

随机最优控制方法识别动力学系统局部非线性¹⁾

吴志刚 赵正聪 王本利 马兴瑞*

(哈尔滨工业大学航天工程与力学系, 哈尔滨 150001)

*(中国空间技术研究院, 北京 100081)

摘要 利用随机动态规划方法可以得到线性二次型高斯问题的最优控制解。基于这一结果与系统辨识问题最优控制解的概念, 将动力学系统中局部非线性结构参数的辨识问题转化为求解对应线性系统的最优控制问题, 利用线性系统随机最优控制的理论与方法, 结合 FSM (Force State Mapping) 方法, 提出了识别动力学系统中局部非线性回复力类型及结构参数的新方法。所研究系统由大的线性子结构与一个或多个非线性子结构组成, 其中线性结构的模型参数已知, 待辨识量为局部非线性结构参数。

关键词 参数辨识, 随机最优控制, 动力学系统, 局部非线性

引 言

航天器结构动力学分析中, 各主要子结构可以用线性模型来很好描述, 但连接结构由于结构构形和工况的复杂性和多样性, 其力学特性受多种因素的影响而相当复杂, 难以仅依据理论推导建立其动力学模型。工程实践表明, 连接结构对整个航天器结构的动力学特性会产生显著的影响, 因此, 利用参数辨识方法建立连接结构的动力学模型逐渐引起越来越多的重视。Schmidt 提出了结构动力学系统模态状态观测器 (Modal State Observers) 的概念, 通过极小化模型时域响应与真实系统时域响应的误差来识别结构的局部非线性参数^[1]。Gontier 等利用模态综合法与 ARMA 模型, 在主结构线性模型足够精确的前提下, 研究了大型结构中连接构件的模型参数辨识问题^[2]。Nobari 等的论文中, 连接结构的参数利用结构系统的模态参数通过迭代方法来辨识得到^[3]。Crawley 利用其提出的 FSM (Force State Mapping) 方法辨识航天器连接结构的模型及参数, 该方法将连接结构产生的非线性回复力表示为其运动状态 (位移、速度) 的可叠加类型的非线性函数, 物理意义直观明确^[4]。Masri 等提出的回复力方法 (Restoring Force Method) 与 FSM 方法类似^[5,6]。虽然该文讨论的是多自由度系统, 但该方法要求所有自由度上运动状态可测, 这在实际中是无法满足的。Hammond 等从系统输入的最优估计角度出发, 给出了识别动力学系统中非线性类型的方法^[7]。

将动力学系统划分成数个子结构进行研究的方法为结构的动特性分析提供了许多方便。而根据实际结构的特点, 将其划分成由线性子结构与非线性子结构 (连接结构) 组合而成的结构, 也便于处理系统辨识问题。线性结构部分通常可以通过理论分析得到合适的模型, 非线性子结构的参数则通过辨识方法得到。Crawley 提出的 FSM 方法通过单个连接件的实验, 测得由其传递的回复力的时间历程及其状态变量的时间历程, 再用最小二乘法拟合回复力与状态变量的函数关系, 得到连接件的非线性模型参数。但在工程实际中, 将单个连接件分离出来实验得到

1997-11-17 收到第一稿, 1998-09-21 收到修改稿。

1) 国防科技“九·五”预研基金 (A966000-50) 资助项目。

的模型参数, 有时不能完全正确代表其在安装位置时的动力学特性, 而且, 许多结构也不允许破坏整体结构以进行单个部件的测试. 因此连接结构在安装位置的参数识别问题便引起更多的关注. 按照 FSM 方法识别单个连接件模型参数的思路, 对整体组合结构来讲, 得到由连接件传递的非线性回复力以及连接件结合部的运动状态是参数识别的关键前提, 但通过一般的实验只能得到整个结构部分自由度上的运动状态数据, 因此根据这些数据估计其它自由度的运动状态是解决问题的途径.

