力学人物追忆

非协调和杂交有限元的理论和应用 —— 纪念恩师吴长春教授

黄颖青 * 肖奇志 † 冯淼林 ** 陈海波 *,1)

*(中国科学院材料力学行为和设计重点实验室, 中国科学技术大学近代力学系, 合肥 230027)

†(LUSAS, Forge House, 66 High Street, Kingston upon Thames, KT1 1HN, UK)

**(上海交通大学工程力学系, 上海 200030)

摘要 本纪念文介绍了吴长春教授在计算力学领域的主要学术贡献, 重点介绍了他在非协调和杂交有限元的理论和应用方面的开创性工作, 他发展的构造非协调插值函数的一般公式以及杂交应力元优化方法至今仍是发展高性能有限元的重要工具, 经常被同行引用.

关键词 非协调元, 杂交元, 分片试验, 罚平衡, 单元优化设计

中图分类号: O302 **文献标识码**: A doi: 10.6052/0459-1879-20-381

THEORY AND APPLICATIONS OF INCOMPATIBLE AND HYBRID ELEMENT METHOD — IN MEMORY OF PROF. WU CHANGCHUN

Huang Yingqing* Xiao Qizhi† Feng Miaolin** Chen Haibo*,1)

*(*CAS Key Laboratory of Mechanical behavior and Design of Materials*, *Department of Modern Mechanics*, *University of Science and Technology of China*, *Hefei* 230027, *China*)

†(*LUSAS*, *Forge House*, 66 *High Street*, *Kingston upon Thames*, *KT*1 1*HN*, *UK*)

**(*Department of Engineering Mechanics*, *Shanghai Jiao Tong University*, *Shanghai* 200030, *China*)

Abstract This memorial paper gives an overview of Prof. Wu Changchun's main contributions to computational mechanics, especially his pioneering work on the incompatible and hybrid element method and its applications. The general formula for the incompatible shape functions and the optimization design method for hybrid stress elements proposed by Prof. Wu are still important means to develop high performance finite elements and are cited by peers constantly.

Key words incompatible element, hybrid element, patch test, penalty equilibrium, elemental optimization design

2020–11–06 收稿, 2020–11–24 录用, 2020–11–26 网络版发表.

1) 陈海波, 教授, 主要研究方向: 计算力学和振动工程. E-mail: hbchen@ustc.edu.cn

引用格式: 黄颖青, 肖奇志, 冯淼林, 陈海波. 非协调和杂交有限元的理论和应用 —— 纪念恩师吴长春教授. 力学学报, 2021, 53(1): 293-297
Huang Yingqing, Xiao Qizhi, Feng Miaolin, Chen Haibo. Theory and applications of incompatible and hybrid element method — in memory of Prof. Wu Changchun. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(1): 293-297

引 言

吴长春教授 (1946.7—2020.8), 师从麻省理工学院卞学鐄先生和中国科学技术大学黄茂光先生, 在高性能有限元, 特别是非协调和杂交元的优化设计方面取得了国际领先成就. 2020 年 8 月 24 日, 吴长春教授因病于上海不幸逝世.

