

基于能量密度等效的超弹性压入模型 与双压试验方法¹⁾

张希润* 蔡力勋^{*,2)} 陈辉[†]

^{*}(西南交通大学力学与工程学院应用力学与结构安全四川省重点实验室, 成都 610031)

[†](长沙理工大学土木与工程学院, 长沙 410114)

摘要 针对超弹性材料压入问题, 本文基于能量密度中值等效原理, 提出了描述球、平面、锥 3 类压头独立压入下载荷、深度、压头几何尺寸和 Mooney-Rivlin 本构关系参数之间关系的半解析超弹性压入模型 (semi-theoretical hyperelastic-material indentation model, SHIM), 进而提出了球、平面、锥压入组合的双压试验方法 (indentation method due to dual indenters, IMDI). 正向验证表明, 基于系列超弹性材料的本构关系参数, 由 SHIM 分别预测的球、平面、锥 3 类压入下的载荷-位移曲线与有限元分析 (finite element analysis, FEA) 结果之间密切吻合; 反向验证表明, 基于系列超弹性材料的 FEA 条件本构关系下 3 类压入的载荷-位移曲线, 由双压试验方法预测的 Mooney-Rivlin 本构关系与 FEA 条件本构关系密切吻合. 针对 3 种超弹性橡胶, 完成了球、平面、锥压入试验, 应用双压试验方法获得的 3 组 Mooney-Rivlin 本构关系均与单轴拉伸试验结果吻合良好.

关键词 超弹性材料, 能量密度等效, 半解析, 压入试验, 本构关系, 试验方法

中图分类号: O341 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-20-023

HYPERELASTIC INDENTATION MODELS AND THE DUAL-INDENTATION METHOD BASED ON ENERGY DENSITY EQUIVALENCE¹⁾

Zhang Xirun* Cai Lixun^{*,2)} Chen Hui[†]

^{*}(Applied Mechanics and Structure Safety Key Laboratory of Sichuan Province, School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

[†](School of Architecture and Construction, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, China)

Abstract For the hyperelastic problems of materials under indentation conditions, based on the mean-value energy density equivalence principle, semi-theoretical hyperelastic-material indentation models (SHIM) are proposed to describe the relationship among load, depth, indenter dimension and Mooney-Rivlin constitutive parameters under independent indentation with spherical indenter, flat indenter and conical indenter, respectively, and then the indentation method due to dual indenters (IMDI) is presented. The forward verification shows that, based on a series constitutive relation parameters of hyperelastic materials, the force-depth curves of spherical, conical and flat indentation respectively predicted by

2020-01-15 收稿, 2020-03-06 录用, 2020-03-10 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11872320).

2) 蔡力勋, 教授, 主要研究方向: 材料力学的测试理论与方法, 疲劳与断裂力学. E-mail: lix.cai@263.net

引用格式: 张希润, 蔡力勋, 陈辉. 基于能量密度等效的超弹性压入模型与双压试验方法. 力学学报, 2020, 52(3): 787-796

Zhang Xirun, Cai Lixun, Chen Hui. Hyperelastic indentation models and the dual-indentation method based on energy density equivalence. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(3): 787-796

SHIM are closely consistent with the FEA results; and the reverse verification shows that, based on the force-depth curves under FEA conditional constitutive relation of a series of hyperelastic materials, the Mooney-Rivlin constitutive relations predicted by the dual indentation experimental method are closely consistent with the FEA conditional constitutive relations. For three hyperelastic rubbers, the spherical, flat and conical indentation tests were carried out, three constitutive relationships of the hyperelastic rubbers obtained by IMDI are all in good agreement with the uniaxial tensile results.

Key words hyperelastic material, energy density equivalence, semi-analytical, indentation test, constitutive relationship, test method

引言

超弹性材料广泛用于交通、建筑、机械、生物等工程领域,特别常用于结构的减震、密封等方面,其选材、工艺评价、老化分析都离不开表征材料基本性能的本构关系。超弹性材料的本构关系通常采用应变能密度与主伸长比之间的函数关系来描述^[1-3]。

1940年代初,Treloar^[4-5]通过构造三链分子网络模型,提出了表征应变能密度的 Neo-Hookean 模型,该模型对橡胶拉伸应力-伸长比曲线的初始线性段有较为准确的描述,而因采用单参数,模型对曲线后继非线性段描述性较差。1940年,Mooney^[6]考虑代表性体积单元 (representative volume element, RVE)。RVE 是连续介质力学的基本六面体单元,只要取合适的尺寸,就能用以求解受载构元的宏观力学行为)应变能密度与3个主伸长比 λ_i ($i=1,2,3$)之间的对称关系,提出了双参数超弹性材料本构关系。1948年,Rivlin^[7]利用材料 RVE 变形张量不变量,根据材料体积不可压缩性,令第三不变量 $I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1$,则 Mooney 本构方程可简化为连续介质力学框架下关于第一不变量 I_1 和第二不变量 I_2 的双参数方程形式

$$\left. \begin{aligned} u &= C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \\ I_1 &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \\ I_2 &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \lambda_i^2 \lambda_j^2 \\ \lambda_i &= e^{\varepsilon_i}, \quad i=1,2,3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, C_{10} 和 C_{01} 为材料参数, ε_i 为主应变,该式称为 Mooney-Rivlin 超弹性材料本构模型,该模型可较好地描述小变形和中等程度大变形的超弹性本构关系,是迄今描述各向同性超弹性材料本构关系较为常用的模型。此外,Rivlin 为了拓展描述全程本构关系,还进一步提出了多参数的级数式本构模型。