现代控制理论已经证明, 由部分观测数据得到系统状态的最优估计可由最优控制理论的方法来解决. 在某种目标函数最小的意义下, 由这些观测数据估计连接件结合部的运动状态及其传递的恢复力, 恰好与系统最优控制的确定及状态的最优估计存在着对应关系. 在某种目标函数最小的意义下, 由这些观测数据估计连接件结合部的运动状态及其传递的回复力, 恰好与系统最优控制的确定及状态的最优估计存在着对应关系. 本文利用了这一联系, 并且以系统辨识问题求解中最优控制解的概念为出发点, 将含有测量噪声的动力学系统局部非线性的识别问题转化为对应线性系统的最优控制及最优状态估计问题, 而线性系统的随机最优控制问题已经有非常完整的理论与算法. 然后, 结合 FSM 方法, 本文给出了辨识非线性回复力类型及结构参数的方法. 对于由模型参数已知的线性子结构与一个或多个参数未知的非线性子结构组成的系统, 文中给出了具体的步骤和算例.

1 系统辨识问题最优控制解的概念

设系统模型的一般形式为

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

其中 $x \in R^n$, $f: [0, T] \times R^n \times R^m \rightarrow R^n$, $u \in R^m$, u 是系统模型中待辨识的物理量. 在系统辨识问题中, 定义如下形式的目标泛函

$$V = \int_0^T f^0(t, x, u) dt \quad (2)$$

其中 $f^0: [0, T] \times R^n \times R^m \rightarrow R^n$, 从控制理论的角度来看, 方程 (1) 是状态方程, (2) 是目标函数, 选择 u 使得目标函数 V 的值最小是一个最优控制问题. 而按最优控制方法求得的 u 就称为上述系统辨识问题的最优控制解^[8]. 黄光远最早利用这一概念进行了梁裂纹的识别工作^[9]. Hammond 等也从系统输入的最优估计角度出发, 提出利用最优控制的方法辨识系统中的非线性^[7].

对于一般的非线性系统, 即使可以借鉴最优控制的理论与算法, 按这一概念和思路进行系统辨识也是很复杂的. 但本文讨论的是一类特殊的非线性系统, 可以将该非线性系统中局部非线性回复力的识别问题首先转化为线性系统的最优控制问题进行求解, 再结合 FSM 法, 就可以辨识局部非线性结构的模型参数.

2 局部非线性结构参数辨识过程

2.1 回复力识别及运动状态的最优估计

由二阶形式的动力学微分方程转化为一阶形式的状态方程已在许多教科书中给出, 本文不再赘述, 我们直接从状态方程形式出发讨论问题. 主结构为线性, 局部子结构为非线性的系统状态方程为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{G}\tilde{\mathbf{u}}(t) \\ \tilde{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{v}(t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

根据实际背景, 在系统的输出方程中考虑了测量噪声. 初始状态 $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}_0$, $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ 为 n 维状态向量, $\mathbf{u}(t)$ 为 m ($m \leq n$) 维控制向量, $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ 为 p ($p \leq n$) 维输出向量 (这里同时也是量测向量, 是通过实验测量得到的), $\mathbf{N}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}})$ 为 n 维非线性回复力向量, $\mathbf{F}$ 为系统的线性部分 $n \times n$ 维矩阵, $\mathbf{G}$ 为 $n \times m$ 维输入矩阵, $\mathbf{H}$ 为 $p \times n$ 维输出矩阵. $\mathbf{v}(t)$ 表示 p 维测量白噪声, $\mathbf{v}(t)$ 与 n 维初始状态变量 $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ 有以下统计特性

$$\left. \begin{aligned} E\mathbf{v}(t) &= 0, \quad E\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mu_0, \quad E[\tilde{\mathbf{x}}_0 \mathbf{v}^T(t)] = 0 \\ E(\mathbf{v}(t) \mathbf{v}^T(t)) &= \mathbf{R}_s(t), \quad E(\tilde{\mathbf{x}}_0^T, \tilde{\mathbf{x}}_0^T) = \mathbf{P}_0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

上述非线性系统所对应的线性系统为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

定义系统 (3) 与 (5) 的状态及量测误差向量为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}_y &= \tilde{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{e}_x \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(3)-(5) 并将 (6) 式代入得

$$\dot{\mathbf{e}}_x - \mathbf{F}\mathbf{e}_x = \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{u}(t)) \quad (7)$$

由上式可知, 如果 $\mathbf{e}_x \approx 0$, $\dot{\mathbf{e}}_x \approx 0$, 则有

$$\mathbf{N}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}) \approx -\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{u}(t)) \quad (8)$$

