

平纹机织碳纤维复合材料的多尺度 随机力学性能预测研究¹⁾

许灿^{*,†} 朱平^{*,†,2)} 刘钊^{**} 陶威^{*,†}

^{*}(上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240)

[†](上海市复杂薄板结构数字化制造重点实验室, 上海 200240)

^{**}(上海交通大学设计学院, 上海 200240)

摘要 平纹机织碳纤维复合材料在结构上具有多尺度特性和空间随机性. 同时, 组分材料会因存储条件和组成相成分、批次的不同导致力学性能有所差异. 当考虑各尺度结构和组分性能参数不确定性进行随机力学性能预测时, 存在以下两个难点: 一是随机变量众多, 使得对不确定性传递方法的精度和效率提出了要求; 二是由于随机参数之间存在高维相关性, 需要建立高精度的相关性模型. 针对以上问题, 本文提出了基于混沌多项式展开和 Vine Copula 的平纹机织复合材料多尺度随机力学性能预测方法, 综合考虑了平纹机织碳纤维复合材料微观及介观尺度的材料、结构随机参数, 基于自下而上层级传递的策略逐尺度地研究力学性能不确定性. 该方法采用 Vine Copula 理论构造相关随机变量的高维联合概率分布, 并运用非嵌入式混沌多项式展开法实现不确定性传递. 结果显示, 本方法构造的相关性模型几乎与原模型一致, 且能够高效准确地实现各尺度力学性能的随机预测.

关键词 碳纤维复合材料, 多尺度不确定性, 随机预测, 力学性能, 多项式混沌展开

中图分类号: O302, TH122 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-20-002

RESEARCH ON MULTISCALE STOCHASTIC MECHANICAL PROPERTIES PREDICTION OF PLAIN WOVEN CARBON FIBER COMPOSITES¹⁾

Xu Can^{*,†} Zhu Ping^{*,†,2)} Liu Zhao^{**} Tao Wei^{*,†}

^{*}(State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration, Shanghai 200240, China)

[†](Shanghai Key Laboratory of Digital Manufacture for Thin-walled Structures, Shanghai 200240, China)

^{**}(School of Design, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract Plain woven carbon fiber composites have multi-scale characteristics and spatial randomness in structure. Meanwhile, the mechanical properties of the component materials vary due to different storage conditions, composition phase components and batches. When the stochastic mechanical properties of plain woven carbon fiber composites are

2020-01-02 收稿, 2020-02-24 录用, 2020-02-24 网络版发表.

1) 国家自然科学基金重点项目(汽车产业创新发展联合基金)(U1864211), 国家自然科学基金项目(11772191)和国家青年基金项目(51705312)资助.

2) 朱平, 教授, 主要研究方向: 多学科优化与不确定性优化设计、轻量化设计与制造. E-mail: pzhu@sjtu.edu.cn

引用格式: 许灿, 朱平, 刘钊, 陶威. 平纹机织碳纤维复合材料的多尺度随机力学性能预测研究. 力学学报, 2020, 52(3): 763-773

Xu Can, Zhu Ping, Liu Zhao, Tao Wei. Research on multiscale stochastic mechanical properties prediction of plain woven carbon fiber composites. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(3): 763-773

predicted with considering of the parameter uncertainty at different scales, there are two main difficulties: first, the large number of random variables makes the accuracy and efficiency of the uncertainty propagation method required; second, a high-precision correlation model is needed to be established because of multi-dimensional correlations. To solve above problems, this paper proposes a multi-scale prediction method based on polynomial chaos expansion and vine Copula for the stochastic mechanical properties of plain woven composites. The random parameters of materials and structures at the microscopic and mesoscopic scales of the plain woven composites are taken into account, and the uncertainties of mechanical properties are studied scale by scale based on the bottom-up hierarchical propagation strategy. In this method, Vine Copula theory is used to construct the multi-dimensional joint probability distribution of correlated random variables, and the non-embedded polynomial chaos expansion is used to realize uncertainty propagation. Results show that the correlation coefficients of the dependence model constructed by the proposed method are almost the same as that of original data and the stochastic prediction of mechanical properties at different scales are realized efficiently and accurately.

Key words carbon fiber composites, multiscale uncertainty, stochastic prediction, mechanical properties, polynomial chaos expansion

引 言

碳纤维增强聚合物基 (carbon fiber reinforced polymer, CFRP) 复合材料, 简称碳纤维复合材料, 具有密度低、比刚度高、比强度高、可设计性强等优点, 能够很好地实现结构的轻量化和高性能设计^[1]. 作为一种新型轻质复合材料, 碳纤维复合材料因其优异的力学性能在航空航天、汽车、船舶等行业得到了广泛的应用^[2-3]. 平纹机织 CFRP 的制备过程包括编织、铺层、浸润和固化等, 得到的材料在结构上具有多尺度特征. 在 CFRP 的制备过程中, 由于存储条件和组成相成分、批次的不同导致组成相材料性能有所差异, 同时由于织物和预浸织布的生产、存储和搬运等过程导致纺织结构的变动. 这种材料和结构的不确定性反映到 CFRP 性质上表现为各尺度力学性能均有一定的随机性, 并最终影响材料的宏观性能^[4-7]. 因此, 有必要发展可靠的 CFRP 随机力学性能预测方法, 充分考虑各尺度材料和结构参数的不确定性, 研究其对材料宏观力学性能预测结果的影响作用.

为了实现考虑随机性的复合材料力学性能的准确预测, 国内外学者开展了广泛的研究工作. 与有限元技术相结合的计算细观力学方法可以在各个尺度上建立考虑随机性的精细仿真模型来进行力学性能预测^[8-11]. 在纤维束尺度上, 目前研究主要是通过纤维角度和位移等参数的扰动来生成满足给定参数组合和约束条件下不规则排列结构. Zhu 等^[12] 提出了基于序列随机扰动算法生成纤维随机分布结构,

并基于有限元模型研究了纤维随机分布对纤维束力学性能的影响. 类似的研究还包括 Yang 等^[13] 提出的随机序列展开方法, Zhang 等^[14] 提出的结合随机分布和完全弹性碰撞的生成算法. 在介观尺度上, 主要是基于图像分析与几何参数统计学描述方法相结合的方法生成具有结构随机性的代表性体积单元 (representative volume element, RVE) 进行仿真分析. Bale 等^[15] 基于微计算机断层扫描技术得到三维图像并对纤维束位置和形状进行了统计学描述. Blacklock 等^[16] 则在此基础上重构了具有随机性的 RVE 模型. Zhu 等^[17] 则进一步考虑了参数之间的相关性, 提出了基于相关性混合高斯随机序列的平纹机织 CFRP 的 RVE 重构算法.

