固体力学

非连续问题中单元分割的模板方法1)

王理想*,[†] 文龙飞*,[†] 肖桂仲*,[†],** 田 荣*,^{†,2)}

*(中物院高性能数值模拟软件中心,北京 100088) [†](北京应用物理与计算数学研究所,北京 100088) **(南京理工大学,南京 210094)

摘要 扩展有限元法 (extended finite element method, XFEM) 因具有裂纹几何独立于模拟网格、裂纹扩展时无需 网格重分重映、计算精度高等优点, 成为裂纹分析的主流数值方法之一. 但该方法在工程实践中存在单元被裂纹 分割的几何困难 —— 现有精确几何分割方法实现复杂、计算量大、鲁棒性差. 为克服这一困难, 本文提出一种 基于单元水平集的模板分割方法, 用于非连续单元子剖分和数值积分. 首先, 遍历单元水平集值所有形态并建立 标准单元分割模板库; 然后, 根据单元水平集值, 对非标准单元进行形态查询和模板插值; 最后, 套用标准单元分 割模板实现单元高效分割和子剖分. 将该方法与常规 XFEM、改进型 XFEM 进行结合, 从而应用于孔洞、夹杂、裂纹等非连续问题分析中. 算例分析表明, 本文提出的模板分割方法具有较高计算精度. 由于不引入复杂几何操 作, 该模板分割方法同时具有较高计算效率和鲁棒性, 故可为 XFEM 类方法在实际工程应用中提供有效支撑.

关键词 子剖分,水平集,非连续性,裂纹扩展,常规 XFEM,改进型 XFEM

中图分类号: TB115, O346.1 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-20-360

A TEMPLATED METHOD FOR PARTITIONING OF SOLID ELEMENTS IN DISCONTINUOUS PROBLEMS¹⁾

Wang Lixiang^{*,†} Wen Longfei^{*,†} Xiao Guizhong^{*,†,**} Tian Rong^{*,†,2)}

*(CAEP Software Center for High Performance Numerical Simulation, Beijing 100088, China) [†](Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China) ^{**}(Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract The extended finite element method (XFEM) has been one of the privileged tools for crack analysis due to its significant advantages: (1) Independence of crack geometry on the simulation mesh; (2) no necessity of remeshing when a crack grows; and (3) high accuracy. However, the method is hindered in engineering practices by the partitioning difficulty of discontinuous elements, i.e. the geometric interaction between discontinuous interfaces and solid elements. Though current partitioning algorithms are geometrically exact, they are cumbersome to implement, computationally expensive, and insufficiently robust. To overcome these issues, a templated partitioning algorithm is proposed based on element level sets for subdivision and numerical integration of discontinuous elements. Firstly, a templated partitioning library for standard discontinuous elements is established by enumerating all the patterns of element level set values. Secondly,

1) 国家重点研发计划 (2016YFB0201002, 2016YFB0201004) 和科学挑战专题 (TZ2018002) 资助项目.

²⁰²⁰⁻¹⁰⁻²⁰ 收稿, 2020-12-28 录用, 2020-12-28 网络版发表.

²⁾ 田荣, 研究员, 主要研究方向: 计算力学与高性能计算. E-mail: tian_rong@iapcm.ac.cn

引用格式: 王理想, 文龙飞, 肖桂仲, 田荣. 非连续问题中单元分割的模板方法. 力学学报, 2021, 53(3): 823-836
 Wang Lixiang, Wen Longfei, Xiao Guizhong, Tian Rong. A templated method for partitioning of solid elements in discontinuous problems. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(3): 823-836

the pattern of a non-standard element to be partitioned is looked up and the sub-coordinates are interpolated based on the element level set values. Lastly, the non-standard element is efficiently partitioned into sub-triangles based on the standard element template. The algorithm is incorporated into the conventional XFEM and the improved XFEM for analysis of discontinuous problems, i.e. the problems with holes, inclusions, cracks and so forth. Numerical examples indicate that the proposed algorithm achieves favorable accuracy. Without cumbersome geometrical operations, the templated partitioning algorithm is also efficient and robust, thereby enabling itself to support the extended finite element methods in practical engineering problems.

Key words subdivision, level set, discontinuity, crack propagation, conventional XFEM, improved XFEM

引 言

非连续问题广泛存在于基础研究^[1-4]和工程应 用^[5-8]中,如裂纹、孔洞、夹杂、多材料、流固耦合、 相变、剪切带等.研究这类问题,具有重要的科学意 义和广泛的应用价值.

传统有限元法模拟这类问题面临诸多困难,如 网格划分需与非连续面对齐、非连续面更新(如裂纹 扩展)时需网格重分重映、空间梯度变化较大处(如 裂尖处)需进行网格加密等.

鉴于传统有限元法局限性, 1990年代开始, 发展 出一批基于单位分解 (PU)^[9]的数值方法, 如单位分 解有限元 (PUFEM)^[10]、广义有限元 (GFEM)^[11-15]、数 值流形法 (NMM)^[16-20]、扩展有限元 (XFEM)^[21-25]等 等. 这类方法通过在基函数中引入先验的加强函数, 可有效求解各类连续、非连续问题.

特别针对裂纹问题, 1999 年美国西北大学 Ted Belytschko 研究组提出 XFEM^[21-22],在学术界获得广 泛关注和迅速发展.大型商业有限元软件纷纷添加 XFEM 模块,标志该方法在工业界获得认可.

XFEM 通过引入 C⁻¹型局部加强函数,在函数空间逼近裂纹的非连续性.由此,裂纹几何独立于模拟网格,裂纹扩展时亦无需网格重分重映.通过引入解析性质的加强函数,其计算精度亦获得大幅提高.

XFEM 在模拟裂纹扩展方面取得巨大成功,但同时也面临两大困扰:总体刚度矩阵高度病态和动力学计算时额外自由度上能量无法正确传递^[23-24].前者导致迭代法求解收敛缓慢甚至不收敛;后者导致动力学求解实施困难.有鉴于此,作者团队基于无额外自由度的裂尖插值格式,提出一种改进型 XFEM (improved XFEM)^[26-31],成功克服上述困难.

XFEM 类方法在求解非连续问题时,面临非连续单元积分问题 —— 此类单元受到非连续面的分割,

若使用常规高斯积分,精度将严重损失,故需进行特殊处理.目前有以下几类处理方法^[23,32-33].

(1)高阶高斯积分法^[34-35]:在单元内布置大量高 斯积分点(如6×7^[34],8×8^[35]),判断积分点与裂纹面 的位置关系,从而对积分点所在积分域进行积分.该 方法实现简单,但精度较低^[11].

(2) 自适应积分法^[11,36-37]:将初始非连续单元进 行网格细分,在细分后的格子上自适应布置高斯积 分点,然后进行非连续单元积分.该方法实现较简单, 精度获得提高,但需要布置大量高斯积分点.

(3) 子网格积分法^[38-39]:通过子网格剖分,将非 连续单元与裂纹进行几何分割,非连续单元积分在 子网格上实现.由于该方法一般引入精确几何操作, 精度较高,但实现复杂、鲁棒性差.

(4) 矩量拟合 (moment fitting) 法^[40-42]:通过一族 函数 (如幂函数) 在非连续单元上的精确积分,构造 一组非线性方程组,求解该方程组获得积分点位置 和权重,再使用所求得的积分点和权重进行非连续 单元积分.该方法不需要对单元进行分割,仅需引入 少量积分点就可取得较高精度,但由于每个单元都 需要求解非线性方程组,导致求解效率降低.