通过求解 (5) 式所描述系统的控制输入 $\mathbf{u}(t)$, 使得在该输入时 $\mathbf{e}_y = \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}$ 最小, 即 $\mathbf{e}_x = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ 最小, 并且如果 $\mathbf{e}_x$ 变化平稳, 从而 $\dot{\mathbf{e}}_x \approx 0$ 也成立时, 就可以得到非线性子结构部分的回复力 $\mathbf{N}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}})$ 随时间变化的历程, 因为实际系统的输入 $\tilde{\mathbf{u}}$ 是可以测量的. 如果再能够根据测量到的数据得到局部非线性连接结构的状态 $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ (或 $\mathbf{x}(t)$, 因为 $\mathbf{e}_x \approx 0$), 进而再拟合 $\mathbf{N}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}})$ 与状态变量的函数关系, 即可得到非线性结构的模型与参数. 下面给出由随机最优控制方法获得回复力 $\mathbf{N}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}})$ 时间历程及相应状态变量时间历程的步骤.

为确定线性随机系统 (5) 的最优控制 $\mathbf{u}(t)$, 并且使 $\mathbf{e}_y = \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}$ 最小, 定义下述数学期望形式的目标函数

$$\mathbf{V} = E \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T [(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y})^T \mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] dt \right\} \quad (9)$$

这一问题属于线性二次型高斯 (LQG) 问题, 根据确定性等价定理, LQG 问题的最优控制律与确定性系统相同, 并且最优控制中所需的状态变量 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 由卡尔曼滤波方程给出^[10~12]. 利用动态规划方法得到使上述目标函数最小的最优控制

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{P}(t) \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{b}(t) \quad (10)$$

上式中各量的意义如下

$P(t)$ 是黎卡提方程的解

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}(t) &= -P(t)F - F^T P(t) + P(t)GR^{-1}G^T P(t) - H^T QH \\ P(T) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$b(t)$ 满足下述线性微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \dot{b}(t) &= -(F - GR^{-1}G^T P(t))^T b(t) - H^T Q\tilde{y}(t) \\ b(T) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$\hat{x}(t)$ 由卡尔曼滤波方程给出

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= F\hat{x}(t) + Gu(t) + K_1(t)[\tilde{y}(t) - H\hat{x}(t)] \\ x(0) &= \mu_0 = Ex_0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中滤波增益矩阵 $K_1(t)$ 为

$$K_1(t) = P_1(t)H^T R_s^{-1}(t) \quad (14)$$

滤波误差协方差矩阵 $P_1(t)$ 满足

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}_1(t) &= FP_1(t) + P_1(t)F^T - P_1(t)H^T R_s^{-1}(t)HP_1(t) \\ P_1(t_0) &= P_0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

由上述过程确定最优控制 u 时, 加权矩阵 Q 和 R 的选取非常重要, 这里希望输出误差向量 $e_y \approx 0$, 因而 Q 矩阵中对角线元素值应显著大于 R 矩阵中对角线元素值. 由上述过程, 确定 $N(\tilde{x}, \tilde{x})$ 所需的 $u(t)$ 由 (10) 式给定, 状态向量无法直接测得, 但将 (10) 式代入式 (5) 可以求得线性系统的状态 $x(t)$, 上述求最优控制 u 的过程已经使 $e_x \approx 0$, 这样就可以由 $x(t)$ 来代替 $\tilde{x}(t)$. 有了这些数据, 模型参数辨识就可以由最小二乘法等参数估计方法来完成了.

理论上, 直接利用

$$N(\tilde{x}, \tilde{x}) = G(u - \tilde{u}) + \dot{e}_x - Fe_x \quad (16)$$

进行参数辨识效果更好. e_x 可以得到, 但 $\dot{e}_x$ 难以得到, 此时可按照前面所述思路再进行一次求解最优控制的过程.

设

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_x - Fe_x &= u_1 \\ e_y &= He_x \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

其中

$$u_1 = N(\tilde{x}, \tilde{x}) + G(\tilde{u} - u) \quad (18)$$

求 $\dot{e}_x - Fe_x$ 变为求 u_1 , 即求 (17) 式所描述线性系统的控制量, 而其状态变量 e_x 由前面计算过程可知是已知的. 问题再次转化为求系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}'_x &= Fe'_x + u'_1 \\ e'_y &= He'_x \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

的最优控制, 使目标函数

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^T [(e_y - e'_y)^T S (e_y - e'_y) + u_1'^T W u_1'] dt \quad (20)$$

最小的问题. S 和 W 分别为相应维数的加权矩阵.

