

包含两类变量的离散变量桁架结构 拓扑优化设计¹⁾

柴 山 石连栓 孙焕纯

(山东工程学院, 淄博 255012) (大连理工大学, 大连 116025)

摘要 建立了包含截面和拓扑两类变量的离散变量结构拓扑优化设计的数学模型, 该模型考虑了截面变量与拓扑变量间的耦合关系, 反映了拓扑优化问题的组合优化本质, 可以较好地解决“极限应力”、“最优解的奇异性”等困扰结构拓扑优化设计的问题. 同时采用相对差商法进行离散变量桁架结构拓扑优化, 直接求解包含两类变量的离散变量结构拓扑优化设计数学模型, 收到了比较满意的效果.

关键词 离散变量, 拓扑, 结构优化设计, 组合优化

前 言

由于结构拓扑优化设计将结构的拓扑关系作为设计变量, 在优化设计中通过变更结构的拓扑形式寻求最优结构, 因而可以获得更大的收益, 同时还可为设计者提供新的设计方案, 更易于被工程技术人员所接受. 另一方面, 由于结构拓扑优化设计要同时设计结构构件的截面尺寸和结构的拓扑形式, 即包含截面尺寸设计变量 A_i 和拓扑关系设计变量 α_i , 其中 A_i 是连续变量 (对连续变量优化而言) 或是离散变量 (对离散变量优化而言), 而 α_i 是取 0 (表示删除) 或 1 (表示保留) 的离散量, 所以其数学模型为包含两类变量的混合离散规划模型或纯离散规划模型, 比结构构件的截面尺寸优化要复杂、困难得多, 因而被认为是挑战性的课题. 基于以上两方面的原因, 近年来结构拓扑优化设计一直是结构优化设计领域的研究热点和前沿, 并已取得了一些研究成果. 和连续变量结构拓扑优化设计相比, 离散变量结构拓扑优化设计的研究由于问题本身的难度和受截面离散优化研究发展的限制, 进展相对比较缓慢.

国内外研究结构拓扑优化设计这一问题采用的方法主要是基结构法, 即根据预先给定的支承条件、载荷情况及其它要求, 建立一个结点集合, 各结点间由构件连接, 形成一个初始的基结构, 结构所允许的所有拓扑形式都可以由初始基结构的单元组合而成. 在求解过程中, 将结构拓扑优化设计问题描述为一个截面下限为零的截面优化设计问题

P_1 求 A_i

$$\left. \begin{aligned} \min W &= \sum_{i=1}^M \rho_i A_i \sum_{j \in G_i} l_j \\ \text{s.t. } \sigma_{il}(A_i) &\leq \bar{\sigma}_i \quad (l = 1, 2, \dots, NL) \\ \delta_{kl}(A_i) &\leq \bar{\delta}_k \quad (k = 1, 2, \dots, ND) \\ A_i &\in S_i = \{A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{iN_i}\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

1997-10-20 收到第一稿, 1998-04-16 收到修改稿.

1) 山东省自然科学基金 (Y97A06011) 资助项目.

其中, M 是变量连接后的截面变量数, G_i 是属于第 i 组的单元所构成的集合, NL, ND 分别是工况数和位移约束总数, A_i 是面积设计变量, 且 $A_{i1} = 0$.

和另一个只有拓扑变量的优化问题:

P_2 求 α_i

$$\left. \begin{aligned} \min W &= \sum_{i=1}^M \rho_i A_i \alpha_i \sum_{j \in G_i} l_j \\ \text{s.t. } \alpha_i \sigma_{il}(\alpha_i) &\leq \bar{\sigma}_i \quad (l = 1, 2, \dots, NL) \\ \delta_{ki}(\alpha_i) &\leq \bar{\delta}_k \quad (k = 1, 2, \dots, ND) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中, α_i 是拓扑变量.

在完成截面优化后, 通过删除截面为零的构件或建立一定的删除与恢复准则删除某些构件改变结构的拓扑形式, 以达到拓扑优化的目的. 这种方法实际上是将截面变量和拓扑变量分离、分别进行优化的分离变量优化方法. 其特点是计算工作量相对较小、计算效率比较高. 但实际上结构的拓扑变量与截面变量间存在着较强的耦合关系, 忽略这种耦合关系进行两类变量的分层优化无法保证得到真正的最优解 (或局部最优解), 同时也带来了一些难于克服的问题 (如“极限应力”和最优解的奇异性问题等). 为了克服将两类变量分层考虑的分离变量法所产生的问题, 必须在整个优化过程中统一考虑两类变量.