(5)特殊积分法:这类方法的思想是将原积分进 行一定特殊处理后再进行积分,具有实现简便或精 度高的优点,但通用性一般.这类方法包括:①等效 法.例如: Ventura^[43]将 Heaviside 函数等效为二次多 项式, Abedian 和 Düster^[44]将非连续函数等效为上egendre 多项式;由此把非连续积分转换为连续积分进 行计算.②降维法.例如: Sudhakar 和 Wall^[45]通过高 斯定理将体(面)积分转换为面(线)积分.③变换法. 例如: Mousavi和 Sukumar^[46]使用广义 Duffy 变换,将 在三角形(金字塔)上积分变换为在正方形(立方体) 上积分.此外,还有其他特殊积分方法^[47-48],不再一 一赘述.

824

上述几类方法在精度、效率、实现或通用性方面 存在各自的优点和缺点.本文从工程实用化角度出 发,提出一种基于水平集的非连续单元模板分割(单 元积分)方法.该方法采取模板查询的方式进行非连 续单元子剖分,在三角形子网格上布置高斯积分点. 相比于精确子剖分方法,该方法避免复杂几何操作, 可提高计算效率和鲁棒性.将该方法与常规 XFEM、 改进型 XFEM 进行结合,应用于孔洞、夹杂、裂纹等 非连续问题分析中,从而为 XFEM 类方法在实际工 程应用中提供有效支撑.

1 控制方程

1.1 强形式

如图1所示非连续静力问题,应满足平衡方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}, \quad \text{in } \Omega \tag{1}$$

式中, ∇为梯度算子, σ为应力张量, b为体力.



图 1 二维非连续静力问题描述

Fig. 1 Illustration of statics with discontinuities in 2D

位移边界条件和应力边界条件分别如下所示

式中, u 为位移, \bar{u} 为在位移边界 Γ_{u} 处给定的位移值, \bar{i} 为在应力边界 Γ_{t} 处给定的应力值, Γ_{0} 为无应力边 界, Γ_{c} 为裂纹面, Γ_{h} 为孔洞面, n 为各个面上单位外 法向量.

对于线弹性问题,其本构关系如下

$$\sigma = D : \varepsilon$$

(4)

式中, D 为弹性张量, ϵ 为应变张量.

小变形下,应变 e 和位移 u 满足如下几何关系

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_{\mathrm{s}}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2} \left(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \right)$$
(5)

1.2 弱形式

根据虚功原理,平衡方程(1)与应力边界条件(3) 可转化为如下弱积分形式

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b} \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_{\mathrm{t}}} \delta \boldsymbol{u} \cdot \bar{\boldsymbol{t}} \mathrm{d}\Gamma = 0 \quad (6)$$

式中, δu 为虚位移, $\delta \epsilon$ 为虚应变.

将几何关系(5)代入平衡方程弱积分式(6),可得

$$\int_{\Omega} (\nabla_{s} \delta \boldsymbol{u}) : \boldsymbol{D} : (\nabla_{s} \boldsymbol{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b} d\Omega - \int_{\Gamma_{t}} \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\bar{t}} d\Gamma = 0$$
(7)

2 非连续界面水平集描述

本文使用水平集法^[49]隐式描述非连续界面,如 孔洞面、夹杂面、裂纹面、多材料界面等.非连续界 面可分为强、弱两种:裂纹面属于强非连续界面,夹 杂面和多材料界面属于弱非连续界面.根据不同类 型加强形式,孔洞面可以是强非连续界面,也可以是 弱非连续界面.本文不对其进行展开讨论.

2.1 非连续面水平集函数 φ(x)

非连续面水平集函数 $\varphi(\mathbf{x})$ 定义为求解域 Ω 内任 意给定一点 $\mathbf{x} \in \Omega$ 到非连续面 Γ_{d} 的含符号距离,其 数学表达式为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \min_{\bar{\mathbf{x}} \in \Gamma_d} \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| \operatorname{sign} \left[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\right]$$
(8)

式中, $\|\cdot\|$ 为欧式范数, n 为非连续面单位外法向量, sign(·) 为符号函数. 上式中的非连续面 Γ_d 可以是裂 纹面 Γ_c 、夹杂面 Γ_i 、孔洞面 Γ_h 或多材料界面 Γ_m .

2.2 裂纹尖端水平集函数 ψ(x)

裂纹尖端水平集函数 $\psi(x)$ 定义为求解域 Ω 内任 意给定一点 $x \in \Omega$ 到裂纹尖端 x_t 的含符号距离,其 数学表达式为

$$\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{t} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{t}) \tag{9}$$

式中, t 为沿裂纹扩展方向的单位向量.针对裂纹所构造的水平集函数,如图2所示.



图 2 裂纹水平集函数构造 (根据文献 [33] 重画)

Fig. 2 Construction of level set functions for a crack (redrawn after Ref.[33])

2.3 裂纹尖端极坐标系 (r, θ)

裂纹可通过水平集函数 *φ*(**x**) 和 *ψ*(**x**) 进行描述. 除此之外,还需要定义裂纹尖端极坐标系 (*r*, *θ*),其数 学表达式可通过水平集函数给出

$$r = r(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\varphi^2(\boldsymbol{x}) + \psi^2(\boldsymbol{x})}$$
(10)

$$\theta = \theta(\mathbf{x}) = \arctan\left(\frac{\varphi(\mathbf{x})}{\psi(\mathbf{x})}\right)$$
(11)

3 扩展有限元

3.1 常规扩展有限元:弱非连续问题

对于弱非连续问题, 基于常规 XFEM 的位移场 逼近可表示为

$$\boldsymbol{u}^{h}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_{i}(\boldsymbol{x}) \bar{\boldsymbol{u}}_{i} + \sum_{j \in \mathcal{J}} N_{j}(\boldsymbol{x}) \left(F_{\text{kink}}(\boldsymbol{x}) - F_{\text{kink}}(\boldsymbol{x}_{j}) \right) \bar{\boldsymbol{a}}_{j} \qquad (12)$$

式中, *I* 为全部节点集合, *G* 为非连续面加强节点集合; *i* 和 *j* 为序数; *ū* 为常规自由度, *ā* 为非连续面加强额外自由度; *N*(*x*) 为标准有限元形函数, *F*_{kink}(*x*) 为弱非连续加强函数, 可取为^[50]

$$F_{\text{kink}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(\boldsymbol{x}) \left| \varphi_j \right| - \left| \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(\boldsymbol{x}) \varphi_j \right|$$
(13)

3.2 常规扩展有限元:强非连续问题

对于裂纹问题,除了考虑非连续面(裂纹面)阶 跃加强之外,还需考虑裂尖奇异加强.此时,基于常 规 XFEM 的位移场逼近为

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{h}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\boldsymbol{x}) \bar{\boldsymbol{u}}_i +$$

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(\mathbf{x}) \left(F_{jump}(\mathbf{x}) - F_{jump}(\mathbf{x}_j) \right) \bar{\mathbf{b}}_j + \sum_{k \in \mathcal{K}} N_k(\mathbf{x}) \sum_{\alpha=1}^4 \left(F_{tip}^{\alpha}(\mathbf{x}) - F_{tip}^{\alpha}(\mathbf{x}_k) \right) \bar{\mathbf{c}}_k^{\alpha}$$
(14)