材料压入试验法(压入法)是通过载荷或位移控制将压头压入材料并测得压入载荷 P -压入深度 h 关系来获取材料力学性能指标的方法^[8]。压入法测试金属材料力学性能的方法主要包括:(1)Haggag^[9-10]提出、Kwon^[11]改进的多级加卸载自动球形压头压入(球压入)方法,该方法对球压区平均应力进行表征修正获得压入试验过程中的多级表征应力 σ_r 和表征应变 ε_r ,通过这些数据可以回归获得 Hollomon 律参数;(2)Cao等^[12]提出的基于量纲分析和表征应力的半经验法,该方法通过量纲分析建立 σ_r , h , P 构成的无量纲项和比值 σ_r/E^* (折减弹性模量)之间关系的描述模型,该模型含有大量模型参数,须通过复杂流程方式迭代得到 Hollomon 律参数;(3)Clayton等^[13]提出的本构关系参数反向预测法,该方法基于大量材料本构关系参数关联的 P - h 压入曲线的 FEA 库与 P - h 压入试验曲线的相关性优化搜索以实现材料应力-应变关系的近似求解;(4)Cai等^[14-16]提出的半解析球压入方法,该方法根据能量密度中值原理获得的半解析压入模型和单球压入试验方法,通过金属宏观表面的 P - h 单级压入曲线实现了材料应力-应变关系、抗拉强度及布氏、洛氏、维氏硬度的仪器化测试。

对于超弹性材料,压入法测试材料力学性能的方法大多基于量纲分析法与搜索法。Zhang等^[17]采用与上述金属压入相似的量纲分析方法^[12],对4种广泛使用的超弹性材料本构模型,建立 μ_0 (初始剪切模量)、 R (压头半径)、 h 和 P 构成的无量纲项与本构模型参数、 h 和 R 构成的无量纲项之间的4类关系模型,包含大量参数的这4类模型均属于半经验性质,文献认为可通过试验获得与4类模型参数相关的回归参量,并未通过球压入实现本构关系的反向求解。Pan等^[18]主要结合多级应变能密度函数的 Ogden 超弹性本构模型,通过对球、平面、锥3类压头压入(球压入、平面压入、锥压入)问题进行量纲分析,证明

了单类单压头无法独立实现多参数超弹性本构模型的参数求解, 同时证明了单类单压头可实现单参数超弹性本构模型求解的唯一性, 但作者未给出超弹性压入问题的具体求解方法. Giannakopoulos 等^[19]基于 Mooney-Rivlin 模型获得了球压入比值 h/R 小于 0.1 情况下 P - h 压入曲线的解析解, 并未由此获得本构关系, Giannakopoulos 认为通过单球压入不能唯一性获得本构模型参数. Chen 等^[20]对一种硅橡胶进行球压入试验, 利用 Oliver 和 Pharr 法^[21]获得材料的弹性模量, 并对 Neo-Hookean、Mooney-Rivlin、Yeoh 三类超弹性本构模型, 通过调整模型参数进行 P - h 压入曲线的有限元分析, 以此逐渐逼近 P - h 压入试验曲线, 进而反向求解获得本构模型参数. Saux 等^[22]采用半锥角 70.3° 的圆锥形压头对天然橡胶完成锥压入试验, 并设定材料参数初值后进行了有限元计算, 将有限元计算结果与 P - h 压入曲线之间的误差作为目标进行基于最小二乘法的迭代计算, 取两者误差最小时所设定的材料参数为本构模型的参数. Lee 等^[23]以 Yeoh 模型作为橡胶的本构模型, 将 P - h 球压入试验曲线映射为应变能密度与 I_1 关系曲线, 以该曲线确定模型参数, 并与给定初值进行比较, 误差最小时即为模型参数. Song 等^[24]对不同参数的 Yeoh 模型进行球压入有限元模拟, 建立了压入载荷-位移曲线数据库, 并采用与 Yeoh 模型参数相关的三次多项式对载荷-位移曲线回归分析得到本构模型参数.

关于超弹性材料的压入法多属于经验或半经验性质, 至今尚无公认的、得到大量试验验证的成熟方法. 本文基于能量密度中值等效原理^[25-26], 提出描述 P 、 h 和 Mooney-Rivlin 模型参数之间关系的半解析超弹性压入模型并进行有限元正反向验证, 进而提出用于测试超弹性材料本构关系的压入试验方法, 并对 3 种橡胶材料进行压入试验, 将压入试验获得的本构关系结果与拉伸试验结果进行比对验证.

1 半解析超弹性压入模型 SHIM

1.1 Mooney-Rivlin 模型的应力应变形式

在复杂应力应变条件下, 超弹性材料的应力应变关系由第二 Piola-Kirchhoff 应力 σ_{ij} 和 Green 应变 ε_{ij} 来表示为

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial u}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial u}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial u}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2)$$

式中 I_1, I_2, I_3 为变形张量的 3 个不变量. 对于各向同性、不可压缩超弹性材料, $I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1$, 根据第二 Piola-Kirchhoff 应力与 Cauchy 应力之间关系^[27-28], 可得主应力 τ_i 与主伸长比 λ_i 之间的关系为

$$\tau_i = 2 \left(\lambda_i^2 \frac{\partial u}{\partial I_1} - \lambda_i^{-2} \frac{\partial u}{\partial I_2} \right) + P, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

式中, P 为静水压力. 由于主伸长比 λ_i 与主应变 ε_i 指数关联, 故式 (3) 表征了 RVE 的应力-应变关系.

单轴应力应变条件下, $\tau_2 = \tau_3 = 0$, $\lambda_2^2 = \lambda_3^2 = \lambda_1^{-1}$ 进而通过求应力差 $\tau_1 - \tau_2$ 消除静水压力可得

$$\tau_1 = 2 \left(\lambda_1^2 - \lambda_1^{-1} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial I_1} + \lambda_1^{-1} \frac{\partial u}{\partial I_2} \right) \quad (4)$$

对于 Mooney-Rivlin 超弹性材料本构模型, 式 (4) 可写为

$$\tau_1 = 2 \left(\lambda_1^2 - \lambda_1^{-1} \right) \left(C_{10} + \lambda_1^{-1} C_{01} \right) \quad (5)$$

由真应力 τ 与工程应力 σ_g 关系: $\tau = \lambda \sigma_g$, 令 $\lambda_1 = \lambda$, $\tau_1 = \tau$, 则由式 (5) 可得

$$\sigma_g = 2 \left(\lambda - \lambda^{-2} \right) \left(C_{10} + \lambda^{-1} C_{01} \right) \quad (6)$$

式中, $\lambda = e^\varepsilon$ 通过单轴拉伸试验获取被测材料的 σ_g - λ 曲线, 将 $\sigma_g/[2(\lambda - \lambda^{-2})]$ 作为纵坐标, λ^{-1} 作为横坐标做出两者关系曲线并进行线性回归, 则截距和斜率分别为 Mooney-Rivlin 模型的两个参数: C_{10} 和 C_{01} .