基于计算细观力学的方法本质上是建立多个能够满足统计学表征的有限元模型并统计仿真分析的结果, 因此计算代价过高. 而解析细观力学方法由于具有较高的计算效率, 在进行考虑不确定性的预测研究时具有很大的优势. Chakraborty 等^[18] 采用多项式相关函数展开实现了复合材料层合板的随机自由振动分析. 考虑到微观结构的不确定性, 随机有限元^[19] 被采用进行有效的预测. Cui 等^[20] 采用 Copula 函数表征复合材料中的纤维铺设角度和材料参数之间的相关性, 并基于摄动法进行不确定性分析. Mehrez 等^[21] 提出了基于混沌多项式展开 (polynomial chaos expansion, PCE) 的层级式传递方法得到宏观材料力学性能的不确定性. Xu 等^[22] 则在层级传递的过程中进一步考虑了分布的真实形式和分布之间的高维

相关性, 并应用于三维正交机织复合材料的力学性能预测中。

现有的面向平纹机织 CFRP 的研究主要存在以下几个问题: 一是所考虑的随机参数不够全面, 大多研究仅考虑部分尺度的随机参数. 且采用的不确定性传递方法大多具有局限性: 随机有限元法, 作为一种嵌入式的不确定性算法, 对问题不具备很好的适应性; 摄动法则对概率分布形式具有要求; 二是在力学性能预测中对随机参数之间的相关性考虑不够充分. 针对以上这些问题, 本文提出一种基于 PCE 和 Vine Copula 的平纹机织 CFRP 随机力学性能预测方法, 该方法考虑了微观和介观尺度中不确定性材料、结构参数, 基于自下而上层级传递的策略逐层研究平纹机织 CFRP 的各尺度力学性能参数的不确定性. 所采用的非嵌入式 PCE 方法能够高效准确地实现不确定性地传递. 此外, Vine Copula 函数能准确构造相关随机参数之间的高维联合概率分布, 从而有效掌握相关性对性能响应的影响, 提高平纹机织 CFRP 力学性能参数预测的精度和可靠性。

1 确定性模型构建

采用解析细观力学方法实现平纹机织 CFRP 的多尺度确定性随机弹性力学性能预测, 该方法能充分考虑影响平纹机织 CFRP 力学性能的因素, 包括组分材料的力学性能、各尺度的几何参数、体积分数等^[23]. 尺度包括纤维丝尺度(微观尺度)、纤维束尺度(介观尺度)和单胞尺度(宏观尺度), 如图 1 所示. 该方法基于连续介质力学及均匀化理论, 采用自下而上多尺度式串行的策略逐级预测力学性能。

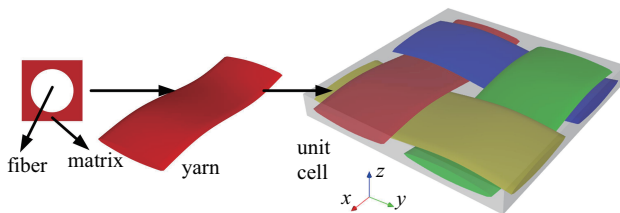


图 1 平纹机织 CFRP 多尺度特征

Fig. 1 Multiscale characteristics of plain woven CFRP

1.1 纤维束模型

平纹机织 CFRP 中, 每一根浸润过的纤维束都包含了嵌入在基体中的许多单向纤维, 浸润纤维束被

认为是单向复合材料. 若纤维束的纤维丝体积分数为 V_f , 则力学性能可由下述 Chamis 方程得到^[24]

$$\left. \begin{aligned} V_m &= 1 - V_f \\ E_{11} &= E_{11f}V_f + E_mV_m \\ E_{22} &= E_m \left[1 - \sqrt{V_f} (1 - E_m/E_{22f}) \right] \\ G_{12} &= G_m \left[1 - \sqrt{V_f} (1 - G_m/G_{12f}) \right] \\ G_{23} &= G_m \left[1 - \sqrt{V_f} (1 - G_m/G_{23f}) \right] \\ v_{12} &= v_{12f}V_f + v_mV_m, \quad v_{23} = E_{22}/(2G_{23}) - 1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, 下标 f 和 m 分别表示纤维丝和基体, V 表示体积分, E 表示弹性模量, G 表示剪切模量, ν 表示泊松比。

纤维丝的体积分数可以通过下式计算

$$V_f = S_f/(\pi ab/4), \quad S_f = N_{\text{fiber}}\pi d^2/4 \quad (2)$$

其中, S_f 表示纤维束中纤维丝的总截面面积, d 表示纤维丝直径, N_{fiber} 表示纤维束中纤维丝数量, a 和 b 分别表示纤维束的长轴和短轴长度, 如图 2 所示。

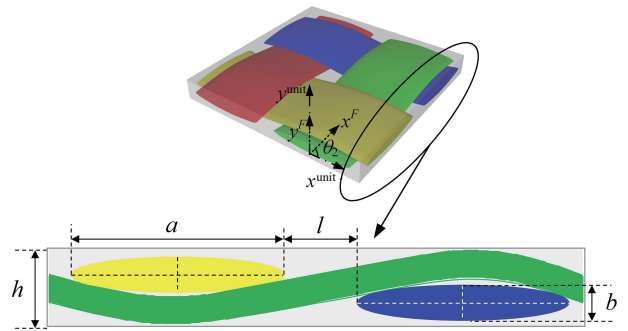


图 2 单胞截面

Fig. 2 Cross section of unit cell

由于纤维束通常被假设为横向各向同性的, 故其刚度矩阵可以定义为

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{22} - C_{23})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中, 刚度矩阵各元素可通过下式获得

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= (1 - \nu_{23}^2) E_{11}/A \\ C_{12} &= C_{13} = \nu_{12} (1 + \nu_{23}) E_{22}/A \\ C_{23} &= (\nu_{23} + \nu_{12}^2 E_{22}/E_{11}) E_{22}/A \\ C_{22} &= C_{33} = (1 - \nu_{12}^2 E_{22}/E_{11}) E_{22}/A \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{44} &= G_{23} = E_{22}/[2(1 + \nu_{23})] \\ C_{55} &= C_{66} = G_{12} \\ A &= (1 + \nu_{23})(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}^2) \frac{E_{22}}{E_{11}} \end{aligned} \right\} \quad (4b)$$

由于平纹机织 CFRP 的纤维束存在卷曲变形, 对于卷曲的纤维束, 如图 3 所示.

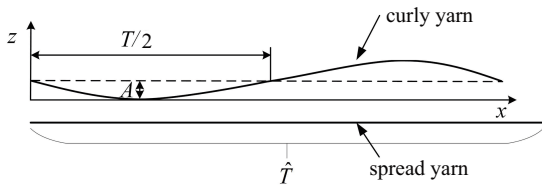


图 3 纤维束的正弦函数表达

Fig. 3 Sinusoidal expression for yarn

本文采用正弦函数来描述其构型

$$\hat{x} = A \sin(2\pi x/T) \quad (5)$$

式中, T 表示周期, A 表示幅度. 综合图 2 和图 3 可以得到 $T = 2(a + l)$, $A = (h - b)/2$. 将卷曲纤维束划分为无数的微段, 各微段沿纤维主方向均可视作单向纤维复合材料, 如图 4 所示, x^L 方向即为主方向.

