / (3\pi E_{1v} L^4)$.

Timoshenko 梁置于均质黏弹性饱和半空间地基上, 其上表面在全长范围内作用竖向均布载荷 p . 梁的参数为: 长高比 $L/h_b = 6$, 截面宽高比 $b_b/h_b = 1$, 泊松比 $\nu_b = 0.15$; 地基土的相关参数为: $E_{0v} = 10 \text{ MPa}$, $E_{1v} = 5 \text{ MPa}$, $\eta_v = 1.0 \times 10^6 \text{ MPa}\cdot\text{s}$, $\zeta = 1$, $\nu_{vh} = \nu_h = 0.35$, $k_v = k_h = 5.0 \times 10^{-8} \text{ m/s}$; 梁-土相对刚度比 K_b 为 0.1. 本文取分数阶次 $\alpha = 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ 进行对比分析.

本节探讨梁单元数目对计算结果的影响. 当梁节点数目 $k = 3, 7, 11, 17, 21$ 时, 计算得到的固结完成时 ($\tau = 10^{12}$) 梁与地基接触面的沉降见图 7.

3.3 分数阶次的影响分析

对于实际工程中模型分数阶次等参数的取值问题, 可参考文献 [20, 22-23] 中的试验方法. 具体为: 取工程所在区域的土样进行三轴流变试验, 得到土体蠕变曲线; 然后依据本构关系式, 通过曲线拟合方法得到与蠕变曲线相吻合的分数阶黏弹性模型参数. 另外, 所取蠕变曲线对应的加载条件应尽量与实际工程的工况条件一致, 以保证能有效反映实际工程条件下该区域土体独特的流变特性.

基于 3.2 节中的梁和地基参数, 可计算得到如图 8 和图 9 所示的不同分数阶次下梁中心地基沉降和梁端地基反力随时间的变化情况. 由于土体固结及蠕变变形的存在, 梁下地基沉降及地基反力表现出明显的时变特征. 例如, 地基沉降及地基反力的时变曲线在固结初期较为平缓, 而后有比较明显的增长, 最终随时间发展而趋于某一定值. 另外, 分数阶次 α 对梁底地基沉降和地基反力均有较大影响. 当其他参数不变时, 饱和地基固结速率随 α 的增大而明显加快, 梁底地基沉降量及端部地基反力都会更早达到最终值; 但不同分数阶次下, 梁中点处地基的最终沉降以及端部的最终反力相同.

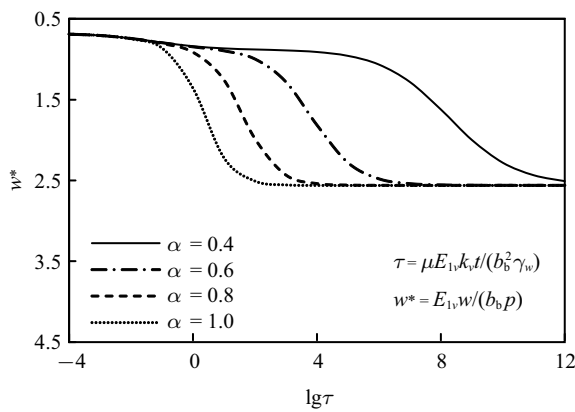


图 8 不同分数阶次下梁中点地基沉降随时间的变化
Fig. 8 Settlements versus time at the midpoint of the beam with different fractional orders

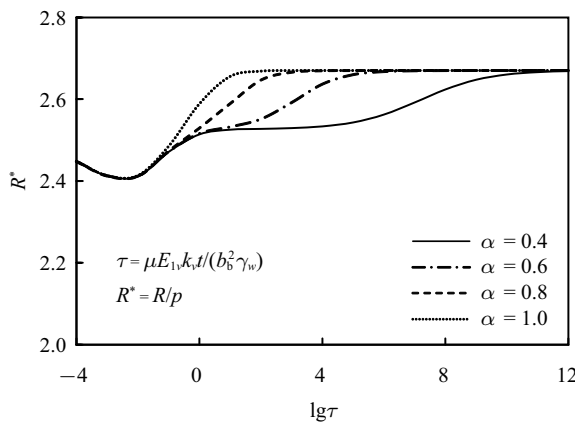


图 9 不同分数阶次下梁端部地基反力随时间的变化
Fig. 9 Subgrade reactions versus time at the end of the beam with different fractional orders

实际上, 分数阶次 α 的取值决定了分数阶 Merchant 模型 (见图 3) 中 Abel 黏壶的物理性质: 当 $\alpha = 0$

时, 该元件为线弹性固体; 当 $\alpha = 1$ 时, 为理想牛顿流体; 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 为分数阶黏弹性体. Yin 等^[22] 经研究指出, 随着分数阶次 α 的增大, 土体孔隙水压力消散得更快, 故达到最终沉降所需时间更短. 另外, 当孔隙水压力完全消散, 不同分数阶次模型下的土体均达到最终沉降状态, 此时各梁-土接触面上的地基沉降及反力也达到相同状态. 解益等^[25] 曾将分数阶 Kelvin 模型下黏弹性饱和土体的固结沉降表达式退化至整数阶黏弹性模型以及弹性模型, 从理论上证明了不同分数阶次下土体最终沉降量相同.