这样局部非线性回复力将有更为精确的逼近

$$N(\tilde{x}, \tilde{\dot{x}}) \approx G(u - \tilde{u}) + u_1' \quad (21)$$

理论上这一步骤可使误差向量值更小. 但作者的实际计算表明, 这一步并不是必需的, 而要根据实际结果决定是否进行.

2.2 模型参数的估计

Crawley 的文章中, 局部非线性结构所产生的回复力是状态的函数^[4]

$$N(x, \dot{x}) = b(x, \dot{x})\dot{x} + k(x, \dot{x})x \quad (22)$$

定义于状态平面 $x-\dot{x}$ 上的曲面 $N(x, \dot{x})$ 如果不是平面, 则表明系统中存在非线性. 根据 FSM 方法可以描述并拟合下列可叠加的非线性回复力形式

$$N(x, \dot{x}) = c + k_1 x + b_1 \dot{x} + k_n x^n + b_n \dot{x}^n + k_{DB} + b_{DB} + f_F \text{sign}(\dot{x}) + g|x|\text{sign}(\dot{x}) \quad (23)$$

前三项分别是常值力, 线性弹性力和阻尼力, 其后两项是高阶的非线性弹性力和阻尼力, 第 6 和第 7 项表示分段线性弹性力和阻尼力, 第 8 项为库仑摩擦力, 最后一项是结构阻尼力. 本文提出的方法再结合 FSM 方法就可以估计讨论上述形式非线性回复力中的参数 (FSM 方法的具体过程参见文献 [4]). 在 2.1 中已经获得了非线性回复力的时间历程及状态变量的最优估计, 利用这些数据, 参考 (23) 式选定符合实际情况的基函数, 用最小二乘法就可以估计 (23) 式中各基函数的系数, 为避免矩阵奇异性的影响, 可采用矩阵奇异值分解法来求解这一最小二乘问题.

3 辨识仿真算例结果

参数辨识仿真采用图 1 所示弹簧质量阻尼系统, m_1 上作用有正弦激励 $f(t)$, m_2 与 m_3 之间除线性弹簧连接外, 还有立方非线性弹簧连接, 算例就是辨识这一非线性弹簧的系数. 作用于 m_2 与 m_3 之间的非线性弹性回复力形式为

$$n_{23}(x) = k_{23}(x_2 - x_3)^3 \quad (24)$$

系统物理参数为, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$, $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 10$, $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0.02$, $k_{23} = 1000$, 识别所得的非线性回复力的力-状态图如图 2 所示, 辨识所得结果列于表 1. 假定测量噪声为正态分布.

表 1 参数辨识结果

Table 1 Results of parameters identification

Excitation	Without noise		With noise $N(0, 0.01)$		With noise $N(0, 0.02)$	
	Results	Error(%)	Results	Error(%)	Results	Error(%)
$f(t) = 5 \sin 5t$	992	0.8	962	3.8	1050	-5.0
$f(t) = 25 \sin 11t$	975	2.5	1024	-2.4	914	8.6
$f(t) = 50 \sin 7t$	982	1.8	967	3.3	1034	-3.4

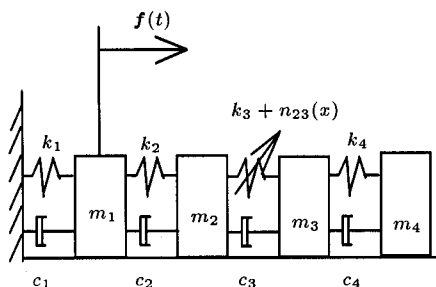


图 1 仿真所用弹簧质量阻尼器系统

Fig.1 Spring-mass-damper system of simulation

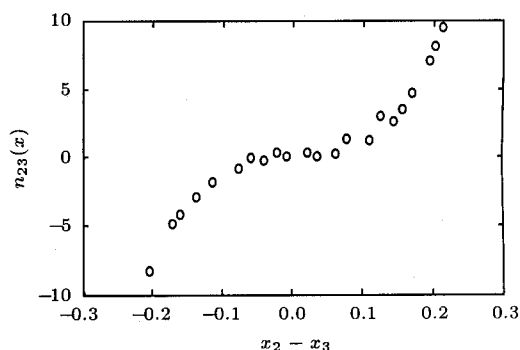


图 2 局部非线性回复力的力 - 状态图

Fig.2 Force state map of local nonlinear restoring force

4 结 论

本文所讨论的方法适用于动力学系统中局部非线性子结构的识别与参数的辨识, 前提条件是结构的其它部分可以用线性模型来足够精确地描述。这一方法利用现代控制理论中发展完善的随机最优控制理论算法进行非线性子结构所传递的回复力的识别及运动状态估计, 然后辨识模型的参数。方法的物理意义清晰直观。辨识仿真算例分别选择无噪声情况, 有测量噪声情况进行了计算。结果证明提出的方法是可行的。