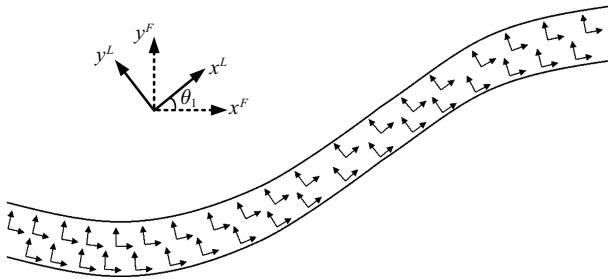


图 4 纤维束材料主方向

Fig. 4 Material principal orientation in yarn

定义第 N 微段在其局部坐标系下的刚度矩阵为 C_N^L

$$C_N^F = H_N C_N^L H_N^T \quad (6)$$

式中, 上标 L 表示微段纤维局部坐标系 (x^L, y^L) , 上标 F 表示纤维束坐标系 (x^F, y^F) , 上标 T 表示转置, H 为转换矩阵, 其求解公式为

$$H_N^T = \begin{bmatrix} h_1^2 & 0 & h_2^2 & 0 & 2h_1h_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2^2 & 0 & h_1^2 & 0 & -2h_1h_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_1 & 0 & h_2 \\ -h_1h_2 & 0 & h_1h_2 & 0 & h_1^2 - h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & h_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= 1/\sqrt{1 + \tan^2 \theta_1} \\ h_2 &= \tan \theta_1/\sqrt{1 + \tan^2 \theta_1} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中

$$\tan \theta_1 = 2\pi A/T \cos(2\pi x/T) \quad (9)$$

式中 θ_1 代表微段纤维局部坐标系与纤维束坐标系的夹角, 如图 4 所示. 在纤维束坐标系下, 纤维束的等效刚度矩阵可通过对各微段沿 x 方向进行积分来获得

$$C^F = 1/T \left(\int_0^T C_N^F dx \right) \quad (10)$$

1.2 单胞模型

对于 CFRP, 在宏观尺度上选取单胞来表征其宏观性能. 由于平面机织 CFRP 是由经纱和纬纱机织而成, 单胞整体的刚度矩阵可根据各纤维束的平均性能计算得到, 由于经纱和纬纱的方向不同, 需通过坐标转换, 将纤维束刚度矩阵转化为单胞坐标系下的纤维束刚度矩阵

$$C^{\text{unit}} = H^{\text{unit}} C^F H^{\text{unit}} \quad (11)$$

转换矩阵 H^{unit} 如下

$$H^{\text{unit}} = \begin{bmatrix} h_3^2 & h_4^2 & 0 & 0 & 0 & 2h_3h_4 \\ h_4^2 & h_3^2 & 0 & 0 & 0 & -2h_3h_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 & -h_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 & h_3 & 0 \\ -h_3h_4 & h_3h_4 & 0 & 0 & 0 & h_3^2 - h_4^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} h_3 &= \cos \theta_2 \\ h_4 &= \sin \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中, θ_2 代表纤维束坐标系 (x^F, y^F) 与单胞坐标系 $(x^{\text{unit}}, y^{\text{unit}})$ 的夹角, 如图 2 所示. 从而可得平纹机织 CFRP 的宏观刚度阵

$$C = 1/V_{\text{unit}} \{ C_{\text{warp}}^{\text{unit}} V_{\text{warp}} + C_{\text{weft}}^{\text{unit}} V_{\text{weft}} + C_{\text{m}}^{\text{unit}} V_{\text{m}}^{\text{unit}} \} \quad (14)$$

式中, V_{unit} 表示单胞的体积, 下标 warp 表示经纱, 下标 weft 表示纬纱, $V_{\text{m}}^{\text{unit}}$ 表示基体占单胞的体积分数.

由于纱线是卷曲的, 需要对其沿 x 方向的长度进行积分获得伸展的纤维束长度 \hat{T} , 如图 3 所示. 经纬纱和基体的体积分数可通过式 (15) 来获得

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{warp}} &= V_{\text{weft}} = \hat{T}\pi ab/4 \\ V_{\text{m}}^{\text{unit}} &= 1 - 2V_{\text{warp}} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

通过对宏观刚度矩阵进行求解, 可获得单胞的弹性模量、剪切模量和泊松比.

1.3 模型验证

本文所制备的平纹机织 CFRP 碳纤维丝和基体材料力学性能参数如表 1 所示, 碳纤维丝选用台丽碳纤维 TC33, 碳纤维以 3K 的形式集成碳纤维束. 基体选择 Huntsman 公司的环氧树脂, 牌号为 LY1564 SP, 对应的固化剂牌号为 Aradur 3486, 两者的体积比为 5:2. 采用真空导入工艺进行力学性能试验所用的平纹机织 CFRP 的成型. 通过上述工艺制备得到的 CFRP 的密度为 1.47 g/cm^3 .

表 1 碳纤维和基体基本力学性能参数

Table 1 Basic mechanical properties of carbon fiber and matrix

Component	$E_{11}/$ GPa	$E_{22}/$ GPa	ν_{12}	$G_{12}/$ GPa	$G_{23}/$ GPa
fiber	230	18.6	0.255	20.5	5.05
matrix	3.08	—	0.35	1.11	—

为了从宏观上探究 CFRP 的力学性能, 分别根据试验标准 ASTM D638^[25] 和 ASTM D7078^[26] 进行平纹机织 CFRP 的轴向拉伸和面内剪切试验, 试验样品如图 5 所示, 尺寸单位为 mm. 准静态轴向拉伸力学性能试验使用岛津 5 t EHF-UM 电液伺服疲劳试验机进行, 准静态面内剪切试验采用 SUNS 电子万能试验机. 所有试验均采用位移控制方式, 并根据样品的尺寸设定加载速率, 保证对应的工程应变率在 0.001 s^{-1} 范围. 每种试验均保证测量得到 5 个有效试验数据并取平均值. 最终试验得到的宏观轴向拉伸弹性模量为 60.89 GPa, 面内剪切模量为 3.63 GPa.

纤维丝和纤维束的几何参数通过对纤维束界面显微图像和 Micro-CT 图像 (如图 6 和图 7 所示) 进行数据统计可获得, 纤维丝的直径为 $d = 6.23 \mu\text{m}$, 纤维束的几何参数如表 2 所示. 表中平均值为统计得到的均值, 上下限值为统计得到的 $\pm 3\sigma$ 置信区域数值. 纤维丝占纤维束体积分数的均值为 65.32%, 纤维束占单胞体积分数的均值为 67.90%.