吴长春教授是我国开展结构分析通用数值方法研究的先驱之一, 1975 年就在《中国科学》中英文版发表了论文 "受弯弹性薄板数值分析的新方法 —— 离散算子法"[1-2]. 后来, 吴长春教授致力于高性能有限元的理论、方法和应用研究, 科研成果丰硕. 早在 20 世纪 80 年代, 吴长春教授即在非协调元和杂交应力元的研究上做出了一系列创新性成果. 1982 年他的第一篇国际期刊文章[3] 发表在《International Journal for Numerical Methods in Engineering》, 内容是关于板弯曲杂交模式的研究. 1987 年发表在国际期刊《Computers & Structures》的文章[4] 首次给出了非协调元分片试验的能量一致条件以及满足分片检验的非协调形函数通用公式, 国际上以 Wu-Huang-Pian 公式被广泛引用. 该方法简单清晰, 为保证非协调元的收敛和推广应用奠定了理论基础. 1988 年的文章[5] 提出了优化杂交应力元新方法, 其核心是要求高阶应力在单元边界对非协调位移所做虚功为零, 从而可简便得到著名的 5 参数 PS 杂交应力单元. 杂交元自 20 世纪 60 年代由卞学鐄先生提出以来[6], 受到广泛关注和研究, 到 80 年代对多种工程问题的求解已显示出优越的数值性能, 但如何给出合理的优化应力场假设一直是研究者关注的焦点. 吴长春教授的方法巧妙地引入非协调函数对应力场进行优化, 最终的泛函列式并不需要非协调内位移, 方法具有通用性. 在 1990 年中国力学学会和国家自然科学基金委员会主办的 "固体力学发展趋势报告会" 上, 上述研究成果被程耿东院士和李锡夔教授关于 "计算固体力学发展中的若干问题" 的专题报告加以介绍, 为促进后期非协调和杂交元研究在我国的蓬勃发展作出了贡献. 1995 和 1996 年, 吴长春教授进一步发展了罚平衡杂交元方法[7-8], 新的方法极大地提高了杂交元的数值性能, 其中 4 节点罚平衡单元 PS (α) 首次突破了 MacNeal 的细长梁弯曲梯形自锁试验, 是首个能通过该测试的 4 节点四边形单元. 即使到目前为止也只有非对称有限元能很好地通过该测试, 传统的对称有限元能通过的依然屈指可数[9].

1988 年至 2000 年期间, 吴长春教授获得德国洪堡基金会和日本 JSPS 等机构的奖学金, 先后多次赴德国斯图加特大学力学所和结构所、日本东京大学、香港大学以及悉尼科技大学开展合作研究. 鉴于吴长春教授对发展有限元理论方法的贡献, 在 1992 年香港召开的国际计算工程科学大会 ICES'92 上, 他被授予首枚 "THH PIAN MEDAL" 科学奖章, 并作为中国代表被推选为 ICES'95 国际组委会委员; 1993 年在中国科学技术大学破格晋升为教授和博士生导师; 1997 年获国家自然科学三等奖和安徽省自然科学二等奖; 1997 年与卞学鐄先生合著的力学专著《非协调数值分析与杂交元方法》[10] 由科学出版社特约出版, 该书被列为中科院科学出版基金资助项目. 该书的出版正如浙江大学郭乙木教授 2001 年在《力学进展》所作的推介所言[11]: "该书大大促进了我国科研人员在该领域的研究, 实属我国计算力学工作者的幸事". 2001 年 9 月起吴长春任上海交通大学建工学院力学系教授, 2004 年获上海市科学技术进步奖一等奖; 2006 年和卞学鐄先生合著的英文专著《Hybrid and Incompatible Finite Element Methods》[12] 由 Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group 出版, 该书在原中文版的基础上增加了包括压电分析和复合材料模拟等新内容.

吴长春教授共发表国内外期刊和会议论文 160 余篇, 其中 SCI 核心数据库收录 46 篇. 下面对他的科研工作和学术贡献作简单的分类介绍.

1 非协调和杂交有限元的理论和应用

在前面介绍的研究工作[4] 的基础上, 吴长春教授导出了非协调元收敛条件的非线性形式和曲线坐标形式[13-15], 将非协调元方法推广到大变形和曲线坐标问题的分析. 特别有意义的是, 该研究提供了实施分片试验的具体方法, 建立了生成非协调单元函数的一般公式. 针对发展高性能多变量有限元的困难, 在研究工作[5] 的基础上, 吴长春教授系统地导出了能量相容条件、单元优化条件和相应的单元优化设计方法, 建立了杂交元的优化应力格式和多变量试解组匹配关系[16-17]. 针对多变量有限元的稳定性问题, 吴长春教授发展了卞学鐄的杂交元机动变形学说, 建立了二、三类变量有限元零能模式的一般理论[18], 提出了多变量有限元零能模式的对偶控

制定理, 保证了杂交、混合元解的稳定性. 另外, 对含内位移的非协调元给出了方便适用的弱连接条件和单元内位移独立条件, 保证了非协调元解的唯一存在[14]. 上述研究把稳定性这个有限元理论中的 "硬骨头" 从抽象的数学领地中解放出来, 成为工程界可以直接掌握的工具. 根据上述理论和方法构造的一系列非协调单元和杂交元已成功应用于结构非线性分析[19-21]、板壳以及层合结构等问题的数值分析[22-25]. 结合基于多重尺度展开的均匀化理论, 上述理论也成功应用于结构的拓扑优化[26-27]、压电编织复合材料[28-29] 的力学和压电性能的预报, 丰富了宏细观结构设计及其力学分析方法.