3.4 地基成层性的影响分析

本节将探究地基成层性对梁土相互作用的影响. 3 种饱和土体的相关参数见表 1, 3 种分层工况见表 2. 土体 1 和土体 2 为黏弹性饱和土, 土体 3 为弹性饱和土. E^* 表示终态模量 ($1/E^* = 1/E_0 + 1/E_1$), 其值一定程度上能反映土体的整体压缩变形性能. 地基总厚度为 $H = 10L$, 自上而下三层土体的厚度比例为 $h_1 : h_2 : h_3 = 1 : 1 : 8$; 弹性梁参数同 3.2 节, 梁上作用竖向均布载荷 p . 为便于分析, 计算无量纲时间和无量纲竖向位移时, 统一将 E_{1v} 取为 $E^* = 5 \text{ MPa}$.

由图 10 和图 11 可见, 工况 1 中均质单层地基的弹性模量较小, 因而弹性梁底的地基沉降比其他两种工况更大. 与工况 1 相比, 工况 2 中首层土的性质相同, 下部土体较硬, 梁下地基沉降量较工况 1 有一定程度的减小. 而工况 3 中的首层土弹性模量较大, 相比工况 1 和工况 2, 可有效控制地基沉降.

表 1 3 种饱和土体的参数

Table 1 Parameters of three different saturated soils

Soil	E_{0v}/MPa	E_{1v}/MPa	$\eta_v/(\text{MPa}\cdot\text{s})$	α	ζ	$\nu_{vh}(= \nu_h)$	$k_v(= k_h)/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	E^*/MPa
Soil 1	15	7.5	1.0×10^6	0.8	1	0.35	5.0×10^{-8}	5
Soil 2	30	15	1.0×10^7	0.8	1	0.35	5.0×10^{-8}	10
Soil 3	20	—	—	—	1	0.25	5.0×10^{-8}	20

表 2 3 种层状地基工况

Table 1 Three cases of different multilayered soils

Case	Case 1	Case 2	Case 3
Layer 1	Soil 1	Soil 1	Soil 2
Layer 2	Soil 1	Soil 2	Soil 1
Layer 3	Soil 1	Soil 3	Soil 3

图 12 中的 Δw 为梁中点及端部地基沉降量之差, Δw^* 为其无量纲化后的值. 工况 2 和工况 3 下的沉降差曲线很相近, 而工况 3 对应曲线的沉降差值明显降低. 这说明加固表层土体不仅对控制地基的整体沉降有显著效果, 也能大幅减小地基的差异沉降. 实际上, 由于梁受荷造成的地基附加应力的影响深度有限, 且附加应力随深度的增大而明显减小, 故加固

表层土体能够对地基沉降起到明显的控制作用.

4 结论

本文以层状正交各向异性黏弹性饱和地基的精细积分解答为基础, 采用有限元-边界元耦合法, 得到了层状分数阶黏弹性饱和地基与 Timoshenko 梁共同作用的解答. 在此基础上, 分析了分数阶次和地基成层性对地基沉降及地基反力的影响. 主要结论有:

(1) 黏弹性饱和地基上弹性梁底部的地基沉降及地基反力表现出明显的时变特征, 它们的时变曲线在固结初期较为平缓, 而后有比较明显的增长, 最终随时间发展而趋于某一定值.

(2) 分数阶次 α 的增大会使黏弹性饱和地基的固结速率明显加快, 但不同分数阶次下梁底地基沉降及地基反力的最终值相同.

(3) 对于层状地基, 加固表层土体能够有效控制地基整体沉降, 并减小差异沉降. 因此, 在实际工程中, 应充分考虑地基分层性的影响, 以准确分析梁与地基的共同作用过程.