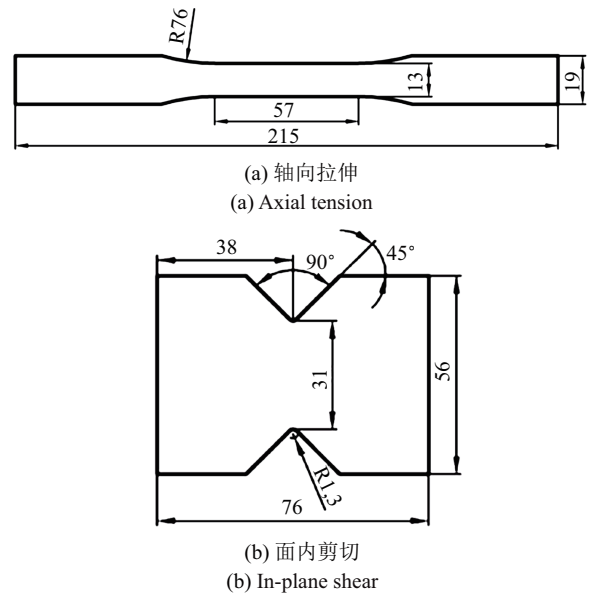


图 5 准静态力学性能试验样品

Fig. 5 Specimens for quasi-static mechanical tests

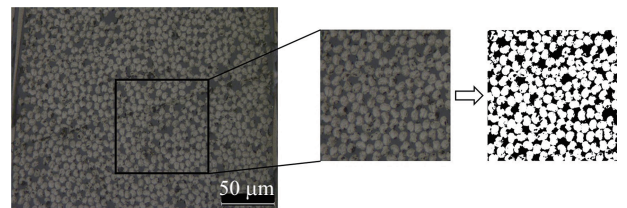


图 6 纤维束截面显微图像

Fig. 6 Microscopic image of cross section for yarns

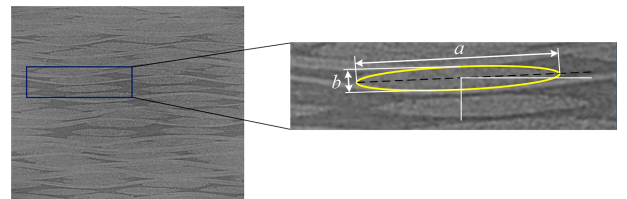


图 7 Micro-CT 图像

Fig. 7 Micro-CT images

表 2 几何参数

Table 2 Geometric parameters

Parameter	Upper bound	Lower bound	Mean
major axis of yarn a/mm	1.601	1.701	1.651
minor axis of yarn b/mm	0.105	0.111	0.108
thickness of single layer h/mm	0.202	0.214	0.208
spacing of yarn l/mm	0.334	0.354	0.344

以各变量的均值为输入参数, 经过前述的解析模型预测得到的单向纤维和单胞的确定性力学性能如表 3 所示, 通过与有限元仿真结果的对比可看出

解析法的相对误差较小. 特别地, 解析法得到的结果与试验结果的相对误差分别为 0.82% 和 6.33%, 预测结果与试验结果有较好的一致性.

表 3 力学性能预测结果

Table 3 Prediction results of mechanical properties

	Unidirectional fibre			Unit cell	
	$E_{x,yarn}/$ GPa	$E_{y,yarn}/$ GPa	$G_{xy,yarn}/$ GPa	$E_x/$ GPa	$G_{xy}/$ GPa
proposed	151.26	9.46	4.82	60.39	3.86
FEM	150.15	9.68	4.48	59.21	3.50
relative error/%	0.74	2.27	7.59	1.99	10.29

2 纤维束随机力学性能预测

本文主要考虑组分材料力学性能和几何参数不确定性对单向纤维力学性能预测结果的影响, 组分材料的力学性能参数和几何参数的概率密度函数 (probability density function, PDF) 均设定为具有 1% 变异系数的高斯分布.

平纹机织 CFRP 的层级结构如图 8 所示, 由于纤维束长轴和短轴既参与体积分数 V_f 的计算, 又参与了体积分数 V_{warp} 的计算, 属于跨尺度的共享变量. 单向纤维力学性能输入包括 7 个组分材料参数和几何

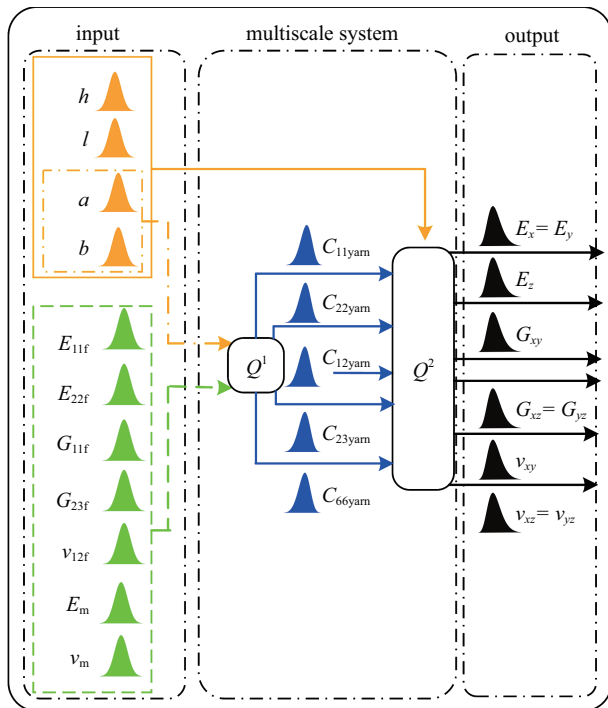


图 8 平纹机织 CFRP 层级结构

Fig. 8 Hierarchical structure of plain woven CFRP

参数 a, b , 各参数之间相互独立, 故直接采用混沌多项式方法来进行预测. 考虑到单向纤维具有 5 个独立的材料参数, 分别选择 $C_{11yam}, C_{22yam}, C_{12yam}, C_{23yam}, C_{66yam}$ 作为纤维束尺度模型力学性能响应输出.

2.1 混沌多项式展开

PCE 实质上是对随机变量构造一个具有随机性的代理模型 [27-29]. 为了描述的方便, 设定 $\mathbf{X} = (E_{11f}, E_{22f}, G_{11f}, G_{23f}, v_{12f}, E_m, v_m, a, b)$, 其任一元素设定为 X . 采用 PCE, 随机响应 Q 的截断的 PCE 可以简洁地表达如下

$$Q(\mathbf{X}) \approx Q_p(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{P-1} q_{\alpha_i} \psi_{\alpha_i}(\mathbf{X}) \quad (16)$$

式中, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N_L} \alpha_i$ 且 $0 \leq |\alpha| \leq p$, p 是多项式阶数, N_L 是随机变量的数目, P 是多项式项总数, 其计算表达式为 $P = (p + N_L)! / (p! N_L!)$, q_{α} 是待定的多项式系数, ψ_{α} 是服从概率分布 $f_X(x)$ 的多元多项式项, 具有正交性质

$$E[\psi_{\alpha}(\mathbf{X}) \psi_{\beta}(\mathbf{X})] = \delta_{\alpha\beta}, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}^{N_L} \quad (17)$$

式中, $\delta_{\alpha\beta}$ 是克罗内克符号, $E(\cdot)$ 表示期望算子. 式 (16) 所对应的截断集定义如下

$$A = \{\alpha \in \mathbf{N}^{N_L}, |\alpha| \leq p\} \quad (18)$$

利用 PCE 进行不确定性传递时, 最关键的步骤是求解式 (16) 中待定的多项式系数 q_{α} , 本文采用回归法求解待定系数, 其回归表达式为

$$q = \arg \min E[(Q - q^T \psi)^2] \quad (19)$$

求解上式得到多项式中的待定系数. 基于正交性质, 前四阶矩, 包括均值 μ 、标准差 σ 、偏度系数 C_s 、峰度系数 C_k 可以通过下式结合多项式系数获得.