式中, I 为全部节点集合, G 为裂纹面加强节点集合, K 为裂尖加强节点集合; i, j, k, α 为序数; \bar{u} 为常规自 由度, \bar{b} 为裂纹面加强额外自由度, \bar{c} 为裂尖加强额外 自由度; N(x) 为标准有限元形函数, $F_{jump}(x)$ 为阶跃 加强函数, $F_{tip}(x)$ 为裂尖奇异加强函数. $F_{jump}(x)$ 常使 用如下 Heaviside 函数

$$F_{\text{jump}}(\boldsymbol{x}) = H(\varphi(\boldsymbol{x})) = \begin{cases} 1, & \text{if } \varphi(\boldsymbol{x}) \ge 0\\ 0, & \text{if } \varphi(\boldsymbol{x}) < 0 \end{cases}$$
(15)

对于各向同性线弹性材料, F_{tip}(x) 可取为

$$\left\{F_{\rm tip}^{\alpha}(\mathbf{x})\right\} = \left\{F_{\rm tip}^{\alpha}\left(\mathbf{x}(r,\theta)\right)\right\} = \left\{\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\right\}$$
(16)

3.3 改进型扩展有限元:裂纹问题

在使用改进型扩展有限元 (IXFEM) 求解时, 仅 考虑裂纹问题, 其位移场逼近形式为^[26-31]

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{h}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}/\mathcal{K}} N_i(\boldsymbol{x}) \bar{\boldsymbol{u}}_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} N_j(\boldsymbol{x}) \left(F_{\mathrm{jump}}(\boldsymbol{x}) - F_{\mathrm{jump}}(\boldsymbol{x}_j) \right) \bar{\boldsymbol{b}}_j + \sum_{k \in \mathcal{K}} \left(\sum_{m \in \mathcal{K}_k} N_m(\boldsymbol{x}) \phi_k^m(\boldsymbol{x}) \right) \bar{\boldsymbol{u}}_k$$
(17)

式中, I 为所有节点集合, G 为裂纹面加强节点集合, \mathcal{K} 为裂尖加强节点集合, $\mathcal{K}_k \subset \mathcal{K}$ 为节点 k 处裂尖加强影响域内节点集合; i, j, k, m 为序数; \bar{u} 为常规自由度, \bar{b} 为裂纹面加强额外自由度; $N(\mathbf{x})$ 为标准有限元

形函数, *F*_{jump}(*x*) 为阶跃加强函数, 与式 (15) 定义相同, *φ*^{*n*}_{*u*}(*x*) 为裂尖局部加强函数

$$\phi_k^m(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) \left(A^{-1} \mathbf{p}_k - \frac{A_{(1)}^{-1} A_{(1)}^{-\mathrm{T}} \mathbf{p}_k}{A_{11}^{-1}} + \frac{A_{(1)}^{-1} \delta_{mk}}{A_{11}^{-1}} \right) \quad (18)$$

其中, *p*(**x**) 为基向量, *p*_k 为 *p*(**x**_k) 的缩写; **A** 为矩量矩 阵, **A**⁻¹₍₁₎ 为 **A**⁻¹ 的第一列, **A**⁻¹₁₁ 为 **A**⁻¹₍₁₎ 的第一个元素; δ 为 Kronecker 符号. *p*(**x**) 和 **A** 的表达式如下所示

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1, \ \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{x}_{k}^{\mathrm{T}}}{ch}, \ F_{\mathrm{tip}}^{\alpha}(\boldsymbol{x}) - F_{\mathrm{tip}}^{\alpha}(\boldsymbol{x}_{k}) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
(19)

$$\mathbf{A} = \sum_{l \in \mathcal{K}_k} \boldsymbol{p}_l \boldsymbol{p}_l^{\mathrm{T}}$$
(20)

式中, *c* 为常数, 一般取为 2~3; *h* 为网格尺寸; *F*_{tip}(*x*) 为裂尖奇异加强函数, 其定义与式 (16) 相同.

观察式 (17) 与式 (14) 可看出, 改进型 XFEM 与 常规 XFEM 的区别仅在于裂尖加强项.改进型 XFEM 裂尖加强项中不再包含额外自由度, 可有效解决常规 XFEM 线性相关问题.

3.4 混合单元修正

混合单元为同时包含有限元节点与加强节点的 单元 (如图 3 所示).为保证 XFEM 算法精度和收敛 性,混合单元形函数需加以修正^[51].





引入如下斜坡函数[52]

$$R(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x} \in \Omega_{\text{bld}}} N(\mathbf{x})$$
(21)

则在混合单元 Qbld 上, 位移逼近具有如下加权形式

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{h}}(\boldsymbol{x}) = (1 - R(\boldsymbol{x}))\,\boldsymbol{u}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{std}}(\boldsymbol{x}) + R(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{enr}}(\boldsymbol{x}) \tag{22}$$

式中, **u**^h_{std}(**x**), **u**^h_{enr}(**x**) 分别为标准有限元位移逼近和加强单元位移逼近. 对于上式具体形式, XFEM 和IXFEM 可分别参考文献 [51] 和文献 [26-31].

4 控制方程离散

通过 Galerkin 法, 并应用位移逼近式 (12) 或 式 (14) 或式 (17), 可将平衡方程弱积分式 (7) 离散 为如下线性方程组形式

$$KU = F \tag{23}$$

式中, *K* 为刚度矩阵, *U* 为自由度向量, *F* 为载荷向量. 对于不同位移逼近, *K*, *U*, *F* 形式略有不同.

若采用式(12)进行离散,式(23)具有如下形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{ua} \\ \mathbf{K}_{au} & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix} \begin{cases} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{cases} = \begin{cases} \mathbf{F}_{u} \\ \mathbf{F}_{a} \end{cases}$$
(24)

若采用式 (14) 进行离散,式 (23) 具有如下形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{ub} & \mathbf{K}_{uc} \\ \mathbf{K}_{bu} & \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bc} \\ \mathbf{K}_{cu} & \mathbf{K}_{cb} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{u}} \\ \bar{\boldsymbol{b}} \\ \bar{\boldsymbol{c}} \end{bmatrix} = \begin{cases} F_u \\ F_b \\ F_c \end{cases}$$
(25)

若采用式(17)进行离散,式(23)具有如下形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{ub} \\ \mathbf{K}_{bu} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{cases} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{cases} = \begin{cases} \mathbf{F}_{u} \\ \mathbf{F}_{b} \end{cases}$$
(26)

式 (24)~式 (26) 中 K 和 F 可统一表示为

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{\alpha\beta} = \int_{\Omega} (\boldsymbol{B}_{i}^{\alpha})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_{j}^{\beta} \mathrm{d}\Omega$$
(27)

$$F_{i}^{\alpha} = \int_{\Gamma_{i}} (N_{i}^{\alpha})^{\mathrm{T}} \bar{t} \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega} (N_{i}^{\alpha})^{\mathrm{T}} b \mathrm{d}\Omega \qquad (28)$$

其中, α, β = u, a 或 u, b, c 或 u, b, 表示所采用的位移 逼近方式; **B** 为应变矩阵, **N** 为形函数矩阵.

5 非连续单元分割方法

本方法的核心思想是,根据水平集在单元内的 近似属性,假定裂纹在单元内平直分布,由此根据水 平集值特定形态对非连续单元进行分割.该方法由 于采用模板查询的方式,相比于精确分割,可避免复 杂几何操作,从而提高计算效率和鲁棒性.

所分割的非连续单元分为两类:一类是被非连续面完全贯穿的单元,称为"切割单元";一类是被非连续面 (即裂纹面)部分贯穿的单元,称为"裂尖单元".下面分别给出这两类单元的分割子剖分.

5.1 切割单元

5.1.1 三角形单元

首先,遍历三角形切割单元水平集值所有形态 并建立标准单元分割模板库,如表1和图4所示.