参 考 文 献

- 1 Hetenyi M. Beams on Elastic Foundation: Theory With Applications in the Fields of Civil and Mechanical Engineering. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1946
- 2 张季容, 姚祖恩, 楼文娟. 有限单元法计算分层地基上的弹性地基梁. 岩土工程学报, 1986, 8(3): 16-26 (Zhang Jirong, Yao Zu'en, Lou Wenjuan. Computation of a beam on multilayer foundation using finite element method. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1986, 8(3): 16-26 (in Chinese))
- 3 Tullini N, Tralli A. Static analysis of Timoshenko beam resting on elastic half-plane based on the coupling of locking-free finite elements and boundary integral. *Computational Mechanics*, 2010, 45(2-3): 211-225
- 4 夏桂云, 李传习, 张建仁. 考虑水平摩阻和双重剪切的弹性地基梁分析. 土木工程学报, 2011, 44(12): 93-100 (Xia Guiyun, Li Chuanxi, Zhang Jianren. Elastic foundation beam analysis with horizontal friction and double shear effects. *China Civil Engineering Journal*, 2011, 44(12): 93-100 (in Chinese))
- 5 Ai ZY, Li ZX, Cheng YC. BEM analysis of elastic foundation beams on multilayered isotropic soils. *Soils and Foundations*, 2014, 54(4): 667-674
- 6 李潇, 王宏志, 李世萍等. 解析型 Winkler 弹性地基梁单元构造. 工程力学, 2015, 32(3): 66-72 (Li Xiao, Wang Hongzhi, Li Shiping, et al. Element for beam on winkler elastic foundation based on analytical trial functions. *Engineering Mechanics*, 2015, 32(3): 66-72 (in Chinese))
- 7 Zhang Y, Liu XM. Response of an infinite beam resting on the tensionless Winkler foundation subjected to an axial and a transverse concentrated loads. *European Journal of Mechanics A-Solids*, 2019, 77: 103819

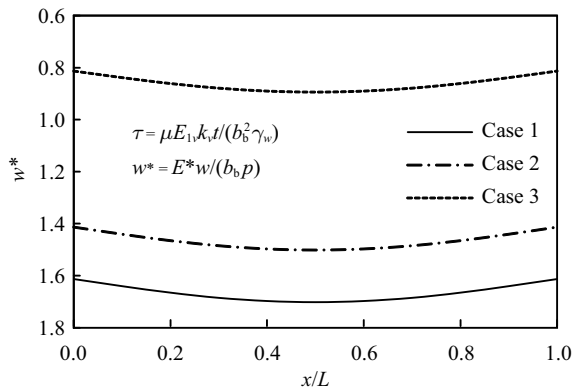


图 10 地基成层性对地基沉降的影响 ($\tau = 10^6$)

Fig. 10 Effects of the stratification of soils on settlements ($\tau = 10^6$)

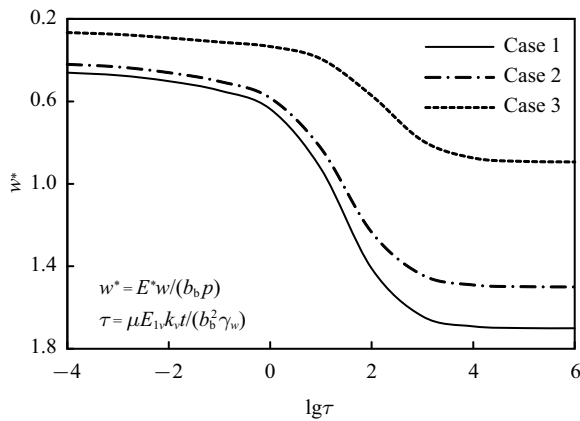


图 11 不同层状地基下梁中点地基沉降随时间的变化

Fig. 11 Settlements versus time at the midpoint of the beam with different multilayered soils