$$\left. \begin{aligned} \mu &= q_{\alpha_0} \\ \sigma &= \sqrt{\sum_{\alpha \in \tilde{A}} E[\psi_{\alpha}]^2} \\ C_s &= \frac{1}{\sigma^3} \sum_{\alpha \in \tilde{A}} \sum_{\beta \in \tilde{A}} \sum_{\gamma \in \tilde{A}} E[\psi_{\alpha} \psi_{\beta} \psi_{\gamma}] q_{\alpha} q_{\beta} q_{\gamma} \\ C_k &= \frac{1}{\sigma^4} \sum_{\alpha \in \tilde{A}} \sum_{\beta \in \tilde{A}} \sum_{\gamma \in \tilde{A}} \sum_{\eta \in \tilde{A}} E[\psi_{\alpha} \psi_{\beta} \psi_{\gamma} \psi_{\eta}] q_{\alpha} q_{\beta} q_{\gamma} q_{\eta} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中, $\tilde{A} = A \setminus \{0\}$.

基于前四阶并采用概率分布拟合方法可以获得响应的概率分布. 常用的概率分布方法包括最大熵原理, 鞍点逼近等^[30-32]. 若偏度系数约为 0, 峰度系数约为 3, 则可直接假设该分布服从正态分布从而得到概率分布.

本文采用留一交叉验证方法来验证所构造的 PCE 的预测精度. 假设原始数据有 N 个样本, 那么每个样本单独作为验证集, 其余的 $N - 1$ 个样本作为验证集. 留一交叉验证能充分利用所有样本, 并得到 N 个模型, 用这 N 个模型验证集的相对误差平均数作为验证误差以评估模型的精度.

2.2 预测结果分析

将 PCE 方法应用到平纹机织 CFRP 单向纤维的力学性能预测中, 设定多项式阶数为 3, 基于拉丁超立方采样方法采取原始数据集, 包含 50 个样本. 预测得到的结果及模型验证误差如表 4 所示.

表 4 单向纤维力学性能随机预测结果

Table 4 Stochastic prediction results of mechanical properties for unidirectional fiber

Property parameter	μ/GPa	σ	C_s	C_k	Relative error/%
$C_{11\text{yarn}}$	154.43	2.61	0.06	3.05	3.14×10^{-2}
$C_{22\text{yarn}}$	12.65	0.32	0.18	3.08	6.35×10^{-2}
$C_{12\text{yarn}}$	5.46	0.17	0.16	3.08	7.75×10^{-2}
$C_{23\text{yarn}}$	6.30	0.27	0.18	3.07	4.7×10^{-1}
$C_{66\text{yarn}}$	4.82	0.12	0.14	3.06	7.57×10^{-3}

所构造的 PCE 模型采用留一交叉验证方法来验证模型的精度, 由表 4 可知, 力学性能参数预测模型的交叉验证误差最高为 0.470, 模型精度很高. 偏度系数均在 0 左右, 峰度系数均在 3 左右, 说明单向纤维力学参数基本服从正态分布.

3 单胞随机力学性能预测

单胞尺度下, 纤维束预测得到的力学性能响应属于同一模型的不同响应, 故不可避免地存在变量相关性. 此外, 几何参数 a, b 由于既参与纤维丝占纤维束体积分数 V_f 的计算, 又参与纤维束占单胞体积分数 V_{warp} 和 V_{weft} 的计算; 而 V_f 又与 $C_{11\text{yarn}}$ 等刚度矩阵元素存在因果关系, 故几何参数 a, b 与 $C_{11\text{yarn}}$ 等刚度矩阵元素之间也存在相关性. 随机响应预测过程中若不考虑变量之间的相关性, 会使得预测结果出

现较大的偏离^[33]. 因此, 单胞尺度的力学性能预测需要充分考虑随机参数之间的相关性, 本文基于 Vine Copula 理论首先构造相关随机变量的联合概率分布, 然后基于 Rosenblatt 转换实现相关样本至独立样本的转换, 最后基于相互独立的样本并采用 PCE 来实现单胞尺度的拉伸弹性模量 $E_x = E_y$, 拉伸弹性模量 E_z 和面内剪切模量 G_{xy} , 面外剪切模量 $G_{xz} = G_{yz}$, 泊松比 ν_{xy} , 及 $\nu_{xz} = \nu_{yz}$ 的随机预测, 如图 8 所示.

3.1 基于 Vine Copula 的相关性模型构建

Copula 函数能够建立一元边缘累积概率分布与多元联合分布之间的关系^[34-35], 为了描述的方便, 设定 $\mathbf{Y} = (C_{11\text{yarn}}, C_{22\text{yarn}}, C_{12\text{yarn}}, C_{23\text{yarn}}, C_{66\text{yarn}}, a, b, h, l)$, 其联合累积概率分布 (cumulative distribution function, CDF) 表达式为

$$F_Y(\mathbf{y}) = \Pr(Y_1 < y_1, Y_2 < y_2, \dots, Y_{N_U} < y_{N_U}) \quad (21)$$

式中, N_U 为变量个数, $\Pr(\cdot)$ 为累积概率算子. 基于 Sklar's 理论, 联合 CDF 可以重构成一系列边缘 CDF 的函数.

$$F_Y(\mathbf{y}) = C(F_1(y_1), \dots, F_{N_U}(y_{N_U}) | \boldsymbol{\theta}), \quad \mathbf{y} \in R^{N_U} \quad (22)$$

式中, $C(\cdot)$ 表示 Copula 函数, 当所有的边缘 CDF 都是连续函数时, Copula 函数是唯一的; $\boldsymbol{\theta}$ 表示 Copula 参数向量. 式 (22) 可进一步写成

$$C(\mathbf{u} | \boldsymbol{\theta}) = F_Y(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_{N_U}^{-1}(u_{N_U})) \Big|_{\mathbf{u} \in [0, 1]^{N_U}} \quad (23)$$

式中, \mathbf{u} 为累积概率值向量. Copula 函数有其对应的 Copula 密度函数

$$c(\mathbf{u} | \boldsymbol{\theta}) = \partial^{N_U} C(\mathbf{u} | \boldsymbol{\theta}) / (\partial u_1, \partial u_2, \dots, \partial u_{N_U}) \quad (24)$$

基于式 (24) 可得联合 PDF

$$f_Y(\mathbf{y}) = c(F_1(y_1), F_2(y_2), \dots, F_{N_U}(y_{N_U})) \prod_{i=1}^{N_U} f_i(y_i) \quad (25)$$

对于相关性测度, 本文采用一种非线性测度 Kendall 系数来进行描述. 相关模型的构建是基于累积概率样本集, 因此原始样本集需要转换到对应空间来进行相关模型的构造, 即 $\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{U}$. Copula 理论为多元相关建模提供了一种合理的方法, 但是目前主要针对二元 Copula 函数. 随着维度的增加, 构造一个合适的多元 Copula 会变得越来越困难. 为了克服上述局限性, 采用 Vine Copula 来将多元 Copula 函数分