表1 三角形切割单元水平集值符号形态

Table 1 LSV s	sign patterns of	f triangular	cut elements
---------------	------------------	--------------	--------------

Case (27)		Status (10)		Tune
		(n_{+1},n_0,n_{-1})	Sign	туре
(0, 0, 0)	0	(0, 3, 0)	×	0
(1, 1, 1)	1	(3, 0, 0)	(a)	
(-1, -1, -1)	2	(0, 0, 3)	(b)	
(1, 1, 0) (1, 0, 1) (0, 1, 1)	3	(2, 1, 0)	(a)	1
(-1, -1, 0) (-1, 0, -1) (0, -1, -1)	4	(0, 1, 2)	(b)	1
(1, 0, 0) (0, 1, 0) (0, 0, 1)	5	(1, 2, 0)	(a)	
(-1, 0, 0) (0, -1, 0) (0, 0, -1)	6	(0, 2, 1)	(b)	
(1, 1, -1) (1, -1, 1) (-1, 1, 1)	7	(2, 0, 1)	(a)	2
(-1, -1, 1) (-1, 1, -1) (1, -1, -1)	8	(1, 0, 2)	(b)	Z
(0, 1, -1) (1, 0, -1) (1, -1, 0)	0	(1 1 1)	(a)	2
(0, -1, 1) (-1, 0, 1) (-1, 1, 0)	9	(1, 1, 1)	(b)	3





表 1 中, case 表示所有水平集值符号的可能情况, 共 3³ = 27 种; status 表示单元水平集值符号个数所组成的三元组, 每个三元组表示一种状态, 共 10 种; type 表示切割单元类型, 共 3 种. 每种类型可分为 (a)、(b) 两种亚型, 由 sign 进行标识. 三角形切割 单元的 3 种切割类型及其亚型, 如图 4 所示.

然后,根据三角形切割单元水平集值,对非标准 单元进行形态查询 (查询 type 和 sign) 和模板插值. 对棱 *ij* 上交点 *p* 的位置进行线性插值

$$\boldsymbol{\xi}_p - \boldsymbol{\xi}_i = \lambda(\boldsymbol{\xi}_j - \boldsymbol{\xi}_i) \tag{29}$$

其中,λ可由水平集值插值得到

$$\lambda = \frac{\varphi_p - \varphi_i}{\varphi_j - \varphi_i} = \frac{-\varphi_i}{\varphi_j - \varphi_i}$$
(30)

交点 p 的坐标可由 i 和 j 的坐标和水平集值给出

$$\boldsymbol{\xi}_{p} = \frac{\varphi_{j}\boldsymbol{\xi}_{i} - \varphi_{i}\boldsymbol{\xi}_{j}}{\varphi_{i} - \varphi_{i}}$$
(31)

最后, 套用标准单元分割模板实现单元分割和 子三角剖分, 如算法 1 所述. 序号 *ijk* 的具体排列根 据不同切割单元类型预先排定, 可通过查表得到.

算法1三角形切割单元子三角化 输入: 三角形切割单元水平集值 输出:三角形切割单元子三角化 1: if type == 1 and sign == a $\mathcal{Q}_e^+ = \{ \Delta i j k \}, \quad \mathcal{Q}_e^- = \{ \emptyset \}$ 2. 3: **if** type == 1 **and** sign == b $\Omega_e^+ = \{\emptyset\}, \quad \Omega_e^- = \{\Delta i j k\}$ 4: 5: if type == 2 and sign == a $\Omega_{e}^{+} = \{\Delta i jq, \Delta i qp\}, \quad \Omega_{e}^{-} = \{\Delta pqk\}$ 6: 7: **if** type == 2 **and** sign == b $\Omega_e^+ = \{\Delta pqk\}, \quad \Omega_e^- = \{\Delta ijq, \Delta iqp\}$ 8: 9: if type == 3 and sign == a $\Omega_e^+ = \{\Delta i j p\}, \quad \Omega_e^- = \{\Delta i p k\}$ 10: 11: if type == 3 and sign == b12: $\Omega_e^+ = \{\Delta i p k\}, \quad \Omega_e^- = \{\Delta i j p\}$

5.1.2 四边形单元

首先,遍历四边形切割单元水平集值所有形态 并建立标准单元分割模板库.四边形切割单元中,共 3⁴ = 81 种情况、15 种状态.

在不考虑一些特殊情况 (如裂纹在单元内发生 较大转折、两条裂纹同时切割一个单元等) 的假设 下,四边形切割单元可分为 5 种类型,每个类型分为 (a)、(b) 两种亚型,如图 5 所示.



829



Fig. 5 Partitioning patterns of quadrilateral cut elements

然后,根据四边形切割单元水平集值,对非标准 单元进行形态查询 (查询 type 和 sign) 和模板插值, 其中模板插值与三角形切割单元中的实现一致.

最后, 套用标准单元分割模板实现单元分割和 子三角剖分, 如算法 2 所述. 与三角形单元类似, 四 边形单元中的序号 *ijkl* 具体排列也已根据不同切割 单元类型预先排定, 可通过查表得到.

```
算法2四边形切割单元子三角化
输入: 四边形切割单元水平集值
输出:四边形切割单元子三角化
1: if type == 1 and sign == a
2: \Omega_e^+ = \{\Box i j k l\}, \quad \Omega_e^- = \{\emptyset\}
3: if type == 1 and sign == b
4: \Omega_e^+ = \{\emptyset\}, \quad \Omega_e^- = \{\Box i j k l\}
5: if type == 2 and sign == a
6: \Omega_e^+ = \{\Delta i j p, \Delta p j q, \Delta q j k\}, \quad \Omega_e^- = \{\Delta p q l\}
7: if type == 2 and sign == b
       \Omega_e^+ = \{\Delta pql\}, \quad \Omega_e^- = \{\Delta ijp, \Delta pjq, \Delta qjk\}
8:
9: if type == 3 and sign == a
          \Omega_{e}^{+} = \{\Delta i j p, \Delta p j k\}, \quad \Omega_{e}^{-} = \{\Delta p k l\}
10:
11: if type == 3 and sign == b
12:
          \label{eq:Qe} \Omega_e^+ = \{ \Delta p k l \}, \quad \Omega_e^- = \{ \Delta i j p, \Delta p j k \}
13: if type == 4 and sign == a
14:
          \Omega_e^+ = \{\Delta i j k\}, \quad \Omega_e^- = \{\Delta i k l\}
15: if type == 4 and sign == b
          \Omega_e^+ = \{\Delta ikl\}, \quad \Omega_e^- = \{\Delta ijk\}
16:
17: if type == 5 and sign == a
          \mathcal{Q}_{e}^{+}=\{\Delta ijp,\Delta pjq\},\quad \mathcal{Q}_{e}^{-}=\{\Delta pql,\Delta lqk\}
18:
19: if type == 5 and sign == b
          \label{eq:Qe} \mathcal{Q}_e^+ = \{ \Delta pql, \Delta lqk \}, \quad \mathcal{Q}_e^- = \{ \Delta ijp, \Delta pjq \}
20:
```

5.2 裂尖单元

仅考虑裂尖在单元内的情况.裂尖单元分割形态如图 6 所示,分别对其进行子剖分,详见算法 3.

值得注意的是,本文方法在实现过程中:(1)预 先将若干标准单元进行子三角化,形成标准单元分 割模板库,并在计算机程序中进行存储;这一存储过 程发生在程序编译期,不占用计算时间.(2)在处理 任意单元分割时,仅需查询存储在计算机中的标准 单元分割模板库进行匹配,就可对任意单元进行分 割;这样可避免复杂的几何操作,从而大大提高程序 计算效率和鲁棒性.