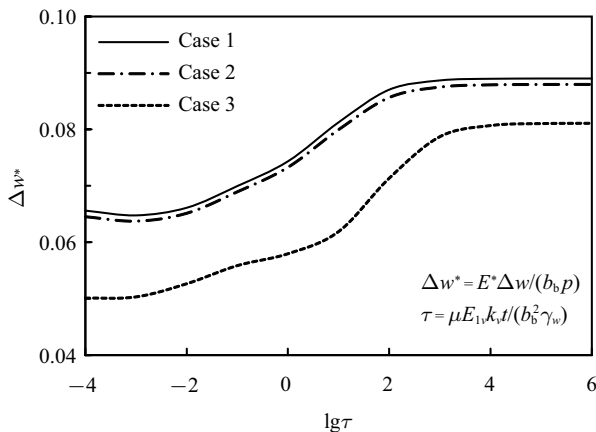


图 12 不同层状地基下沉降差随时间的变化

Fig. 12 Differential settlements versus time with different multilayered soils

- 8 Akhazhanov S, Omarbekova N, Mergenbekova A, et al. Analytical solution of beams on elastic foundation. *International Journal of Geomate*, 2020, 19(73): 193-200
- 9 Liang LJ, Xu CJ, Zhu BT, et al. Theoretical method for an elastic infinite beam resting on a deformable foundation with a local subsidence. *Computers and Geotechnics*, 2020, 127: 103740
- 10 McNamee J, Gibson RE. Plane strain and axially symmetric problem of the consolidation of a semi-infinite clay stratum. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1960, 13(2): 210-227
- 11 Booker JR. The consolidation of a finite layer subject to surface loading. *International Journal of Solids and Structures*, 1974, 10(9): 1053-1065
- 12 Rajapakse RKND, Senjuntichai T. Fundamental solutions for a poroelastic half-space with compressible constituents. *Journal of Applied Mechanics*, 1993, 60(4): 844-856
- 13 方诗圣, 王建国, 王秀喜. 层状饱和土 Biot 固结问题状态空间法. *力学学报*, 2003, 35(2): 206-212 (Fang Shisheng, Wang Jianguo, Wang Xiuxi. The static space method of the Biot consolidation problem for multilayered porous media. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2003, 35(2): 206-212 (in Chinese))
- 14 陈少林, 柯小飞, 张洪翔. 海洋地震工程流固耦合问题统一计算框架. *力学学报*, 2019, 51(2): 594-606 (Chen Shaolin, Ke Xiaofei, Zhang Hongxiang. A unified computational framework for fluid-solid coupling in marine earthquake engineering. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(2): 594-606 (in Chinese))
- 15 熊春宝, 胡倩倩, 郭颖. 孔隙率各向异性下饱和多孔弹性地基动力响应. *力学学报*, 2020, 52(4): 1120-1130 (Xiong Chunbao, Hu Qianqian, Guo Ying. Dynamic response of saturated porous elastic foundation under porosity anisotropy. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(4): 1120-1130 (in Chinese))
- 16 王立安, 赵建昌, 杨华中. 饱和多孔地基与矩形板动力相互作用的非轴对称混合边值问题. *力学学报*, 2020, 52(4): 1189-1198 (Wang Li'an, Zhao Jianchang, Yang Huazhong. Non-axisymmetric mixed boundary value problem for dynamic interaction between saturated porous foundation and rectangular plate. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(4): 1189-1198 (in Chinese))
- 17 陈宗基, 刘恢先. 黏土层沉陷 (由于固结和次时间效应) 的二维问题. *力学学报*, 1958, 2(1): 1-10 (Chen Zongji, Liu Huixian. Two dimensional problems of settlements of clay layers due to consolidation and secondary time effects. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1958, 2(1): 1-10 (in Chinese))
- 18 李传亮, 杜志敏, 孔祥言等. 多孔介质的流变模型研究. *力学学报*, 2003(2): 230-234 (Li Chuanliang, Du Zhimin, Kong Xiangyan, et al. A study on the rheological model of porous media. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2003(2): 230-234 (in Chinese))
- 19 Gemant A. A method of analyzing experimental results obtained from elasto-viscous bodies. *Physics*, 1936, 7(8): 311-317
- 20 何利军, 孔令伟, 吴文军等. 采用分数阶导数描述软黏土蠕变的模型. *岩土力学*, 2011, 32(S2): 239-243 (He Lijun, Kong Lingwei, Wu Wenjun, et al. A description of creep model for soft soil with fractional derivative. *Rock and Soil Mechanics*, 2011, 32(S2): 239-243 (in Chinese))
- 21 Zhu HH, Liu LC, Pei HF, et al. Settlement analysis of viscoelastic foundation under vertical line load using a fractional Kelvin-Voigt model. *Geomechanics and Engineering*, 2012, 4(1): 67-78
- 22 Yin DS, Wu H, Cheng C, et al. Fractional order constitutive model of geomaterials under the condition of triaxial test. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2013, 37: 961-972
- 23 刘忠玉, 杨强. 基于分数阶 Kelvin 模型的饱和黏土一维流变固结分析. *岩土力学*, 2017, 38(12): 3680-3687, 3697 (Liu Zhongyu, Yang Qiang. One-dimensional rheological consolidation analysis of saturated clay using fractional order Kelvin's model. *Rock and Soil Mechanics*, 2017, 38(12): 3680-3687, 3697 (in Chinese))
- 24 Ai ZY, Zhao YZ, Liu WJ. Fractional derivative modeling for axisymmetric consolidation of multilayered cross-anisotropic viscoelastic porous media. *Computers & Mathematics with Applications*, 2020, 79(5): 1321-1334
- 25 解益, 李培超, 汪磊等. 分数阶导数黏弹性饱和土体一维固结半解析解. *岩土力学*, 2017, 38(11): 3240-3246 (Xie Yi, Li Peichao, Wang Lei, et al. Semi-analytical solution for one-dimensional consolidation of viscoelastic saturated soil with fractional order derivative. *Rock and Soil Mechanics*, 2017, 38(11): 3240-3246 (in Chinese))
- 26 汪磊, 孙德安, 解益等. 任意荷载下分数阶导数黏弹性饱和土体一维固结. *岩土工程学报*, 2017, 39(10): 1823-1831 (Wang Lei, Sun De'an, Xie Yi, et al. One-dimensional consolidation of fractional order derivative viscoelastic saturated soils under arbitrary loading. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2017, 39(10): 1823-1831 (in Chinese))
- 27 时刚, 李永辉, 刘忠玉. 基于分数阶流变模型的饱和软土一维流变固结. *地下空间与工程学报*, 2019, 15(5): 1402-1409, 1416 (Shi Gang, Li Yonghui, Liu Zhongyu. One-dimensional rheological consolidation of soft clay based on fractional order derivative rheological model. *Chinese Journal of Underground Space and Engineering*, 2019, 15(5): 1402-1409, 1416 (in Chinese))
- 28 刘忠玉, 崔鹏陆, 郑占垒等. 基于非牛顿指数渗流和分数阶 Merchant 模型的一维流变固结分析. *岩土力学*, 2019, 40(6): 2029-2038 (Liu Zhongyu, Cui Penglu, Zheng Zhanlei, et al. Analysis of one-dimensional rheological consolidation with flow described by non-Newtonian index and fractional-order Merchant's model. *Rock and Soil Mechanics*, 2019, 40(6): 2029-2038 (in Chinese))
- 29 王珏, 童立红, 金立等. 任意荷载下连续排水边界分数阶黏弹性地基一维固结模型. *土木与环境工程学报*, 2020, 42(1): 56-63 (Wang Jue, Tong Lihong, Jin Li, et al. One-dimension consolidation of fractional order derivative viscoelastic subgrade with continuous drainage boundary under time-dependent loading. *Journal of Civil and Environmental Engineering*, 2020, 42(1): 56-63 (in Chinese))
- 30 吴奎, 邵珠山, 秦溯. 流变岩体中让压支护作用下隧道力学行为研究. *力学学报*, 2020, 52(3): 890-900 (Wu Kui, Shao Zhushan, Qin Su. Investigation on the mechanical behavior of tunnel supported by yielding supports in rheological rocks. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(3): 890-900 (in Chinese))
- 31 Ai ZY, Hu YD. The analysis of beams on layered poroelastic soils with anisotropic permeability and compressible pore fluid. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, 40(11-12): 5876-5890
- 32 Kobayashi H, Sonoda K. Timoshenko beams on linear viscoelastic foundations. *Journal of Geotechnical Engineering ASCE*, 1983,