2　断裂力学和 J 积分数值分析

吴长春教授致力于将先进的有限元方法用于研究力学和工程中的挑战性问题. 在断裂力学方面, 为了准确估计应力强度因子和 J 积分数值解的误差, 吴长春教授发展了 J 积分的对偶形式, 在此基础上发展了 J 积分的上下限理论和计算方法[30-32]. 为计算 J 积分的上限, 吴长春教授通过精确满足力边界条件发展了罚平衡元方法, 克服了传统平衡有限元难以消除零能模式和获得位移解的缺点. 后来, 这些理论和方法进一步推广[33-36] 到解决压电断裂问题.

3　无网格方法和局部间断有限元

吴长春教授一直密切关注着计算力学的最新进展. 在无网格方法发展的早期, 他就敏锐意识到该方法在断裂力学问题中的广泛应用前景, 通过与非协调元和杂交元的结合, 克服了无网格方法计算量过大及非协调和杂交元难以模拟裂纹扩展的问题, 并成功应用于非均质材料的动态断裂研究中, 取得了良好的效果[37-38]. 另外, 针对 Cockburn 和舒其望等提出的局部间断 Galerkin 有限元方法, 吴长春教授首次提出了与之相应的多变量能量原理, 并将其应用于弹性力学的扭转和平面问题[39-40], 避免了传统协调元在处理非规则网格和不同阶次单元匹配时出现的困难, 非常适合 h-p 自适应问题的分析.

4　基于弹性力学对偶理论的有限元

针对有限元在处理偶应力和薄板弯曲等问题的 C_1 连续性困难, 吴长春教授引入弹性力学对偶理论, 成功将平面杂交应力元 PS 转化为板弯曲[41] 单元, 将八节点 R/M 板单元转化为 4 节点平面偶应力单元[42] 等等, 从而充分揭示和验证了一套系统化的方法. 在此基础上, 借助于 Cosserat 连续介质模型, 通过对对偶理论的深入分析, 给出了应用应力函数构造有限元的新思路[43].

吴长春教授的求学之路并不平坦, 20 世纪 60 年代, 他曾在基层建筑公司任技术工人多年, 1970—1973 年作为首届工农兵学员在合肥工业大学建工系学习, 毕业后留校任教. 1978—1981 年他在中国科大黄茂光先生的指导下获得硕士学位并留校任教, 1984—1987 年在美国麻省理工学院卞学鐄先生和中国科大黄茂光先生的共同指导下获得博士学位. 吴长春教授从一名技术工人到工农兵学员, 到教授和博士生导师, 成为计算力学领域的专家学者, 对科研的热爱使得他孜孜不倦, 他的自强不息和追求卓越的精神是我们永远学习的榜样. 吴长春教授在中国科学技术大学和上海交通大学任教期间, 主讲结构力学, 高等计算固体力学和变分原理等课程, 广受学生好评, 1993 年曾获国家人文部、教育部授予的 "全国优秀教师" 荣誉称号. 吴长春教授培养了硕士和博士研究生、指导博士后 20 余人, 桃李满天下. 吴长春教授为人谦和, 对学生照顾有加, 师母陈学英老师为吴长春教授的科研工作给予了极大的支持, 在吴长春教授生病期间更是悉心看护, 他们是我们尊敬的良师益友. 最后, 以一首小诗作为结尾, 以纪念恩师.

吾师治学问, 只求率与真
桃李遍天下, 论著亦等身
浦江东流水, 吴门驻长春
人随仙鹤去, 风范永留存

致谢: 感谢陈双喜、孙慧玉、李子然、盛勇、刘卫群、黄若煜、何沛祥、袁振、李雷、刘靖华、袁磊、刘明、王凡、刘荥等提供相关资料及对本文的修改.