参 考 文 献

- Schmidt Reinhard. Updating nonlinear components. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1994, 8(6): 679~690
- Gontier Camille et al. Time domain identification of a substructure from in situ analysis of the whole structure. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1995, 9(4): 379~396
- Nobari S et al. A new approach to modal-based structural dynamic model updating and joint identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1995, 9(1): 85~100
- Edward F Crawley et al. Force-state mapping identification of nonlinear joints. *AIAA Journal*, 1987, 25(7): 1003~1010
- Masri F et al. Identification of nonlinear vibrating structures: part I—Formulation. *Journal of Applied Mechanics*, 1987, 54(4): 918~922
- Masri F et al. Identification of nonlinear vibrating structures: part II—Applications. *Journal of Applied Mechanics*, 1987, 54(4): 923~929
- Hammond JK et al. Identification of nonlinearities in vibrating systems using optimal control techniques. In: Demichele DJ ed. *Proceedings of 5th IMAC*. Schenectady: Union Coll PR, 1987. 1476~1478
- 黄光远, 刘小军. 数学物理反问题. 济南: 山东科学技术出版社, 1993 (Huang Guangyuan, Liu Xiaojun. *Inverse Problem of Mathematical Physics*. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 1993 (in Chinese))
- 黄光远等. 梁裂纹的识别 - 最优控制理论的应用. *固体力学学报*, 1988, 9(3): 202~212 (Huang Guangyuan et al. *Flaw detection of an elastic pole—an application of optimal control theory*. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1988, 9(3): 202~212 (in Chinese))
- 王照林等. 现代控制理论基础. 北京: 国防工业出版社, 1981 (Wang Zhaolin et al. *Foundation of Modern Control Theory*. Beijing: National Defense Industry Press, 1995 (in Chinese))
- Stengel RF. *Stochastic Optimal Control*. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1986
- Bryson AE, Ho Yu-chi. *Applied Optimal Control*. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1975

IDENTIFICATION OF LOCAL NONLINEARITIES IN DYNAMIC SYSTEM VIA STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL APPROACH¹⁾

Wu Zhigang Zhao Zhengcong Wang Benli Ma Xingrui*

(*Department of Astronautics and Mechanics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China*)

* (*Chinese Academy of Space Technology, Beijing 100081, China*)

Abstract In the analysis of dynamic characteristics of space structures, the connecting elements play an important role in the overall dynamics of the structure, which often lead to the structure exhibits local nonlinearities. Generally speaking, the main part of the structure can be regarded as linear with sufficient accuracy, but it is often difficult to model these local nonlinear elements because the complexity of their configuration and operating mode. Therefore, an increasing amount of attention has recently been devoted to the identification of local nonlinearities and structure parameters of dynamic system.

A new identification technique of local nonlinearities in dynamic system via stochastic optimal control approach is introduced in this paper. In optimal control theory, the Linear-Quadratic-Gaussian problem have been successfully solved via stochastic dynamic programming. Based on this result and the concept of optimal control solution of system identification problem, local nonlinearities identification of dynamic system is transformed into a stochastic optimal control problem. Combining this transformation with the Force-State-Mapping method, the identification technique is presented in this paper to identify the types of restoring force transmitted by local nonlinear elements and their parameters. The dynamic system discussed here can be decomposed into a large linear substructure and one or more nonlinear substructures. While the model parameters of linear substructure is known prior. Numerical simulation examples are also given to validate the effectiveness of the proposed method.

Key words parameters identification, stochastic optimal control, dynamic system, local nonlinear

Received 17 November 1997, revised 21 September 1998.

1) The project supported by the National Defense Science and Technology "9-5" Research and Development Fund Aid Project (A966000-50).