1.2 基于能量密度等效方法的半解析压入模型

由积分中值定理, 受载固体的有效变形域 Ω 内必存在一点 M , 在 M 处 RVE 的应变能密度 u_M 与 Ω 域的平均应变能密度相等, 即

$$u_M = \frac{U}{V_{\text{eff}}} = \frac{\iiint_{\Omega} u(x, y, z) dV}{V_{\text{eff}}} \quad (7)$$

式中, U 为变形域的总应变能, V_{eff} 为有效变形域体积, 则按 Mooney-Rivlin 模型, M 点处 RVE 的应变能密度表为

$$u_M = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (8)$$

由式 (7) 和式 (8) 可得

$$U = u_M V_{\text{eff}} = [C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3)] V_{\text{eff}} \quad (9)$$

以特征体积 D^3 使上式有效体积无量纲化, 则上式可化为

$$\left. \begin{aligned} U &= (C_{10}f_1 + C_{01}f_2) D^3 \\ f_1 &= (I_1 - 3) \frac{V_{\text{eff}}}{D^3} \\ f_2 &= (I_2 - 3) \frac{V_{\text{eff}}}{D^3} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中, 特征长度 D 在球压入时取为压头直径, 平面压入时取为圆柱压头直径, 锥压入时 D 取为特征压入深度 h_c . 假设无量纲变形量 f_1, f_2 与无量纲位移 h/D 之间满足幂律关系, 即

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= k_1 \left(\frac{h}{D} \right)^{k_0} \\ f_2 &= k_2 \left(\frac{h}{D} \right)^{k_0} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

且假设变形系数 k_1, k_2 及变形指数 k_0 均为与压入的压头类型相关但与材料无关的常数. 将 f_1, f_2 的表达式代入式 (10) 可得

$$U = (k_1 C_{10} + k_2 C_{01}) D^3 \left(\frac{h}{D} \right)^{k_0} \quad (12)$$

对于压入问题, 由能量守恒可得

$$U = W = \int P dh \quad (13)$$

式中 W 为外力功. 结合式 (12) 和式 (13), 以 h 对 U 求导, 并无量纲化, 可得 P 与 h 的关系

$$\left. \begin{aligned} P &= P^* \left(\frac{h}{D} \right)^{k_0-1} \\ P^* &= C D^2 \\ C &= k_0 (k_1 C_{10} + k_2 C_{01}) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中加载指数 k_0 为与加载方式相关、与材料无关的常数, 加载系数 C 为与材料和加载方式相关的常数. 该式称为半解析超弹性压入模型 SHIM (semi-theoretical hyperelastic-material indentation model).

基于式 (14), 由单压头的 P - h 压入曲线可回归得到加载系数 C , Mooney-Rivlin 模型的双参数 C_{10} 和 C_{01} 仅由独立的 C 值无法求解. 须根据两种不同类型压头的 P - h 压入曲线通过以下两式

$$\left. \begin{aligned} C &= k_0 (k_1 C_{10} + k_2 C_{01}) \\ C' &= k'_0 (k'_1 C_{10} + k'_2 C_{01}) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

实现 Mooney-Rivlin 模型的双参数 C_{10} 和 C_{01} 求解. 式 (15) 中 C 与 C' 分别对应两种压头的 P - h 压入曲线的加载系数.

1.3 k_0, k_1, k_2 的有限元确定方法

幂律方程式 (11) 的系数 k_1, k_2 和指数 k_0 均为与压头类型相关的常数, 可通过 FEA 确定. 由于式 (14) 为无量纲方程, 故针对球压头、圆柱平面压头可选

择特定压头尺寸以及针对锥压头选择特定角度进行压入变形分析. 选定球压头、圆柱平面压头直径均为 2 mm, 以及特征压入深度 h_c 为 0.8 mm 时半锥角分别为 $53^\circ, 60^\circ, 65^\circ, 70.3^\circ, 75^\circ$ 锥压头进行有限元分析确定 k_0, k_1, k_2 .

假设受压试样的材料本构关系符合 Mooney-Rivlin 模型律, 应用有限元分析软件 Ansys14.5 对如图 2 所示的球、平面、锥压入的轴对称网格模型完成有限元计算. Mooney-Rivlin 模型参数 C_{10} 和 C_{01} 取值分别满足 $C_{10} \in (0.01, 2)$ MPa 和 $C_{01} \in (0.1, 2)$ MPa, 网格模型采用 Plane 182 平面单元, 试样的受压接触面使用 Contact 172 接触单元, 并在接触区域采用高密度网格, 而在离接触区域稍远处用较低密度网格.

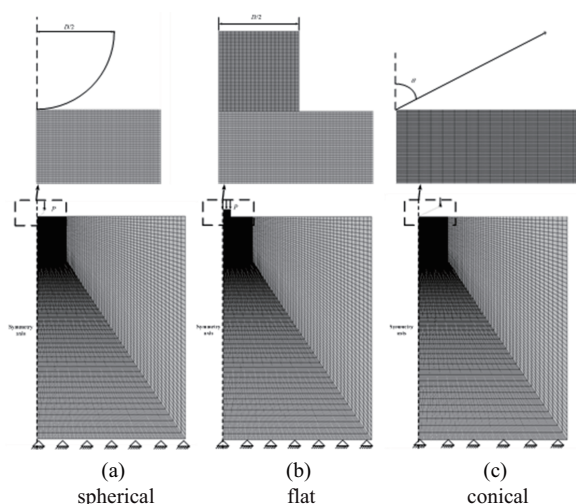


图 1 有限元轴对称模型

Fig. 1 The axisymmetric FEA indentation model

对符合 $C_{10} \in (0.01, 2)$ MPa 的 C_{10} 分别取 0.01, 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2 MPa 及符合 $C_{01} \in (0.1, 2)$ MPa 的 C_{01} 分别取 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2 MPa, 共计 30 种材料进行 FEA 计算得到 3 类压入下的 P - h 压入曲线, 通过式 (14) 分别确定 C , 得到球、平面、锥 3 类压入下的 3 组方程, 进而通过简单回归可得到球、平面压入下 SHIM 参数 k_0, k_1 和 k_2 如表 1 所示, 特征压入深度 h_c 为 0.8 mm 时不同角度锥压入下 SHIM 参数 k_0, k_1 和 k_2 如表 2 所示.