算法 3 裂尖单元子三角化 输入:裂尖单元水平集值、裂尖坐标 输出:裂尖单元子三角化 1: if type == 1 and elem == triangle 2: $\Omega_e^{\text{tip}} = \{\Delta itp, \Delta ijt, \Delta tjk, \Delta ptk\}$ 3: if type == 2 and elem == triangle 4: $\Omega_e^{\text{tip}} = \{\Delta ijt, \Delta tjk, \Delta kit\}$ 5: if type == 1 and elem == quadrilateral 6: $\Omega_e^{\text{tip}} = \{\Delta itp, \Delta ijt, \Delta tjk, \Delta tkl, \Delta ptl\}$ 7: if type == 2 and elem == quadrilateral

8: $\Omega_e^{\text{tip}} = \{\Delta i jt, \Delta t jk, \Delta t kl, \Delta i tl\}$

5.3 非连续单元积分

为便于区分,以下各式中,以 x 表示全局坐标, 表示有限元母单元上的自然坐标, *ξ* 表示子三角形母 单元上的局部坐标.

切割单元、裂尖单元非连续积分可分别表示为

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{\alpha\beta} = \int_{\mathcal{Q}_{e}^{\text{eut}}(\boldsymbol{x})} \left[\boldsymbol{B}_{i}^{\alpha}(\boldsymbol{x})\right]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \left[\boldsymbol{B}_{j}^{\beta}(\boldsymbol{x})\right] d\mathcal{Q}_{(\boldsymbol{x})} = \\ \int_{\mathcal{Q}_{e}^{\text{t}}(\boldsymbol{\xi})} \left[\boldsymbol{B}_{i}^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})\right]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \left[\boldsymbol{B}_{j}^{\beta}(\boldsymbol{\xi})\right] |\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\xi})| d\mathcal{Q}_{(\boldsymbol{\xi})} + \\ \int_{\mathcal{Q}_{e}^{\text{c}}(\boldsymbol{\xi})} \left[\boldsymbol{B}_{i}^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})\right]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \left[\boldsymbol{B}_{j}^{\beta}(\boldsymbol{\xi})\right] |\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\xi})| d\mathcal{Q}_{(\boldsymbol{\xi})} = \\ \sum_{k=1}^{N_{\text{sub}}^{\text{sub}}} \sum_{l=1}^{N_{\text{E}p}^{\text{tp}}} \left[\boldsymbol{B}_{i}^{\alpha}(\boldsymbol{\xi}_{kl})\right]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \left[\boldsymbol{B}_{j}^{\beta}(\boldsymbol{\xi}_{kl})\right] |\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\xi}_{kl})| W_{kl} + \\ \sum_{k=1}^{N_{\text{sub}}^{\text{sub}}} \sum_{l=1}^{N_{\text{E}p}^{\text{tp}}} \left[\boldsymbol{B}_{i}^{\alpha}(\boldsymbol{\xi}_{kl})\right]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \left[\boldsymbol{B}_{j}^{\beta}(\boldsymbol{\xi}_{kl})\right] |\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\xi}_{kl})| W_{kl} \quad (32) \\ \boldsymbol{K}_{ij}^{\alpha\beta} = \int_{\mathcal{Q}_{e}^{\text{tip}}(\boldsymbol{x})} \left[\boldsymbol{B}_{i}^{\alpha}(\boldsymbol{x})\right]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \left[\boldsymbol{B}_{j}^{\beta}(\boldsymbol{\xi})\right] |\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\xi})| d\mathcal{Q}_{(\boldsymbol{x})} = \\ \int_{\mathcal{Q}_{e}^{\text{tip}}(\boldsymbol{\xi})} \left[\boldsymbol{B}_{i}^{\alpha}(\boldsymbol{\xi}_{kl})\right]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \left[\boldsymbol{B}_{j}^{\beta}(\boldsymbol{\xi})\right] |\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\xi})| d\mathcal{Q}_{(\boldsymbol{\xi})} = \\ \sum_{k=1}^{N_{\text{sub}}^{\text{sub}}} \sum_{l=1}^{N_{\text{E}p}^{\text{tp}}} \left[\boldsymbol{B}_{i}^{\alpha}(\boldsymbol{\xi}_{kl})\right]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \left[\boldsymbol{B}_{j}^{\beta}(\boldsymbol{\xi}_{kl})\right] |\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\xi}_{kl})| W_{kl} \quad (33) \end{cases}$$

式(32)和式(33)中, N_{sub}表示子剖分三角形个数, N_{gp} 表示子三角形上高斯点个数, 二者上标"+"、"-"、"t" 分别表示裂纹面上、下和裂尖材料域; [J] 为全局坐标 与自然坐标之间雅可比矩阵行列式; **ξ**_{kl} 为高斯点自 然坐标, W_{kl} 为高斯点权重, 分别可表示为

$$\boldsymbol{\xi}_{kl} = \sum_{n=1}^{3} \bar{N}_n(\bar{\boldsymbol{\xi}}_{kl}) \boldsymbol{\xi}_n^{\text{sub}}$$
(34)

$$W_{kl} = (2A_{kl})w_{kl} \tag{35}$$

式 (34) 和式 (35) 中, $\bar{N}(\bar{\boldsymbol{\xi}})$ 为子三角形形函数, $\bar{\boldsymbol{\xi}}_{kl}$ 为 子三角形上高斯点局部坐标, $\boldsymbol{\xi}_{n}^{sub}$ 为子三角形顶点自 然坐标, wkl 为子三角形上积分点权重, Akl 为(自然坐标下)子三角形面积.

6 裂纹相关计算

6.1 应力强度因子

相互作用积分法计算应力强度因子 (SIF), 具有 精度高、适应范围广的优点. 故本文采用该方法进行 计算, 其定义式如下^[53]

$$I^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left(W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right) n_j \, \mathrm{d}\Gamma$$
(36)

式中, $(\sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)}), (\sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)})$ 分别为真实场、辅助场, $W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)}$ 为相互作用应变能密度, Γ 为包含裂尖的围线, n_i 为 Γ 单位外法向量.

相互作用积分与真实场和附加场应力强度因子之间存在以下关系

$$I^{(1,2)} = \frac{2}{E'} \left(K_{\rm I}^{(1)} K_{\rm I}^{(2)} + K_{\rm II}^{(1)} K_{\rm II}^{(2)} \right)$$
(37)

式中, *E*′ 为等效杨氏模量. 对于平面应变问题: *E*′ = *E*/(1 - *v*²); 对于平面应力问题: *E*′ = *E*.

在式 (37) 中分别令 $K_{\mathrm{I}}^{(2)} = 1, K_{\mathrm{II}}^{(2)} = 0$ 和 $K_{\mathrm{I}}^{(2)} = 0,$ $K_{\mathrm{II}}^{(2)} = 1, 可得 K_{\mathrm{I}}^{(1)} = I_{\mathrm{mode II}}^{(1,2)} E'/2, K_{\mathrm{II}}^{(1)} = I_{\mathrm{mode II}}^{(1,2)} E'/2.$

在实际计算中,常在围线 *Γ*₀ 外再增设一回路 *C* (如图 7),将积分项乘以一光滑权函数 *q*(*x*),并将线积 分转化为等效面积分^[54]

$$I^{(1,2)} = \int_{C} \left[W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_{i}^{(2)}}{\partial x_{1}} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_{i}^{(1)}}{\partial x_{1}} \right] q m_{j} dC = \int_{A} \left[W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_{i}^{(2)}}{\partial x_{1}} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_{i}^{(1)}}{\partial x_{1}} \right] q_{,j} dA \quad (38)$$

其中, q(**x**) 在 Γ 内取 1, 在 C₀ 外取 0. A 为由 Γ, C₀, C₊ 和 C₋ 围成的闭合区域; m_i 为 A 的单位外法向量.