参　考　文　献

1 Wu CC. A new numerical method for analysing bent elastic thin plates — the discrete operator method. *Scientia Sinica*, 1975, 18(5): 628-650

2 吴长春. 受弯弹性薄板数值分析的新方法 —— 离散算子法. 中国科学, 1975, 5(4): 360-375 (Wu Changchun. A new numerical method for analysing bent elastic thin plates — the discrete operator method. *Science in China*, 1975, 5(4): 360-375 (in Chinese))

3 Wu CC. Some problems of a plate bending hybrid model with shear effect. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1982, 18(5): 755-764

4 Wu CC, Huang MG, Pian THH. Consistency condition and convergence criteria of incompatible elements: General formulation of incompatible functions and its application. *Computers & Structures*, 1987, 27(5): 639-644

5 Pian THH, Wu CC. A rational approach for choosing stress terms for hybrid finite element formulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988, 26(10): 2331-2343

6 Pian THH. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions. *AIAA Journal*, 1964, 2(7): 1333-1336

7 Wu CC, Cheung YK. On optimization approaches of hybrid stress elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1995, 21(1-2): 111-128

8 Wu CC, Cheung YK. Penalty-equilibrating approach and an innovative formulation of 4-noded hybrid stress elements. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1996, 12(11): 707-717

9 Huang YQ, Huan YK, Chen HB. An incompatible and unsymmetric four-node quadrilateral plane element with high numerical performance. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2020, 121(15): 3382-3396

10 吴长春, 卞学鐄. 非协调数值分析与杂交元方法. 北京: 科学出版社, 1997 (Wu Changchun, Pian THH. Incompatible Numerical Analysis and Hybrid Element Method. Beijing: Science Press, 1997 (in Chinese))

11 郭乙木, 万力. 《非协调数值分析与杂交元方法》推介. 力学进展, 2001, 31(3): 475 (Guo Yimu, Wan Li. Recommendation and introduction of《Incompatible numerical analysis and hybrid element method》. *Advances in Mechanics*, 2001, 31(3): 475 (in Chinese))

12 Pian THH, Wu CC. Hybrid and Incompatible Finite Element Methods. Boca Raton, London, New York: Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, 2006

13 Cheung YK, Wu CC. The patch test condition in curvilinear coordinate system—formulation and application. *Science in China* (Series A), 1993, 36(1): 62-73

14 Wu CC, Huang YQ, Ramm E. A further study on incompatible models: revise-stiffness approach and completeness of trial functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 190(45): 5923-5934

15 Wu CC, Cheung YK. Numerical stability and constitution analysis of λ-type incompatible elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991, 31(8): 1669-1682

16 Wu CC. Dual zero energy modes in mixed/hybrid elements — definition, analysis and control. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1990, 81(1): 39-56

17 Wu CC, Hans B. Multivariable finite elements: consistency and optimization. *Science in China* (*Series A*), 1991, 34(3): 284-299

18 Cheung YK, Wu CC. A study on the stability of 3-field finite elements by the theory of zero energy modes. *International Journal of Solids and Structures*, 1992, 29(2): 215-229

19 Wu CC, Liu XY, Pian THH. Incompressible-incompatible deformation modes and plastic finite elements. *Computers & Structures*, 1991, 41(3): 449-453

20 Cheung YK, Wu CC. Incompatible numerical simulation of the axisymmetric cracked body made of ideally elastic-plastic material. *Engineering Fracture Mechanics*, 1993, 45(3): 399-405

21 Wu CC, Yuan L, Furukawa T. Deviatoric hybrid model and multivariable elimination at element level for incompressible medium. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 46(5): 729-745

22 Dong YF, Wu CC, De Freitas JAT. The hybrid stress model for Mindlin-Reissner plates based on a stress optimization condition. *Computers & Structures*, 1993, 46(5): 877-897

23 Cheung YK, Jiao ZP, Wu CC. General formulation of C^0 bending models based on the rational w-θ constraint. *Computational Mechanics*, 1995, 16(1): 53-61

24 Huang YQ, Liu M, Wu CC. Bimaterial interface hybrid element for piezoelectric laminated analysis. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 1999, 34(2): 97-106

25 Huang YQ, Di SL, Wu CC, et al. Bending analysis of composite laminated plates using a partially hybrid stress element with interlaminar continuity. *Computers & Structures*, 2002, 80(5-6): 403-410