表 1 球压入与平面压入下 SHIM 参数

Table 1 Parameters of SHIM for spherical and flat indentation

Indenter	k_0	k_1	k_2
sphere	2.50	2.66	3.02
flat	2.00	3.92	4.21

表 2 锥压入下 SHIM 参数

Table 2 Parameters of SHIM for conical indentation

Half cone angle/(°)	k_1	k_2	k_0
53	2.18	2.51	
60	2.86	3.17	
65	3.51	3.84	3.00
70.3	4.74	5.05	
75	6.38	6.72	

由表 1 可见, k_0 是规则的常数, 特别在平面压入下 $k_0 = 2$, 即 P - h 压入曲线呈线性; 对于球压入及平面压入, SHIM 参数与直径无关.

由表 2, 对于锥压入, 不同半锥角下 SHIM 变形系数 k_1, k_2 不同, 但变形指数 k_0 均为 3, 即锥压入 P - h 关系符合抛物律. 图 2 表明, k_1, k_2 与半锥角余弦值 $\cos\theta$ 关系之间符合幂律

$$k_{i,i=1,2} = \beta_{i1}(\cos\theta)^{\beta_{i2}} \tag{16}$$

式中, 系数 β_{11}, β_{21} 和指数 β_{12}, β_{22} 由表 3 给出.

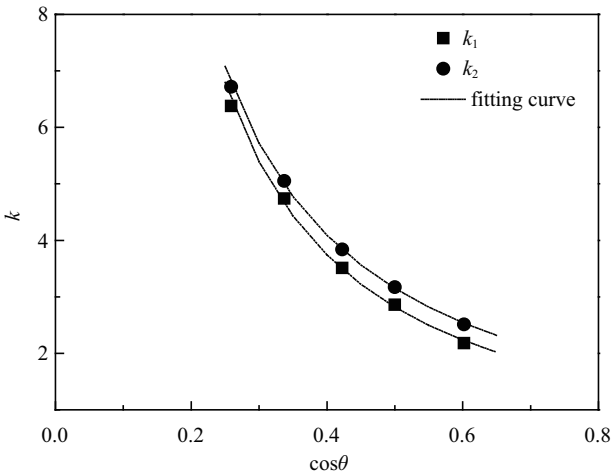


图 2 变形系数 k_1, k_2 随 $\cos\theta$ 的变化曲线

Fig. 2 Variations of deformation coefficient k_1, k_2 with $\cos\theta$

表 3 变形系数 k

Table 3 Deformation coefficient k

Deformation coefficient	i	β_{i1}	β_{i2}
$k_{i(i=1,2)} = \beta_{i1}(\cos\theta)^{\beta_{i2}}$	1	1.17	-1.27
	2	1.40	-1.17

2 有限元验证

2.1 向验证: 压入载荷-深度关系比对

对 1.3 节计算中采用的 30 种材料本构关系参数, 可通过 SHIM 预测得到材料分别在 3 类压头压入下

的 P - h 压入曲线, 图 3 示出了 SHIM 预测的 P/P^* - h/D 压入曲线与 FEA 分析曲线, 可见 30 种材料条件下两者之间密切吻合, SHIM 有很好的 P - h 压入曲线预测精度, 并有很强的材料普适性.