6.2 裂纹扩展

本文采用最大周向拉应力强度因子理论^[55] 计 算裂纹扩展方向. 令以下临界断裂韧度对 θ 偏导为

$$K_{\theta C} = \cos \frac{\theta}{2} \left(K_{\rm I} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3K_{\rm II}}{2} \sin \theta \right)$$
(39)

可得裂纹扩展角度

$$\theta_0 = 2 \arctan \frac{1}{4} \left[\frac{K_{\rm I}}{K_{\rm II}} - \operatorname{sign}(K_{\rm II}) \sqrt{\left(\frac{K_{\rm I}}{K_{\rm II}}\right)^2 + 8} \right] \quad (40)$$

其中, $\theta_0 \in (-\pi, \pi)$. 当 $K_{II} = 0$ 时, 取 $\theta_0 = 0$.

7 算例分析

7.1 孔洞问题

如图 8(a) 所示, 在一边长 l = 2 m 的方板中心有 一半径为 a = 0.2 m 的圆孔. 板受 x 向均匀拉伸作用, 拉应力 $\sigma_0 = 1$ Pa. 板的弹性模量 E = 1000 Pa, 泊松比 v = 0.3. 计算网格如图 8(b) 所示, 网格数为 40×40. 假设该问题为平面应变问题. 在极坐标系下, 该问题 应力场解析解可表示为^[33]

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 - 3\frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma_0}{2} \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 + 3\frac{a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta$$

$$(41)$$



图 8 方板中心带一圆孔: (a) 问题描述; (b) 计算网格 Fig. 8 A square plate with a circular hole at its center: (a) Problem definition; (b) simulation mesh

使用 XFEM 联合本文非连续单元分割方法计 算得到的应力云图, 与解析解对比如图 9 所示. 从 该图可看出, 本文与解析解计算结果非常接近. 特别 是在孔洞周围, 本文方法计算得到的应力集中因子为



图 9 σ_x 应力云图对比:本文 (左侧); 解析解 (右侧) Fig. 9 σ_x stress contour: Present (left); exact (right)

2.992, 与理论值 3.0 非常接近. 进一步地, 取 y 轴上 *a* ≤ y ≤ *L*/2 区间范围内的应力, 对比本文方法与解 析解计算结果, 如图 10 所示. 该图定量说明本文计 算结果与解析解符合较好. 该孔洞算例表明, 本文发 展的非连续单元分割方法在 XFEM 求解孔洞问题上 具有有效性.





Fig. 10 Comparison between present and exact solutions

为研究本文分割方法计算效率,在本算例中,同时使用本文发展的非连续单元分割方法以及德劳内 三角剖分 (Delaunay triangulation)方法,进行非连续单 元分割.以下以 Sub-DT 表示德劳内三角剖分方法; 以 Sub-LSV 表示本文非连续单元分割方法.

由于计算模型的对称性,本文仅给出 1/4 孔洞与 固体单元 (共 7 个)分割计算时间对比,如表 2 所示. 从该表可知,使用德劳内方法 (Sub-DT)计算总时间

表 2 使用不同分割方法所消耗计算时间

Table 2 Computational costs with different partitioning methods

Method	Element by element/µs	Total/µs	Average/µs
Sub-DT	21, 20, 50, 31, 34, 35, 28	219	31
Sub-LSV	8, 8, 7, 10, 6, 10, 8	57	8

为 219 μs, 而使用本文方法 (Sub-LSV) 计算总时间仅 为 57 μs. 该算例说明, 本文非连续单元分割方法在 计算效率上明显优于传统德劳内方法.

7.2 夹杂问题

如图 11(a) 所示, 在一边长 *l* = 2 m 的方板中心有 一半径为 *a* = 0.2 m 的圆孔. 板受 *y* 向均匀压缩作用, 压应力 σ₀ = 1 Pa. 基质材料弹性模量 *E*₁ = 1000 Pa, 泊松比 ν₁ = 0.3; 夹杂材料弹性模量 *E*₂ = 3000 Pa, 泊 松比 ν₂ = 0.3. 假设该问题为平面应变问题.



图 11 方板中心带一夹杂: (a) 问题描述; (b) 有限元网格 Fig. 11 A square plate with a circular inclusion at its center: (a) Problem definition; (b) finite element mesh

XFEM 计算网格仍采用图 8(b) 中的 40×40 规则 网格. 该问题无解析解,为验证方法可行性,同时使 用有限元法 (FEM) 进行计算,网格如图 11(b). 该网 格具有 1685 个节点,3288 个三角形单元.

使用 XFEM 联合本文非连续单元分割方法计算 得到 u_y 位移云图, 与 FEM 对比, 如图 12 所示. XFEM 与 FEM 计算的 u_y 最大值均为 1.809 mm, 二者一致. 取直线 $y = x \perp -L/2 \le x \le L/2$ 区间范围内 u_x 和 u_y 位移, 对比二者结果, 如图 13 所示, 图中曲线两两重 合. 进一步分析可知, 二者总位移平均偏差为 0.04%. 该夹杂算例表明, 本文发展的非连续单元分割方法 在 XFEM 求解夹杂问题上同样具有有效性.



图 12 u_y 位移云图对比:本文(左侧);有限元(右侧) Fig. 12 u_y displacement contour: Present (left); FEM (right)



图 13 本文方法计算结果与有限元对比

Fig. 13 Comparison between present and FEM solutions

7.3 稳定裂纹问题

报

如图 14(a) 所示, 一边裂纹板受 x 向剪切作用, 剪 应力 $\tau_0 = 1$ Pa. 板宽 b = 7 m、高 2h = 16 m, 裂纹长 a = 3.5 m. 板弹性模量 E = 1000 Pa, 泊松比 v = 0.3. 计算网格如图 14(b) 所示, 网格数为 19×39. 假设为 平面应变问题. 该问题中裂尖处应力强度因子的参 考解为^[56]

$$K_{\rm I}^{\rm ref} = 34.0 \,{\rm Pa} \cdot {\rm m}^{1/2}, \ K_{\rm II}^{\rm ref} = 4.55 \,{\rm Pa} \cdot {\rm m}^{1/2}$$
 (42)

在本算例中,同时使用本文发展的非连续单元 分割方法 (Sub-LSV) 以及德劳内三角剖分方法 (Sub-DT),进行非连续单元分割.



图 14 边裂纹板受单向剪切: (a) 问题描述; (b) 计算网格 Fig. 14 Plate with an edge crack under unidirectional shear: (a) Problem definition; (b) simulation mesh

分别联合 Sub-LSV. Sub-DT 和 XFEM. IXFEM 计 算裂尖处应力强度因子,如表3所示.一方面,通过对 比 Sub-LSV 和 Sub-DT 两种分割方法可知,不论是应 用于 XFEM 还是应用于 IXFEM, Sub-LSV 均可取得 接近于 Sub-DT 的计算精度. Sub-LSV 精度略低的原 因是: 其分割裂尖单元为5个子三角形, 少于 Sub-DT 分割的6个子三角形,导致精度略有降低.另一方面, 通过对比 XFEM 和 IXFEM 可知, IXFEM 具有明显更 高的计算精度. 该稳定裂纹算例表明, 本文发展的非 连续单元分割方法在 XFEM 和 IXFEM 求解稳态裂 纹问题上均具有有效性.