解为一系列二元 Copula 函数的组合来构造多元相关模型. 分解方法如下

$$f_Y(y) = f_1(x_1) \cdots f_{N_U|1,2,\dots,N_U-1}(y_{N_U} | y_1, y_2, \dots, y_{N_U-1}) \quad (26)$$

式中, $f_{j|1,2,\dots,j-1}(y_j | y_1, y_2, \dots, y_{j-1})$, $j = 2, 3, \dots, N_U$ 是边缘 PDF, 其可以通过 Copula 密度函数的偏导求得

$$f_{i|j}(y_i | y_j) = \partial c_{ij}(u_i, u_j) / \partial u_j \quad (27)$$

观察式 (26) 不难发现通过改变分解变量的顺序, 多元 Copula 函数的分解方式多样. 本文采用基于图形模型的 R-vine 来进行结构构造 [36]. 该方法通过分析变量之间的相关系数并基于最大生成树方法来确定 R-Vine 的结构 [37]. 二元 Copula 函数存在多种形式, 如 Gumbel Copula, Gaussian Copula, Frank Copula 等, 且不同函数存在对应的 Copula 参数. 分别引入最大似然估计方法和赤池信息准则 (Akaike information criterion, AIC) [38] 来确定最优 Copula 参数和函数.

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} L \quad (28)$$

$$L = \sum \ln c(F_1(y_{1i}), F_2(y_{2i}) | \theta) \quad (29)$$

$$AIC = -2L + 2k_{\theta}$$

式中, k_{θ} 是需要确定的 Copula 参数数目. 通过上述方法的组合可逐步构造二元 Copula 函数直到获得所需要的多元 Copula 函数.

3.2 独立性转换

基于 Vine Copula 理论构造相关性模型后, 可通过该模型生成相关累积概率样本集 u , 该样本集无法直接用于后续的不确定性分析, 故须先通过独立性转换方法得到相互独立的样本集. 由于最大生成树方法已经确定了 Vine Copula 的结构, 即确定了随机变量的转换次序, 故此时采用 Rosenblatt 转换会得到唯一一组独立样本集. 转换方法如下

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_1 &= u_1 \\ \hat{u}_2 &= C(u_2 | u_1) \\ \dots \\ \hat{u}_n &= C(u_n | u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

式中, $\hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n)$ 转换后的独立样本集.

Rosenblatt 转换实现了样本从相关到独立的转换, 即 $U \rightarrow \hat{U}$. 进一步地采用 $\hat{y}_i = \Phi^{-1}(\hat{u}_i)$ 可得到用于不确定性传递的样本集, 其转换表达式为 $\hat{U} \rightarrow \hat{Y}$.

3.3 预测结果分析

将 Vine Copula 理论应用到平纹机织 CFRP 单胞尺度力学性能预测的相关模型建模中. 具有相关性的参数为 ($C_{11\text{yarn}}, C_{22\text{yarn}}, C_{12\text{yarn}}, C_{23\text{yarn}}, C_{66\text{yarn}}, a, b$), 几何参数 a 和 b 的 PDF 已设定为高斯分布, 力学性能参数 ($C_{11\text{yarn}}, C_{22\text{yarn}}, C_{12\text{yarn}}, C_{23\text{yarn}}, C_{66\text{yarn}}$) 的 PDFs 则已通过纤维束尺度的随机预测获得. 得到的 R-Vine 树结构 1 如图 9 所示.

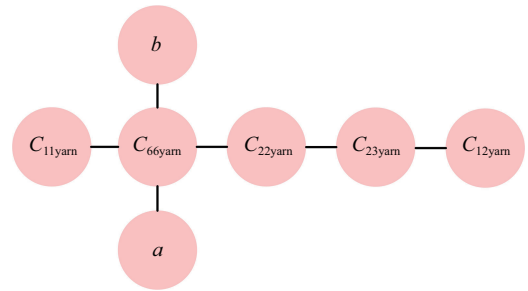


图 9 R-Vine 树结构 1

Fig. 9 R-Vine tree structure 1

为了验证所构造的相关性模型的准确性, 基于该模型产生随机样本并求解得到相关性系数, 该相关性系数与原样本集相关性系数进行对比, 对比结果如图 10 中相关性矩阵所示. 相关性矩阵上对角矩阵的相关性系数为原样本集计算得到的结果, 下三角矩阵的相关性系数为 Vine Copula 模型计算得到的结果. 对比矩阵里面的元素可发现相关性系数几乎一致, 绝对误差最大仅为 0.03, 说明构造的相关性模型精度很高.

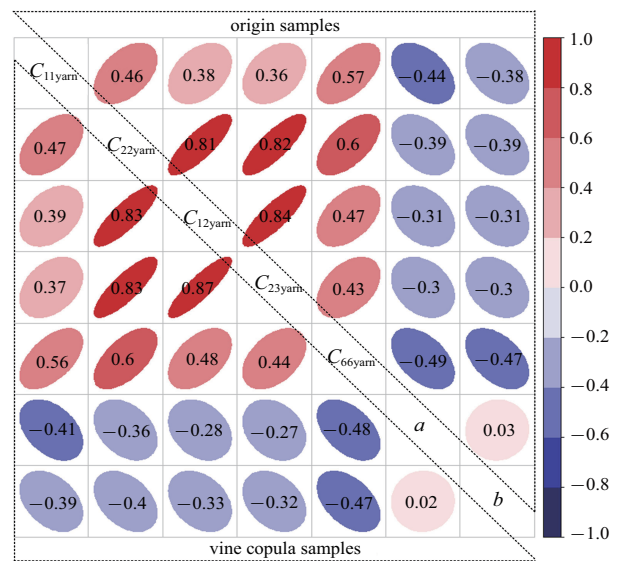


图 10 相关性矩阵对比

Fig. 10 Comparison of correlation matrix

基于独立性转换方法将原样本集 Y 转换为用于不确定性传递的样本集 \hat{Y} , 图 11 给出了 (C_{11yam}, C_{22yam}) 在空间 $Y \rightarrow U \rightarrow \hat{U} \rightarrow \hat{Y}$ 转换过程. 可以看出, 最终获得了相互独立的样本集. 基于该样本集并采用前述的 PCE 方法来实现平纹机织 CFRP 单胞的力学性能预测. 设定多项式阶数为 5, 预测得到的结果如表 5 所示.