- 109(6): 832-844
- 33 苏超, 姜弘道, 谭恩会. 黏弹性基础梁计算方法及其应用. 河海大学学报 (自然科学版), 2000, 28(5): 101-105 (Su Chao, Jiang Hongdao, Tan Enhui. Computation method and application to viscoelastic foundation beam. *Journal of Hohai University*, 2000, 28(5): 101-105 (in Chinese))
- 34 Bhattiprolu U, Bajaj AK, Davies P. An efficient solution methodology to study the response of a beam on viscoelastic and nonlinear unilateral foundation: Static response. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, 50(14-15): 2328-2339
- 35 Sreekantan PG, Basudhar PK. Flexural response of beams on viscoelastic foundations with predictions beyond the loading area. *International Journal of Geotechnical Engineering*, 2020, 14(4): 442-451
- 36 Ai ZY, Gui JC, Mu JJ. 3-D time-dependent analysis of multilayered cross-anisotropic saturated soils based on the fractional viscoelastic model. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, 76: 172-192
- 37 夏桂云, 李传习. 考虑剪切变形影响的杆系结构理论与应用. 北京: 人民交通出版社, 2008 (Xia Guiyun, Li Chuanxi. Theory and Application of Frame Structures Considering Shear Deformation. Beijing: China Communications Press, 2008 (in Chinese))
- 38 李星. 积分方程. 北京: 科学出版社, 2008 (Li Xing. Integral Equation. Beijing: Science Press, 2008 (in Chinese))
- 39 Vesic AS. Beams on elastic subgrade and the Winkler's hypothesis//Proceedings of the 5th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Paris, 1961: 845-850