表 3 使用不同方法计算得到的应力强度因子

Table 3 Stress intensity factors from different approaches

Approach	$K_{\rm I}/({\rm Pa}\cdot{\rm m}^{1/2})$	K _I error/%	$K_{\rm II}/({\rm Pa}\cdot{\rm m}^{1/2})$	K _{II} error/%
XFEM+Sub-DT	32.345 2	-4.87	4.3366	-4.69
XFEM+Sub-LSV	32.3369	-4.89	4.3306	-4.82
IXFEM+Sub-DT	33.4657	-1.57	4.5266	-0.51
IXFEM+Sub-LSV	33.4596	-1.59	4.523 4	-0.58

7.4 扩展裂纹问题

如图 15(a) 所示, 为一带边裂纹双臂梁模型, 长 *l* = 6 m, 宽 *w* = 2 m, 裂纹长 *a* = 2.05 m. 双臂梁弹性 模量 E = 1000 Pa, 泊松比 v = 0.3. 梁右端固支, 左端 受非对称集中力载荷 $P_1 = 1$ N, $P_2 = 1.01$ N. 计算网 格如图 15(b) 所示, 网格数为 25×75. 假设裂纹扩展 18步,每一步扩展长度为 0.1 m.



图 15 双臂梁带一边裂纹: (a) 问题描述; (b) 计算网格 Fig. 15 Double cantilever beam with an edge crack: (a) Problem definition; (b) simulation mesh

分别使用 Sub-LSV. Sub-DT 联合 IXFEM 计算 裂纹扩展路径,如图 16 所示.从该图可看出,使用 IXFEM+Sub-LSV 计算得到的裂纹扩展路径, 与使用 IXFEM+Sub-DT 计算得到的裂纹扩展路径具有高度 重合性. 该算例进一步说明,对于扩展裂纹问题,本 文发展的非连续单元分割方法同样具有有效性.



Fig. 16 Comparison of crack propagation paths

7.5 三维裂纹问题

本文发展的非连续单元模板分割方法,可推广 至三维情形.但由于三维情况下,弯曲裂纹切割单元 需要进行等参变换等诸多算法研究,因此另文叙述. 此处,预先给出一三维边裂纹算例,以供参考.

如图 17(a) 所示, 为一三维贯穿型边裂纹板, 该板 宽 w = 7 m, 高 h = 16 m, 厚 t = 4 m, 裂纹长 a = 3.5 m. 板弹性模量 E = 1000 Pa, 泊松比 $\nu = 0.0.$ 板底端固 支,顶端受y轴正向拉伸载荷 $\sigma_0 = 1$ Pa 作用. 计算网 格如图 17(b) 所示, 网格数为 19×39×10.

分别使用高阶高斯积分法和本文切割方法,并 联合 XFEM 进行求解. 计算所得到的 u, 位移场对 比,如图 18 所示. 使用 XFEM+ 高阶高斯积分法,位 移最大值为 73.92 mm, 最小值为 -4.978 mm. 使用 XFEM+本文分割方法,位移最大值为 73.91 mm, 最 小值为 -4.976 mm. 两种方法的位移最大值偏差为 0.01%, 位移最小值偏差为 0.04%. 该算例说明, 对于 三维裂纹问题,本文发展的非连续单元分割方法同 样具有有效性.



图 17 三维贯穿型边裂纹模型: (a) 问题描述; (b) 计算网格 Fig. 17 Three-dimensional cut-through edge crack model: (a) Problem definition; (b) simulation mesh



图 18 *u_y* 位移场对比: (a) 高阶高斯积分法; (b) 本文分割方法 Fig. 18 Comparison of *u_y* displacement fields: (a) High-order Gauss integration method; (b) presented partitioning method

8 结论

本文提出一种基于单元水平集的模板分割方法, 用于非连续单元子剖分和数值积分.首先,遍历单元 水平集值所有形态并建立标准单元分割模板库;然 后,根据单元水平集值,对非标准单元进行形态查询 和模板插值;最后,套用标准单元分割模板实现单元 高效分割和子剖分.

将该方法与常规 XFEM、改进型 XFEM 进行结合,从而应用于孔洞、夹杂、裂纹等非连续问题分析中.算例分析表明,本文提出的分割方法具有较高的计算精度.由于不引入复杂几何操作,该模板分割方

法同时具有较高计算效率和鲁棒性, 可为 XFEM 类 方法在非连续问题中提供有效支撑.

作为方法预研,本文仅给出二维非连续单元分 割算法,用以探究模板分割可行性.事实上,笔者已 初步将该算法推广至三维情形.在三维情况下,对于 弯曲裂纹切割单元需要进行等参变换等诸多算法研 究,所以将另文叙述.本文分割方法同时还可用于界 面与计算网格不对齐的其他数值方法,如数值流形 法 (NMM)、有限格子法 (FCM) 等等.

参考文献

- 1 王勃, 张阳博, 左宏等. 压应力对压剪裂纹扩展的影响研究. 力学 学报, 2019, 51(3): 845-851 (Wang Bo, Zhang Yangbo, Zuo Hong, et al. Study on the influence of compressive stress on the compression shear crack propagation. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(3): 845-851 (in Chinese))
- 2 卢广达,陈建兵.基于一类非局部宏 微观损伤模型的裂纹模 拟.力学学报, 2020, 52(3): 749-762 (Lu Guangda, Chen Jianbing. Cracking simulation based on a nonlocal macro-meso-scale damage model. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(3): 749-762 (in Chinese))
- 3 郭树起. 应用边界积分法求圆形夹杂问题的解析解. 力学学报, 2020, 52(1): 73-81 (Guo Shuqi. Exact solution of circular inclusion problems by a boundary integral method. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(1): 73-81 (in Chinese))
- 4 李聪, 牛忠荣, 胡宗军等. 三维切口/裂纹结构的扩展边界元法分析. 力学学报, 2020, 52(5): 1394-1408 (Li Cong, Niu Zhongrong, Hu Zongjun, et al. Analysis of 3-D notched/cracked structures by using extended boundary element method. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(5): 1394-1408 (in Chinese))
- 5 王理想, 唐德泓, 李世海等. 基于混合方法的二维水力压裂数值模 拟. 力学学报, 2015, 47(6): 973-983 (Wang Lixiang, Tang Dehong, Li Shihai, et al. Numerical simulation of hydraulic fracturing by a mixed method in two dimensions. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, 47(6): 973-983 (in Chinese))
- 6 Liu CQ, Prévost JH, Sukumar N. Modeling branched and intersecting faults in reservoir-geomechanics models with the extended finite element method. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2019, 43(12): 2075-2089
- 7 Gordeliy E, Abbas S, Peirce A. Modeling nonplanar hydraulic fracture propagation using the XFEM: An implicit level-set algorithm and fracture tip asymptotics. *International Journal of Solids and Structures*, 2019, 159: 135-155
- 8 Liu H, Yang XG, Li SL, et al. A numerical approach to simulate 3D crack propagation in turbine blades. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, 171: 105408
- 9 Babuška I, Melenk JM. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, 40(4): 727-758
- 10 Melenk JM, Babuška I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1-4): 289-314