包含两类变量的多工况下受应力、位移约束的离散变量桁架结构拓扑优化设计的数学模型可以表示为:

P 求 A_i, α_i

$$\left. \begin{aligned} \min W &= \sum_{i=1}^M \rho_i A_i \alpha_i \sum_{j \in G_i} l_j \\ \text{s.t. } \alpha_i \sigma_{il}(A_i, \alpha_i) &\leq \bar{\sigma}_i \quad (l = 1, 2, \dots, NL) \\ \delta_{ki}(A_i, \alpha_i) &\leq \bar{\delta}_k \quad (k = 1, 2, \dots, ND) \\ A_i &\in S_i = \{A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{iN_i}\} \\ \alpha_i &\in \{0, 1\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

由于 (3) 式中包含了截面与拓扑两类变量, 当在结构中删除某一杆 i 时, 相应的拓扑变量 $\alpha_i = 0$, 其应力 $\alpha_i \sigma_{il} = 0$, 不存在极限应力问题. 同时, 求解 (3) 式应在由截面与拓扑两类变量组成的离散集合中寻优, 因而也可避免最优解的奇异性问题.

文 [1] 提出了一种求解离散优化的相对差商法, 该法首先计算设计变量的相对差商, 然后根据相对差商确定搜索方向. 理论分析及大量的实际算例和对几千个随机生成的算例所做的性能统计分析表明该算法具有效率高、精度高的特点, 并已成功地应用于离散变量结构的截面优化设计. 本文进一步将其推广、应用于离散变量桁架结构的拓扑优化设计, 同时处理截面和拓扑两类变量. 在求解过程中, 利用相对差商算法, 根据各个拓扑变量与截面变量的相对差商值确定下一步是进行截面优化还是进行拓扑优化. 通过算例的优化历史可以看出, 一些例题首先就开始删去某些杆件, 而另一些例题则是在首先做了若干次截面优化以后, 才开始删杆. 因此, 将截面优化和拓扑优化分层考虑是难以得到最优解的. 本文最后给出几个算例, 这些算例表明该方法是有效的.

1 算法的基本思想

数学模型 (3) 式包含应力约束和位移约束, 是一多约束优化设计问题, 考虑到各种约束条件可能因为量纲不一致而使约束值相差甚远, 因此, 首先将 (3) 式的约束条件进行归一化无量纲处理, 应力约束化为

$$\tilde{\sigma}_{il}(A_i, \alpha_i) = 1 - \alpha_i \sigma_{il}(A_i, \alpha_i) / \bar{\sigma}_i \geq 0 \quad (4)$$

位移约束化为

$$\tilde{\delta}_{jl}(A_i, \alpha_i) = 1 - \delta_{jl}(A_i, \alpha_i) / \bar{\delta}_j \geq 0 \quad (5)$$

在各设计点 $\{A_1^{k_1}, A_2^{k_2}, \dots, A_m^{k_m}, \alpha_1^{k_1}, \alpha_2^{k_2}, \dots, \alpha_m^{k_m}\}^T$ ($A_i^{k_i} \in S_i, \alpha_i^{k_i} \in \{0, 1\}$), 应力约束值与位移约束值组成一个向量

$\mathbf{X} =$

$$\{\tilde{\sigma}_{1,1}, \dots, \tilde{\sigma}_{1,NL}, \tilde{\sigma}_{2,1}, \dots, \tilde{\sigma}_{2,NL}, \dots, \tilde{\sigma}_{m,1}, \dots, \tilde{\sigma}_{m,NL}, \tilde{\delta}_{1,1}, \dots, \tilde{\delta}_{1,NL}, \dots, \tilde{\delta}_{ND,1}, \dots, \tilde{\delta}_{ND,NL}\}^T \quad (6)$$

其中, m 为结构单元总数, $\mathbf{X} \in R^{m \times NL + NL \times ND}$.

$\mathbf{X}$ 的各个分量组成一个集合

$$G = \{\tilde{\sigma}_{il}(A_i, \alpha_i), \tilde{\delta}_{jl}(A_i, \alpha_i) \mid i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, ND; \quad l = 1, 2, \dots, NL\} \quad (7)$$

将 G 分为两个子集, $G_1 = \{\tilde{\sigma}_{il}(A_i, \alpha_i) \mid \tilde{\sigma}_{il}(A_i, \alpha_i) < 0\} \cup \{\tilde{\delta}_{jl}(A_i, \alpha_i) \mid \tilde{\delta}_{jl}(A_i, \alpha_i) < 0\}$ 和 $G_2 = G - G_1$, G_1 为有效约束子集, G_2 为无效约束子集. 定义统一约束函数为

$$Z(A_i, \alpha_i) = \begin{cases} \|\mathbf{X}\|_2 = \left(\sum \tilde{\sigma}_{il}^2(A_i, \alpha_i) + \sum \tilde{\delta}_{jl}^2(A_i, \alpha_i) \right)^{\frac{1}{2}} & (\text{若 } G_1 \text{ 为空集合}) \\ -1 & (\text{若 } G_1 \text{ 为非空集合}) \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\|\mathbf{X}\|_2$ 为 $\mathbf{X}$ 的 $\|\cdot\|_2$ 范数.