所构造的 PCE 模型的验证误差最大为 0.0806, 模型精度很高. 由于偏度系数在 0 左右, 峰度系数在 3 左右, 说明单胞弹性力学性能参数基本服从

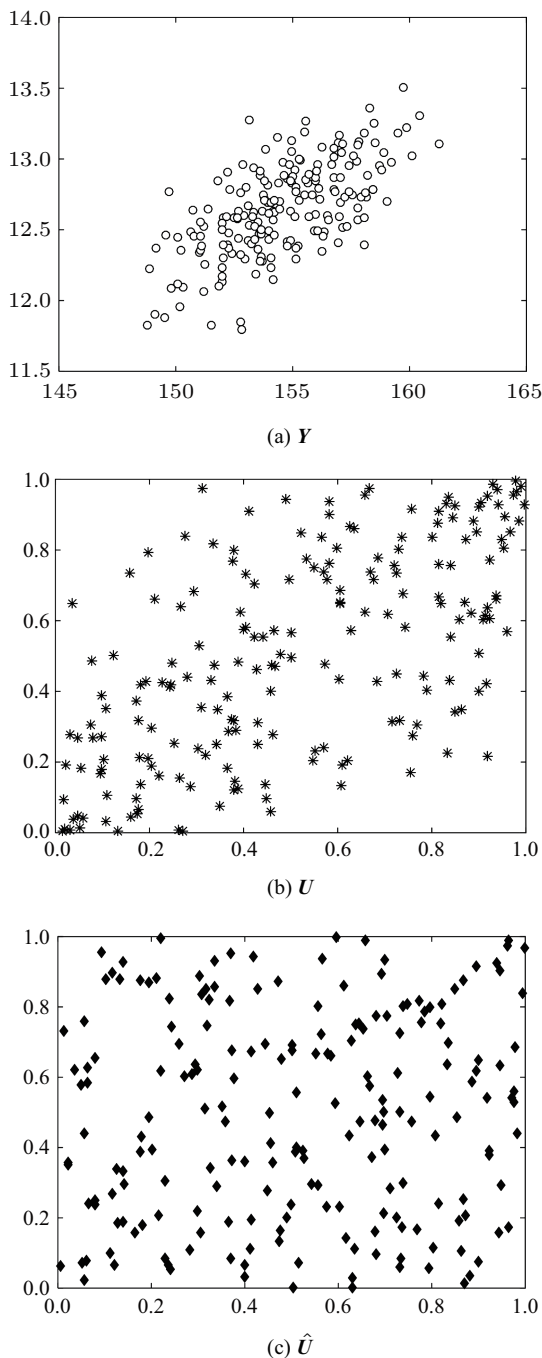


图 11 样本集转换过程

Fig. 11 Transformation of samples

表 5 单胞力学性能随机预测结果

Table 5 Stochastic prediction results of mechanical properties of unit cell

Property parameter	μ/GPa	σ	C_s	C_k	Relative error/%
E_x	60.38	0.99	0.06	3.05	4.45×10^{-2}
E_z	9.88	0.20	0.15	2.98	1.86×10^{-2}
G_{xy}	3.87	0.09	0.16	3.00	4.63×10^{-3}
G_{xz}	3.42	0.09	0.14	3.07	1.01×10^{-2}
ν_{xy}	0.036	5.0×10^{-4}	0.06	3.09	8.06×10^{-2}
ν_{xz}	0.47	5.0×10^{-3}	0.04	2.94	4.45×10^{-2}

正态分布. 将单胞力学性能随机预测结果与表 1 中的确定性结果进行对比可以发现, 随机预测结果的均值与确定性结果基本一致, 这说明了平纹机织 CFRP 轴向拉伸弹性模量和面内剪切模量的多尺度模型非线性程度较低, 使得随机预测结果的均值相对于确定性结果波动较小; 也从侧面证明了传统确定性方法实际上就是基于随机变量的均值来进行分析. 此外, 通过计算得到随机预测结果的变异系数分别为 1.64%, 2.02%, 2.32%, 2.63%, 1.38%, 1.13% 相比较于输入参数 1% 的变异系数来说均有所提高, 表明不确定性耦合且传递之后会对随机预测结果的方差产生放大的影响.

4 结 论

本文针对现有平纹机织 CFRP 力学性能预测研究中的考虑随机参数不够全面, 不确定性传递方法大多具有局限性以及对随机参数之间的相关性考虑不够充分等问题, 提出一种基于 PCE 和 Vine Copula

的平纹机织 CFRP 随机力学性能多尺度预测方法. 具体工作与结论如下:

(1) 该方法综合考虑了平纹机织 CFRP 微观及介观尺度的材料、结构随机参数, 基于层级传递的策略逐尺度地研究了力学性能参数的不确定性. 本方法从根源上量化了不确定性, 并逐尺度地揭示了参数的不确定性对各尺度力学性能的影响作用.

(2) 随机力学性能预测结果表明, 所构造的各尺度 PCE 模型的交叉验证误差均很低, 说明非嵌入式 PCE 方法能够准确地实现各尺度力学性能的随机预测. 同时, 由于 PCE 模型能够解析地给出预测结果的均值、标准差、偏度系数和峰度系数, 能够进一步得到参数的 PDF.

(3) 该方法在预测过程中充分考虑了随机变量之间的高维相关性, 基于 Vine Copula 方法和 Rosenblatt 转换实现了对相关性的建模与转换. 相关性矩阵中系数之间的绝对误差最大为 0.03, 表明所构造的相关性模型能够很好地反映原数据之间的相关性; 而 Rosenblatt 转换与所构造的相关性模型相结合则能够很好地实现样本集的独立性转换.