- 第3期
- 11 Strouboulis T, Babuška I, Copps K. The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 181(1-3): 43-69
- 12 Duarte CA, Babuška I, Oden JT. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Comput*ers and Structures, 2000, 77(2): 215-232
- 13 Strouboulis T, Copps K, Babuška I. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 190(32-33): 4081-4193
- 14 Tian R. Extra-dof-free and linearly independent enrichments in GFEM. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2013, 266: 1-22
- 15 田荣. C¹ 连续型广义有限元格式. 力学学报, 2019, 51(1): 263-277 (Tian Rong. A GFEM with C¹ continuity. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(1): 263-277 (in Chinese))
- 16 Shi GH. Manifold method of material analysis//Transactions of the 9th Army Conference on Applied Mathematics and Computing, Minneapolis, Minnesota, 1991: 57-76
- 17 徐栋栋,郑宏,杨永涛等. 多裂纹扩展的数值流形法. 力学学报, 2015, 47(3): 471-481 (Xu Dongdong, Zheng Hong, Yang Yongtao, et al. Multiple crack propagation based on the numerical manifold method. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, 47(3): 471-481 (in Chinese))
- 18 刘登学,张友良,刘高敏. 基于适合分析 T 样条的高阶数值流形 方法. 力学学报, 2017, 49(1): 212-222 (Liu Dengxue, Zhang Youliang, Liu Gaomin. Higher-order numerical manifold method based on analysis-suitable T-spline. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(1): 212-222 (in Chinese))
- 19 Zhang HH, Liu SM, Han SY, et al. Computation of T-stresses for multiple-branched and intersecting cracks with the numerical manifold method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2019, 107: 149-158
- 20 Hu MS, Rutqvist J. Numerical manifold method modeling of coupled processes in fractured geological media at multiple scales. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 2020, 12(4): 667-681
- 21 Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 45(5): 601-620
- 22 Moës N, Dolbow J, Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 46(1): 131-150
- 23 Belytschko T, Gracie R, Ventura G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2009, 17(4): 043001
- 24 Fries TP, Belytschko T. The extended/generalized finite element method: an overview of the method and its applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, 84(3): 253-304
- 25 Saxby BA, Hazel AL. Improving the modified XFEM for optimal high-order approximation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2020, 121(3): 411-433
- 26 Tian R, Wen LF. Improved XFEM An extra-dof free, wellconditioning, and interpolating XFEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, 285: 639-658

- 27 Wen LF, Tian R. Improved XFEM: Accurate and robust dynamic crack growth simulation. *Computer Methods in Applied Mechanics* and Engineering, 2016, 308: 256-285
- 28 田荣, 文龙飞. 改进型 XFEM 综述. 计算力学学报, 2016, 33(4): 469-477 (Tian Rong, Wen Longfei. Recent progresses on improved XFEM. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2016, 33(4): 469-477 (in Chinese))
- 29 文龙飞, 王理想, 田荣. 动载下裂纹应力强度因子计算的改进型 扩展有限元法. 力学学报, 2018, 50(3): 599-610 (Wen Longfei, Wang Lixiang, Tian Rong. Accurate computation on dynamic SIFs using improved XFEM. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(3): 599-610 (in Chinese))
- 30 王理想, 文龙飞, 王景焘等. 基于改进型 XFEM 的裂纹分析并行 软件实现. 中国科学: 技术科学, 2018, 48(11): 1241-1258 (Wang Lixiang, Wen Longfei, Wang Jingtao, et al. Implementations of parallel software for crack analyses based on the improved XFEM. *Scientia Sinica Technologica*, 2018, 48(11): 1241-1258 (in Chinese))
- 31 Tian R, Wen LF, Wang LX. Three-dimensional improved XFEM (IXFEM) for static crack problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 343: 339-367
- 32 余天堂. 扩展有限单元法 理论、应用及程序. 北京: 科学出版社, 2014 (Yu Tiantang. The Extended Finite Element Method— Theory, Application and Program. Beijing: Science Press, 2014 (in Chinese))
- 33 Khoei AR. Extended Finite Element Method: Theory and Applications. John Wiley & Sons, 2015
- 34 庄茁, 柳占立, 成斌斌等. 扩展有限元法. 北京: 清华大学出版社, 2012 (Zhuang Zhuo, Liu Zhanli, Cheng Binbin, et al. The Extended Finite Element Method. Beijing: Tsinghua University Press, 2012 (in Chinese))
- 35 Prabel B, Combescure A, Gravouil A, et al. Level set X-FEM non-matching meshes: Application to dynamic crack propagation in elastic-plastic media. *International Journal for Numerical Methods* in Engineering, 2007, 69(8): 1553-1569
- 36 Kudela L, Zander N, Kollmannsberger S, et al. Smart octrees: Accurately integrating discontinuous functions in 3D. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016, 306: 406-426
- 37 Scholz F, Jüttler B. Numerical integration on trimmed threedimensional domains with implicitly defined trimming surfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 357: 112577
- 38 余天堂. 扩展有限元法的数值方面. 岩土力学, 2007, 28(增): 305-310 (Yu Tiantang. Numerical aspects of the extended finite element method. *Rock and Soil Mechanics*, 2007, 28(Supp): 305-310 (in Chinese))
- 39 江守燕, 杜成斌. 弱不连续问题扩展有限元法的数值精度研究. 力学学报, 2012, 44(6): 1005-1015 (Jiang Shouyan, Du Chengbin. Study on numerical precision of extended finite element methods for modeling weak discontinuities. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, 44(6): 1005-1015 (in Chinese))
- 40 Mousavi SE, Sukumar N. Generalized Gaussian quadrature rules for discontinuities and crack singularities in the extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(49-52): 3237-3249
- 41 Joulaian M, Hubrich S, Düster A. Numerical integration of discontinuities on arbitrary domains based on moment fitting. *Computational Mechanics*, 2016, 57: 979-999

- 42 Bui HG, Schillinger D, Meschke G. Efficient cut-cell quadrature based on moment fitting for materially nonlinear analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 366: 113050
- 43 Ventura G. On the elimination of quadrature subcells for discontinuous functions in the eXtended Finite-Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, 66(5): 761-795
- 44 Abedian A, Düster A. Equivalent Legendre polynomials: Numerical integration of discontinuous functions in the finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 343: 690-720
- 45 Sudhakar Y, Wall WA. Quadrature schemes for arbitrary convex/concave volumes and integration of weak form in enriched partition of unity methods. *Computer Methods in Applied Mechanics* and Engineering, 2013, 258: 39-54
- 46 Mousavi SE, Sukumar N. Generalized Duffy transformation for integrating vertex singularities. *Computational Mechanics*, 2010, 45: 127-140
- 47 Lv JH, Jiao YY, Rabczuk T, et al. A general algorithm for numerical integration of three-dimensional crack singularities in PU-based numerical methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 363: 112908
- 48 Cui T, Leng W, Liu HQ, et al. High-order numerical quadratures in a tetrahedron with an implicitly defined curved interface. *ACM*

Transactions on Mathematical Software, 2020, 46(1): 1-18

- 49 Sethian JA. Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Material Science. Cambridge: Cambridge University Press, 1999
- 50 Moës N, Cloirec M, Cartraud P, et al. A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, 192(28-30): 3163-3177
- 51 Fries TP. A corrected XFEM approximation without problems in blending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, 75(5): 503-532
- 52 Belytschko T, Organ D, Krongauz Y. A coupled finite element element-free Galerkin method. *Computational Mechanics*, 1995, 17: 186-195
- 53 Rice JR. A path independent and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 1968, 35(2): 379-386
- 54 Li FZ, Shih CF, Needleman A. A comparison of methods for calculating energy release rates. *Engineering Fracture Mechanics*, 1985, 21(2): 405-421
- 55 Erdogan F, Sih GC. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of Basic Engineering*, 1963, 85(4): 519-525
- 56 Tada H, Paris PC, Irwin R. The Stress Analysis of Cracks (Handbook). Del Research Corporation, Hellertown, Pennsylvania, 1973