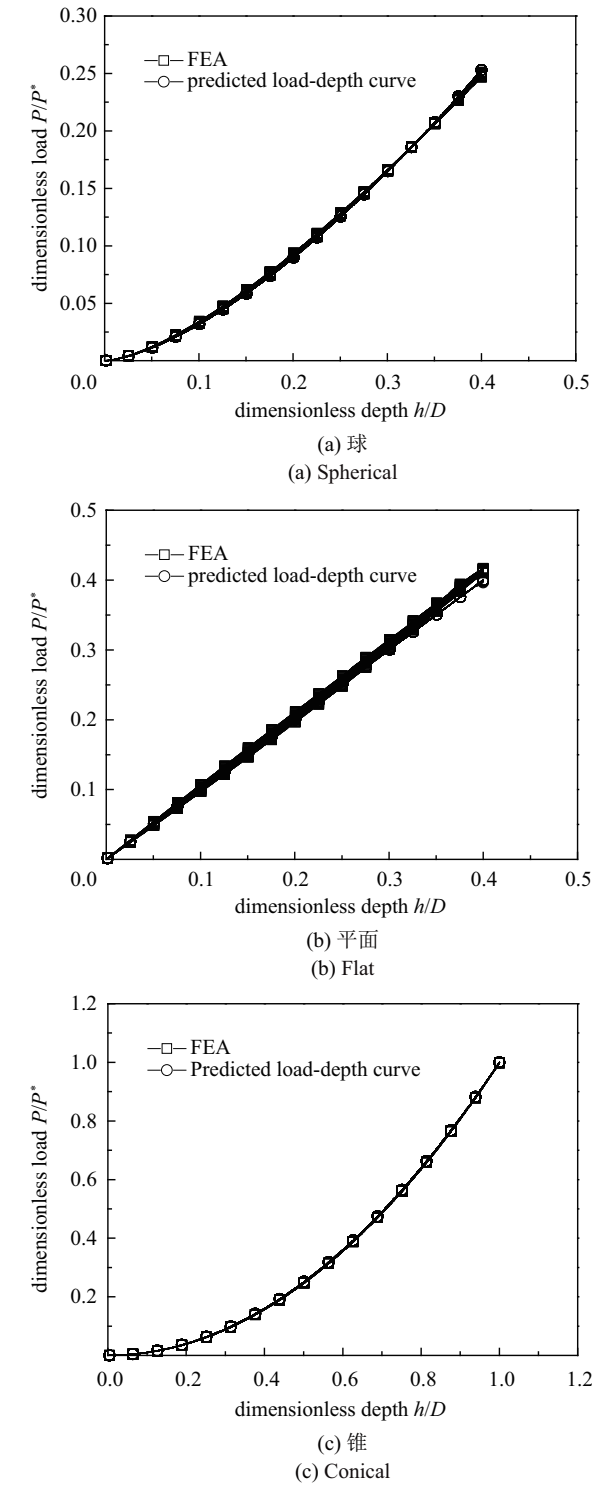


图 3 预测 P - h 压入曲线与 FEA 结果比较

Fig. 3 Comparisons of predicted P - h indentation curves and those from FEA

2.2 反向验证: 应力-伸长比关系对比

对 1.3 节的 30 种材料 FEA 分析得到的球、平面、锥压入下 $P-h$ 压入曲线, 通过 3 类压头两两组合压入的方式, 由式 (15) 分别得到 3 组加载系数: C, C' , 进而可分别求得 3 组 Mooney-Rivlin 模型参数: C_{10} ,

C_{01} , 再根据式 (6) 分别得到 3 组本构关系曲线 (应力-伸长比曲线). 图 4 示出了预测的 3 组本构关系曲线与 FEA 条件曲线, 可见 30 种材料条件下各类预测曲线之间、与 FEA 条件曲线之间均密切吻合, SHIM 有很好的单轴本构关系预测精度.

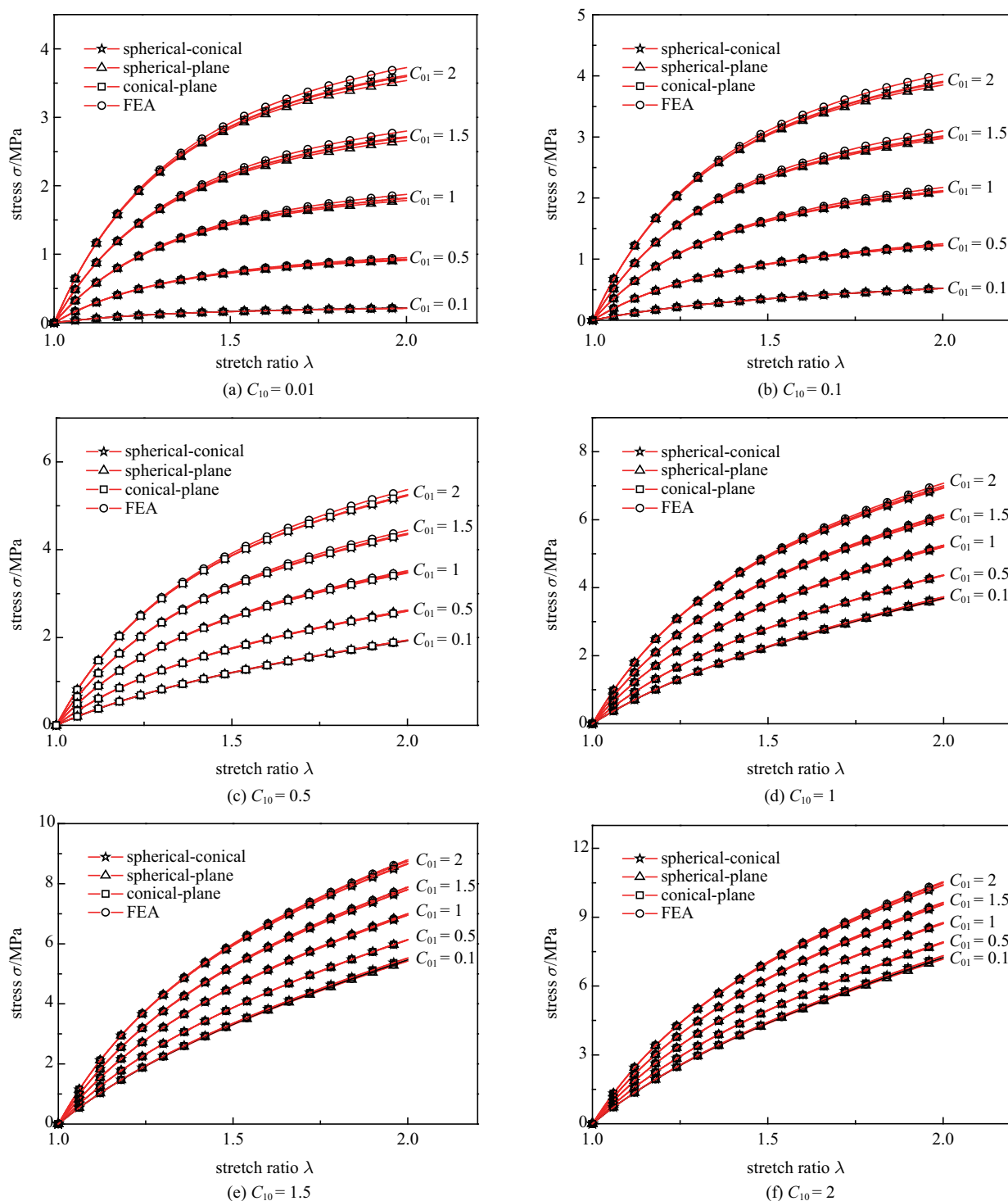


图 4 预测应力-伸长比关系与 FEA 结果比较

Fig. 4 Comparisons of predicted stress-stretch ratio curves and the FEA results

3 试验方法与验证

3.1 拉伸与压入条件

对天然橡胶 (NR)、氯丁橡胶 (CR)、丁基橡胶 (IIR) 进行单轴拉伸试验并进行球、平面、锥压入试验。

基于国家标准 GB/T 528—2009^[29] 对 3 种橡胶材料进行单轴拉伸试验如图 5 所示, 采用标准裁刀将购置的 2 mm 厚橡胶板加工成标准哑铃状试样, 采用 CARE 原位双向拉压试验机以 2 mm/s 加载速率完成单轴拉伸试验。