参 考 文 献

- 李伟, 方国东, 李玮洁等. 碳纤维增强复合材料微观烧蚀行为数值模拟. 力学学报, 2019, 51(3): 835-844 (Li Wei, Fang Guodong, Li Weijie, et al. Numerical simulation of micro-ablation behavior for carbon fiber reinforced composites. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(3): 835-844 (in Chinese))
- 郝大贤, 王伟, 王琦琬等. 复合材料加工领域机器人的应用与发展趋势. 机械工程学报, 2019, 55(3): 14-30 (Hao Daxian, Wang Wei, Wang Qilong, et al. Applications and development trend of robotics in composite material process. *Journal of Mechanical Engineering*, 2019, 55(3): 14-30 (in Chinese))
- Tao W, Liu Z, Zhu P, et al. Multi-scale design of three dimensional woven composite automobile fender using modified particle swarm optimization algorithm. *Composite Structures*, 2017, 181: 73-83
- 王琰, 李启迪, 李光耀. 变刚度复合材料结构设计方法及不确定性分析研究进展. 机械工程学报, 2019, 55(8): 46-55 (Wang Hu, Li Qidi, Li Guangyao. Review on structure design and uncertainty analysis of variables stiffness composites. *Journal of Mechanical Engineering*, 2019, 55(8): 46-55 (in Chinese))
- 邬晓敬, 张伟伟, 宋述芳等. 翼型跨声速气动特性的不确定性及全局灵敏度分析. 力学学报, 2015, 47(4): 587-595 (Wu Xiaojing, Zhang Weiwei, Song Shufang, et al. Uncertainty quantification and global sensitivity analysis of transonic aerodynamics about airfoil. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, 47(4): 587-595 (in Chinese))
- Bostanabad R, Liang B, Gao JY, et al. Uncertainty quantification in multiscale simulation of woven fiber composites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 389: 506-532
- 陈倩, 张汉哲, 吴钦等. 复合材料水翼水动力与结构强度特性数值研究. 力学学报, 2019, 51(5): 1350-1362 (Chen Qian, Zhang Hanzhe, Wu Qin, et al. The numerical investigation on hydrodynamic and structural strength of a composite hydrofoil. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(5): 1350-1362 (in Chinese))
- 李乐. 开裂孔隙材料渗透率的细观力学模型研究. 力学学报, 2018, 50(5): 1032-1040 (Li Le. Permeability of microcracked porous solids through a micromechanical model. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(5): 1032-1040 (in Chinese))
- Chen ZX, Huang TY, Shao YM, et al. Multiscale finite element modeling of sheet molding compound (SMC) composite structure based on stochastic mesostructured reconstruction. *Composite Structures*, 2018, 188: 25-38
- 潘斌, 张桂明, 孙子恒等. 基于细观力学的大开孔层合板缝合补强力学性能计算的新方法. 复合材料学报, 2019, 36(6): 1447-1456 (Pan Bin, Zhang Guiming, Sun Ziheng, et al. A new method for calculating of stitching reinforcement for composite laminates containing a large circular hole based on micromechanics. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2019, 36(6): 1447-1456 (in Chinese))
- Omairey SL, Dunnig PD, Sriramula S. Multiscale surrogate-based framework for reliability analysis of unidirectional FRP composites. *Composite Part B*, 2019, 173: 106925
- Liu Z, Zhu C, Zhu P. Generation of random fiber distribution for unidirectional fiber reinforced composites based on particle swarm optimizer. *Polymer Composites*, 2019, 40(4): 1643-1653
- Yang L, Yan Y, Ran Z, et al. A new method for generating random fiber distributions for fiber reinforced composites. *Composites Science and Technology*, 2013, 76: 14-20
- Zhang T, Yan Y. A comparison between random model and periodic model for fiber-reinforced composites based on a new method for generating fiber distributions. *Polymer Composites*, 2017, 38(1): 77-86
- Bale H, Blacklock M, Begley MR, et al. Characterizing three-dimensional textile ceramic composites using synchrotron x-ray micro-computed-tomography. *Journal of the American Ceramic Society*, 2012, 95 (1): 392-402
- Blacklock M, Bale H, Begley M, et al. Generating virtual textile composite specimens using statistical data from micro-computed tomography: 1D tow representations for the Binary Model. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2012, 60 (3): 451-470
- Zhu C, Zhu P, Liu Z. Uncertainty analysis of mechanical properties of plain woven carbon fiber reinforced composite via stochastic constitutive modeling. *Composite Structures*, 2019, 207: 684-700
- Chakraborty S, Mandal B, Chowdhury R, et al. Stochastic free vibration analysis of laminated composite plates using polynomial correlated function expansion. *Composite Structures*, 2016, 135: 236-249
- Stefanou G, Savvas D, Papadarakakis M. Stochastic finite element analysis of composite structures based on material microstructure. *Composite Structures*, 2015, 132: 384-389
- Cui XY, Hu XB, Zen Y. A Copula-based perturbation stochastic method for fiber-reinforced composite structures with correlations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, 322: 351-372

- 21 Mehrez L, Fish J, Aitharaju V, et al. A PCE-based multiscale framework for the characterization of uncertainties in complex systems. *Computational Mechanics*, 2018, 61: 219-236
- 22 Xu C, Liu Z, Tao W, et al. A vine Copula-based hierarchical framework for multiscale uncertainty analysis. *ASME Journal of Mechanical Design*, 2020, 142(3): 031101
- 23 Deng Y, Chen XH, Wang H, et al. A multi-scale correlating model for predicting the mechanical properties of tri-axial braided composites. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2013, 32(24): 1934-1955
- 24 Chamis C. Simplified composite micromechanics equations for strength, fracture toughness, impact resistance and environmental effects. DTIC Document, 1984
- 25 ASTM D638-14. Standard Test Method for Tensile Properties of Plastics
- 26 ASTM D7078/D7078M. Standard Test Method for Shear Properties of Composite Materials by V-Notched Rail Shear Method
- 27 Blatman G, Sudret B. Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(6): 2345-2367
- 28 赵珂, 高正红, 黄江涛等. 基于 PCE 方法的翼型不确定性分析及稳健设计. *力学学报*, 2014, 46(1): 10-19 (Zhao Ke, Gao Zhenghong, Huang Jiangtao, et al. Uncertainty quantification and robust design of airfoil based on polynomial chaos technique. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2014, 46(1): 10-19 (in Chinese))
- 29 唐新姿, 王效禹, 袁可人等. 风速不确定性对风力机气动影响量化研究. *力学学报*, 2020, 52(1): 51-59 (Tang Xinzi, Wang Xiaoyu, Yuan Keren, et al. Quantitation study of influence of wind speed uncertainty on aerodynamic forces of wind turbine. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(1): 51-59 (in Chinese))
- 30 刘杰, 许灿, 李凡等. 基于 λ -PDF 和一次二阶矩的不确定性反求方法. *机械工程学报*, 2015, 51(20): 135-143 (Liu Jie, Xu Can, Li Fan, et al. Uncertain inverse method based on λ -PDF and first order second moment. *Journal of Mechanical Engineering*, 2015, 51(20): 135-143 (in Chinese))
- 31 Liu J, Meng XH, Xu C, et al. Forward and inverse structural uncertainty propagations under stochastic variables with arbitrary probability distributions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 342: 287-320
- 32 周春晓, 汪锐琼, 聂肇坤等. 基于最大熵方法的水下航行体结构动力响应概率建模. *力学学报*, 2018, 50(1): 114-123 (Zhou Chunxiao, Wang Ruiqiong, Nie Zhaokun, et al. Probabilistic modelling of dynamic response of underwater vehicle structure via maximum entropy method. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(1): 114-123 (in Chinese))
- 33 梁超锋, 刘铁军, 邹笃建等. 材料黏滞系数与损耗因子的频率相关性研究. *力学学报*, 2012, 44(5): 933-937 (Liang Chaofeng, Liu Tiejun, Zou Dujian, et al. The frequency-dependent study on viscosity coefficient and loss tangent of viscoelastic materials. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, 44(5): 933-937 (in Chinese))
- 34 Jiang C, Zhang W, Han X, et al. A vine-Copula based reliability analysis method for structures with multidimensional correlation. *ASME Journal of Mechanical Design*, 2015, 137: 061405
- 35 王攀, 张磊刚, 吕震宙等. 基于 Copula 函数的失效概率灵敏度分解方法. *机械工程学报*, 2018, 54(16): 178-185 (Wang Pan, Zhang Leigang, Lu Zhenzhou, et al. Sensitivity decomposition approach of failure probability based on Copula function. *Journal of Mechanical Engineering*, 2018, 54(16): 178-185 (in Chinese))
- 36 Bedford BT, Cooke RM. Vines-a new graphical model for dependent random variables. *The Annals of Statistics*, 2002, 30(4): 1031-1068
- 37 Huang XZ, Liu Y, Zhang YM, et al. Reliability analysis of structures using stochastic response surface method and saddlepoint approximation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2017, 55: 2003-2012
- 38 Dissman J, Brechmann EC, Czado C, et al. Selecting and estimating regular vine Copulae and application to financial returns. *Computational Statistics and Data Analysis*, 2013, 59: 52-69