26 袁振, 吴长春, 庄守兵. 基于杂交元和变密度法的连续体结构拓扑优化设计. 中国科学技术大学学报, 2001, 31(6): 694-699 (Yuan Zhen, Wu Changchun, Zhuang Shoubing. Topology optimization of continuum structure using hybrid elements and artificial material model. *Journal of University of Science and Technology of China*, 2001, 31(6): 694-699 (in Chinese))

27 Yuan Z, Wu CC, Li H. Homogenization-based topology design for pure torsion of composite shafts. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 19(3): 241-246

28 Sun HY, Di SL, Zhang N, et al. Micromechanics of composite materials using multivariable finite element method and homogenization theory. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38(17): 3007-3020

29 Feng ML, Wu CC. A study of three-dimensional four-step braided piezo-ceramic composites by the homogenization method. *Composites Science and Technology*, 2001, 61(13): 1889-1898

30 Wu CC, Xiao QZ, Yagawa G. Dual analysis for path integrals and bounds for crack parameter. *International Journal of Solids and Structures*, 1998, 35(14): 1635-1652

31 Wu CC, Xiao QZ, Yagawa G. Finite element methodology for path integrals in fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, 43(1): 69-91

32 Sze KY, Wu CC, Huang YQ. Upper and lower bounds for evaluation of nonlinear fracture parameters. *Engineering Fracture Mechanics*, 1999, 62(2-3): 185-201

33 Wu CC, Xiao QZ. Electro-mechanical crack systems: Bound theorems, dual finite elements and error estimation. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(20): 5413-5425

34 Li ZR, Lim CW, Wu CC. Bound theorem and implementation of dual finite elements for fracture assessment of piezoelectric materials. *Computational Mechanics*, 2005, 36(3): 209-216

35 Liu M, Wu CC. Numerical analysis of crack-tip fields of piezoelectric media by hybrid finite element. *Chinese Science Bulletin*, 1999, 44(11): 995-1000

36 Wu CC, Sze KY, Huang YQ. Numerical solutions on fracture of piezoelectric materials by hybrid element. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38(24-25): 4315-4329

37 Wu CC, He PX, Li ZR. Extension of *J* integral to dynamic fracture of functional graded material and numerical analysis. *Computers & Structures*, 2002, 80(5-6): 411-416

38 何沛祥, 吴长春, 李子然等. 无网格 Galerkin 法与非协调元方法的耦合. 计算力学学报, 2004, 21(4): 455-458, 480 (He Peixiang, Wu Changchun, Li Ziran, et al. Coupling of element-free Galerkin method and incompatible element method. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2004, 21(4): 455-458, 480 (in Chinese))

39 李子然, 吴长春. 基于局部间断 Galerkin 方法的 *p* 型有限元. 中国科学技术大学学报, 2003, 33(3): 324-329 (Li Ziran, Wu Changchun. New *p*-version finite element by local discontinuous Galerkin method. *Journal of University of Science and Technology of China*, 2003, 33(3): 324-329 (in Chinese))

40 李子然, 吴长春. 弹性力学问题中的间断 Galerkin 有限元法. 上海交通大学学报, 2003, 37(5): 770-773 (Li Ziran, Wu Changchun. Local discontinuous Galerkin method in elastic mechanics. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 2003, 37(5): 770-773 (in Chinese))

41 黄若煜, 吴长春. 应用 Pian-Sumihara 杂交列式的板弯曲模拟元. 工程力学, 2005, 22(2): 16-21 (Huang Ruoyu, Wu Changchun. A plate bending element as the counterpart of Pian-Sumihara hybrid element. *Engineering Mechanics*, 2005, 22(2): 16-21 (in Chinese))

42 黄若煜, 吴长春. 应力函数及其对偶理论在有限元中的应用. 力学学报, 2004, 36(4): 419-426 (Huang Ruoyu, Wu Changchun. Application of stress functions and its dual theory to finite element. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 36(4): 419-426 (in Chinese))

43 黄若煜, 吴长春, 钟万勰. 基于平面偶应力 -Reissner/Mindlin 板比拟的偶应力有限元. 力学学报, 2004, 36(3): 272-280 (Huang Ruoyu, Wu Changchun, Zhong Wanxie. Finite element of elasticity with couple-stress using the analogy between plane couple-stress and Reissner/Mindlin plate bending. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 36(3): 272-280 (in Chinese))