图 5 单轴拉伸试验装置

Fig. 5 Uniaxial tension test equipment

采用图 6 所示的 IMTSC 型压入仪完成压入试验, 压头分别选取直径 2 mm 球形及圆柱形平面压头和半锥角 70.3° 锥形压头, 试样尺寸 40 mm × 40 mm × 30 mm, 试验加载速率为 3 μm/s^[30], 3 类压头的最大压入深度 h 均为 0.8 mm, 每种材料试样进行两次单压头压入试验。

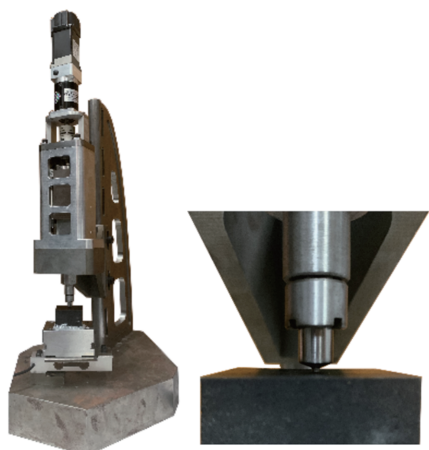


图 6 压入试验装置

Fig. 6 Indentation test equipment

3.2 双压试验方法与试验比对

由式 (14), 对球、平面、锥单压头压入下的 $P-h$ 试验曲线进行回归可得加载系数 C_S 、 C_C 、 C_F , 进而可得它们关于 Mooney-Rivlin 模型双参数 C_{10} 和 C_{01} 的表达式

$$\left. \begin{aligned} C_S &= k_0(k_1 C_{10} + k_2 C_{01})|_{\text{spherical}} \\ C_F &= k_0(k_1 C_{10} + k_2 C_{01})|_{\text{flat}} \\ C_C &= k_0(k_1 C_{10} + k_2 C_{01})|_{\text{conical}} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

对式 (17) 中 3 个方程任意两两组合, 即可求解 C_{10} 和 C_{01} ; 此外, 不同半锥角条件下也可形成两组独立的加载系数求解方程。由球、平面、锥单压头压入两两组合及不同半锥角下的锥-锥压头压入下获取 Mooney-Rivlin 模型参数的试验方法统称为双压试验方法 (indentation method due to dual indenters, IMDI)。此外, 不同直径的双球压头压入或双圆柱平面压头压入因 k_1, k_2 不随压头直径变化的自相似性, 而不能采用同类压头压入配对方式获得材料本构关系。

图 7 给出了 3 种材料的单轴拉伸载荷 P -位移 l 试验曲线, 由单轴拉伸条件下伸长比 λ 和应力 σ 的定义

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{l + l_0}{l_0} \\ \sigma &= \frac{P}{A} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

可求出拉伸过程中 λ 和 σ 的试验数据。式 (18) 中 l_0 为试样原长, l 为拉伸试样等直段位移。图 8 给出了应力-伸长比曲线。

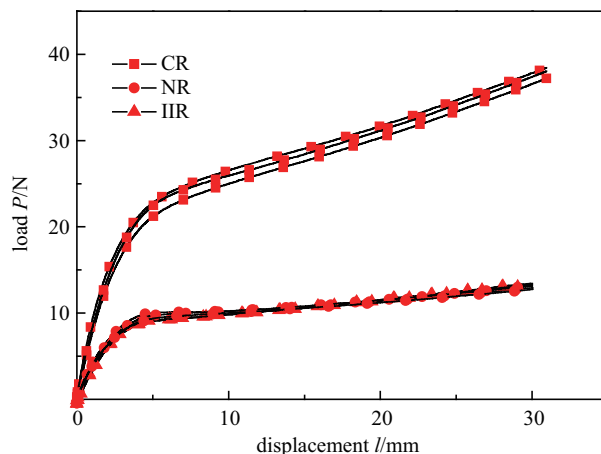


图 7 单轴拉伸载荷-位移曲线

Fig. 7 Uniaxial tension load-displacement curve

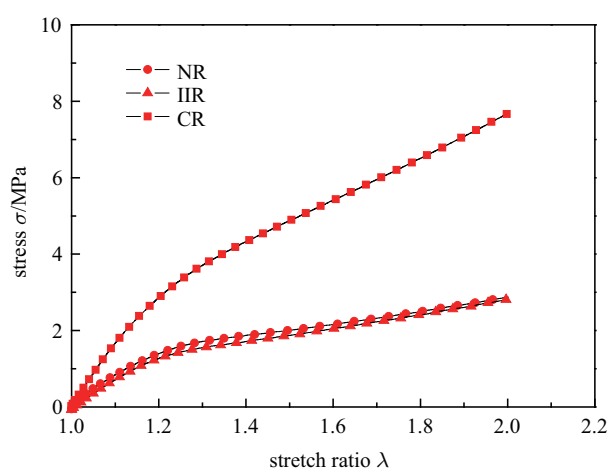
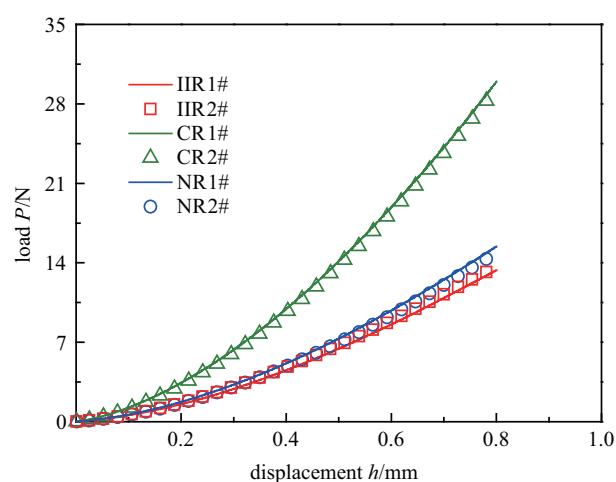


图8 单轴应力-伸长比曲线

Fig. 8 Uniaxial stress-stretch ratio curve

图9示出了球、平面、锥压头独立压入试验下3种材料的 $P-h$ 压入试验曲线,对获得的 $P-h$ 压入试验曲线进行幂律回归,为消除系统误差,平

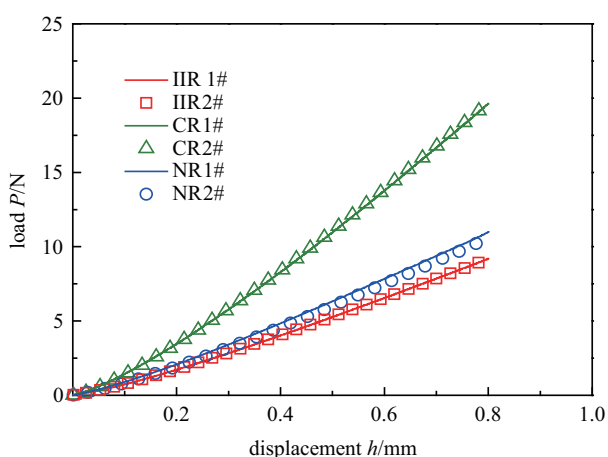


(c) 锥

(c) Conical

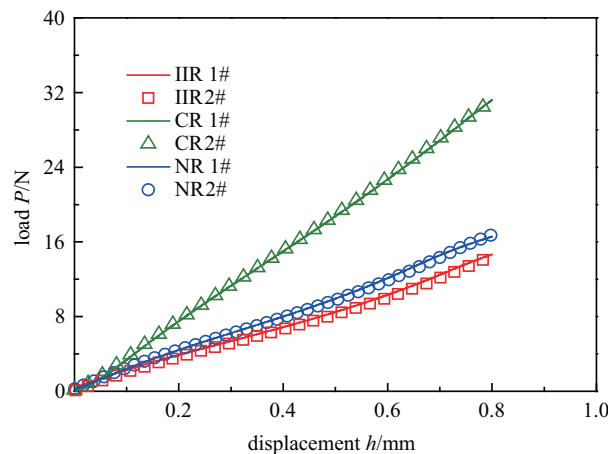
图9 压入载荷-深度曲线

Fig. 9 Indentation load-depth curve



(a) 球

(a) Spherical



(b) 平面

(b) Flat

移 $P-h$ 压入试验曲线,直至回归的 $P-h$ 压入试验曲线的指数 k_0 与表1或表2中的 k_0 相同.针对 $P/P^*-h/D$ 试验曲线,球压入时选 $h/D \in [0.15, 0.4]$ 数据段、平面压入时选 $h/D \in [0.1, 0.4]$ 数据段、锥压入时选 $h/D \in [0.15, 0.4]$ 数据段进行回归分别得到加载系数 C_S, C_F, C_C .

图10给出了使用双压试验方法IMDI对球、平面、锥压入两两结合预测的材料本构关系及单轴拉伸试验结果,可见IMDI预测超弹性材料本构关系之间及与单轴拉伸试验结果之间均吻合良好.

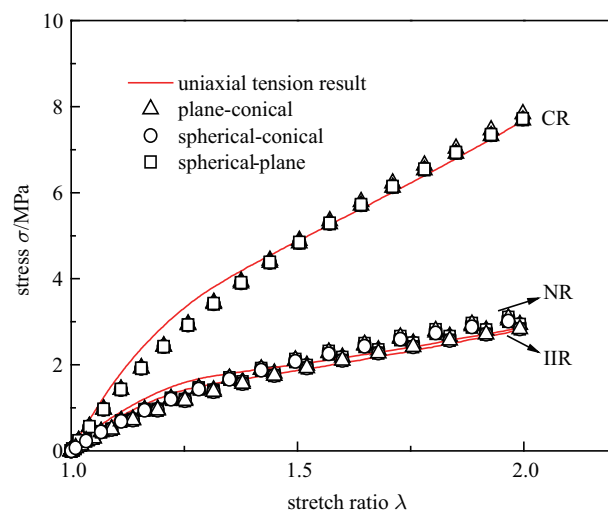


图10 预测应力-伸长比关系曲线与单轴拉伸结果对比

Fig. 10 Comparison between predicted stress-stretch ratio curve with the uniaxial tensile results

4 结 论

(1) 基于能量密度等效原理, 提出了球、平面、锥 3 类压头独立压入条件下, 描述载荷、深度、Mooney-Rivlin 关系参数、几何尺寸之间关系的压入模型 SHIM, SHIM 正向预测的 $P/P^* - h/D$ 压入曲线与 FEA 分析曲线之间密切吻合; 球、平面、锥压头两两组合压入下 SHIM 反向预测的 3 组本构关系曲线之间及与 FEA 条件本构关系曲线之间均密切吻合。

(2) 提出了由球、平面、锥单压头两两组合压入下及具有不同半锥角的双锥压头压入下获取 Mooney-Rivlin 模型参数的双压试验方法。

(3) 对 3 种橡胶材料分别进行单轴拉伸试验及球、平面、锥压入试验, 结果表明, 通过双压试验方法预测得到的本构关系曲线均与单轴拉伸试验结果具有良好的一致性。

参 考 文 献

- 1 李晓芳, 杨晓翔. 橡胶材料的超弹性本构模型. 弹性体, 2005, 15(1): 50-58 (Li Xiaofang, Yang Xiaoxiang. A review of elastic constitutive model for rubber materials. *China Elastomerics*, 2005, 15(1): 50-58 (in Chinese))
- 2 魏志刚, 陈海波. 一种新的橡胶材料弹性本构模型. 力学学报, 2019, 51(2): 473-483 (Wei Zhigang, Chen Haibo. A new elastic model for rubber-like materials. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(2): 473-483 (in Chinese))
- 3 邹广平, 张冰, 唱忠良等. 弹簧 - 金属丝网橡胶组合减振器迟滞力学模型及实验研究. 力学学报, 2018, 50(5): 1125-1134 (Zou Guangping, Zhang Bing, Chang Zhongliang, et al. Hysteresis mechanical model and experimental study of spring metal-net rubber combination damper. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(5): 1125-1134 (in Chinese))
- 4 Treloar LRG. The elasticity of a network of long-chain molecules. *Transactions of the Faraday Society*, 1943, 39: 36-41
- 5 Treloar LRG. Stress-strain data for vulcanized rubber under various types of deformation. *Rubber Chemistry and Technology*, 1944, 17(4): 813-825
- 6 Mooney M. A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, 1940, 11(9): 582-592
- 7 Rivlin R S. Large elastic deformations of isotropic materials IV. Further developments of the general theory. *Phil Trans R Soc Lond A*, 1948, 241(835): 379-397
- 8 张泰华. 微/纳米力学测试技术: 仪器化压入的测量, 分析, 应用及其标准化. 北京: 科学出版社, 2013 (Zhang Taihua. *Micro/Nano Mechanical Testing Techniques: Instrumental Indentation Measurement, Analysis, Application and Standardization*. Beijing: Science Press, 2013 (in Chinese))
- 9 Haggag FM. In-situ measurements of mechanical properties using novel automated ball indentation system//Small Specimen Test Techniques Applied to Nuclear Reactor Vessel Thermal Annealing and Plant Life Extension. ASTM International, 1993
- 10 Byun TS, Hong JH, Haggag FM, et al. Measurement of through-the-thickness variations of mechanical properties in SA508 Gr. 3 pressure vessel steels using ball indentation test technique. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 1997, 74(3): 231-238
- 11 Ahn JH, Kwon D. Derivation of plastic stress-strain relationship from ball indentations: Examination of strain definition and pileup effect. *Journal of Materials Research*, 2001, 16(11): 3170-3178
- 12 Cao YP, Lu J. A new method to extract the plastic properties of metal materials from an instrumented spherical indentation loading curve. *Acta Materialia*, 2004, 52(13): 4023-4032
- 13 Dean J, Clyne TW. Extraction of plasticity parameters from a single test using a spherical indenter and FEM modelling. *Mechanics of Materials*, 2017, 105: 112-122
- 14 GB/T 37782—2019. 金属材料压入试验强度、硬度和应力-应变关系的测定 (GB/T 37782—2019. Metallic materials-indentation test-determination of strength, hardness and stress-strain curve (in Chinese))
- 15 Chen H, Cai L, Bao C. Equivalent-energy indentation method to predict the tensile properties of light alloys. *Materials & Design*, 2019, 162: 322-330
- 16 张志杰, 蔡力勋, 陈辉等. 金属材料的强度与应力-应变关系的球压入测试方法. 力学学报, 2019, 51(1): 159-169 (Zhang Zhijie, Cai Lixun, Chen Hui, et al. Spherical indentation method to determine stress-strain relations and tensile strength of metallic materials. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(1): 159-169 (in Chinese))
- 17 Zhang MG, Cao YP, Li GY, et al. Spherical indentation method for determining the constitutive parameters of hyperelastic soft materials. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 2014, 13(1): 1-11
- 18 Pan Y, Zhan Y, Ji H, et al. Can hyperelastic material parameters be uniquely determined from indentation experiments? *Rsc Advances*, 2016, 6(85): 81958-81964
- 19 Giannakopoulos AE, Triantafyllou A. Spherical indentation of incompressible rubber-like materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2007, 55(6): 1196-1211
- 20 Chen Z, Scheffer T, Seibert H, et al. Macroindentation of a soft polymer: Identification of hyperelasticity and validation by uni/biaxial tensile tests. *Mechanics of Materials*, 2013, 64:111-127
- 21 Oliver WC, Pharr GM. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments. *Journal of Materials Research*, 1992, 7(6): 1564-1583
- 22 Le Saux V, Marco Y, Bles G, et al. Identification of constitutive model for rubber elasticity from micro-indentation tests on natural rubber and validation by macroscopic tests. *Mechanics of Materials*, 2011, 43(12): 775-786
- 23 Lee HY, Kim DW, Lee JH, et al. Software and hardware development of micro-indenter for material property evaluation of hyperelastic rubber. *Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers A*, 2004, 28(6): 816-825
- 24 Song JU, Kim MS, Jeong GH, et al. A simple method for the estimation of hyperelastic material properties by indentation tests. *Journal of the Computational Structural Engineering Institute of Korea*, 2019, 32(5): 273-278

- 25 Chen H, Cai L. Unified elastoplastic model based on a strain energy equivalence principle. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, 52: 664-671
- 26 Chen H, Cai L. An elastoplastic energy model for predicting the deformation behaviors of various structural components. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, 68: 405-421
- 27 石昌帅, 陈凯林, 祝效华. 螺杆定子衬套热老化本构参数及内腔变形规律研究. *润滑与密封*, 2019, 44(4): 33-39 (Shi Changshuai, Chen Kailin, Zhu Xiaohua. Research on thermal ageing constitutive parameters and inner cavity deformation of screw stator bushings. *Lubrication Engineering*, 2019, 44(4): 33-39 (in Chinese))
- 28 李雪冰, 危银涛. 一种改进的 Yeoh 超弹性材料本构模型. *工程力学*, 2016, 33(12): 38-43 (Li Xuebing, Wei Yintao. An improved Yeoh constitutive model for hyperelastic material. *Engineering Mechanics*, 2016, 33(12): 38-43 (in Chinese))
- 29 GB/T 528—2009. 硫化橡胶或热塑性橡胶拉伸应力应变性能的测定 (GB/T 528-2009. Rubber, vulcanized or thermoplastic-Determination of tensile stress-strain properties (in Chinese))
- 30 Hyun HC, Lee JH, Kim M, et al. A spherical indentation technique for property evaluation of hyperelastic rubber. *Journal of Materials Research*, 2012, 27(20): 2677-2690