统一约束函数 $Z(A_i, \alpha_i)$ 具有以下性质:

- (1) 满足 (3) 式中全部约束条件的充分必要条件是 $Z(A_i, \alpha_i) \geq 0$;
- (2) 在满足 (3) 式全部约束条件的情况下, 统一约束函数 $Z(A_i, \alpha_i)$ 等价于最严约束 $\min\{\tilde{\sigma}_{il}(A_i, \alpha_i), \tilde{\delta}_{jl}(A_i, \alpha_i)\}$.

证明 首先证明性质 (1).

充分性 由 (8) 式, 若 $Z(A_i, \alpha_i) \geq 0$, 则 G_1 为空集, 即

$$\tilde{\sigma}_{il}(A_i, \alpha_i) \geq 0, \quad \tilde{\delta}_{jl}(A_i, \alpha_i) \geq 0 \quad \forall \tilde{\sigma}_{il}(A_i, \alpha_i), \tilde{\delta}_{jl}(A_i, \alpha_i) \quad (9)$$

所有约束条件都得到满足.

必要性 由 (8) 式, 若 $Z(A_i, \alpha_i) < 0$, 则 G_1 不为空集, 即至少存在一个 $\tilde{\sigma}_{il}(A_i, \alpha_i) < 0$ 或 $\tilde{\delta}_{jl}(A_i, \alpha_i) < 0$, 不能满足所有约束条件. 性质 (1) 得证.

再证明性质 (2).

最严约束 $\min\{\tilde{\sigma}_{il}(A_i, \alpha_i), \tilde{\delta}_{jl}(A_i, \alpha_i)\} = \|\mathbf{X}\|_1$, 由范数等价关系, 有

$$\min\{\tilde{\sigma}_{il}(A_i, \alpha_i), \tilde{\delta}_{jl}(A_i, \alpha_i)\} = \|\mathbf{X}\|_1 \propto \|\mathbf{X}\|_2 =$$

$$\left(\sum \tilde{\sigma}_{il}^2(A_i, \alpha_i) + \sum \tilde{\delta}_{il}^2(A_i, \alpha_i) \right)^{\frac{1}{2}} = Z(A_i, \alpha_i) \quad (10)$$

性质 (2) 得证.

于是数学模型 (3) 式可化为

P 求 A_i, α_i

$$\left. \begin{aligned} \min W &= \sum_{i=1}^M \rho_i A_i \alpha_i \sum_{j \in G_i} l_j \\ \text{s.t. } Z(A_i, \alpha_i) &\geq 0 \\ A_i &\in S_i = \{A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{iN_i}\} \\ \alpha_i &\in \{0, 1\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

在优化设计中, 设计变量的改变, 同时会引起目标函数的改变及约束函数的改变. 为了综合考虑目标函数的变化与约束函数的变化, 引进以下定义.

定义 当设计变量 A_i 由 A_{ij} 变化到 $A_{i,j-1}$ 时, 约束函数的差商与目标函数的差商的比值

$$\beta_i = \frac{\Delta Z / \Delta A_i}{\Delta W / \Delta A_i} = \frac{\Delta Z}{\Delta W} = \frac{|Z(A_{i,j-1}, \alpha_i) - Z(A_{ij}, \alpha_i)|}{|W(A_{i,j-1}, \alpha_i) - W(A_{ij}, \alpha_i)|} \quad (12)$$

定义为对应于设计变量 A_i 的相对差商.

当设计变量 α_i 由 1 变化到 0 时, 约束函数的差商与目标函数的差商的比值

$$\gamma_i = \frac{\Delta Z / \Delta \alpha_i}{\Delta W / \Delta \alpha_i} = \frac{\Delta Z}{\Delta W} = \frac{|Z(A_{ij}, 0) - Z(A_{ij}, 1)|}{|W(A_{ij}, 0) - W(A_{ij}, 1)|} \quad (13)$$

定义为对应于设计变量 α_i 的相对差商. 其中, $Z_i(A_{i,j-1}, \alpha_i)$, $W_i(A_{i,j-1}, \alpha_i)$ 分别是设计变量 A_i 的值为 $A_{i,j-1}$ 时的约束函数值和目标函数值; $Z_i(A_{ij}, \alpha_i)$, $W_i(A_{ij}, \alpha_i)$ 分别是 A_i 的值为 A_{ij} 时的约束函数值和目标函数值; $Z_i(A_{ij}, 0)$, $W_i(A_{ij}, 0)$ 分别是设计变量 α_i 的值为 0 时的约束函数值和目标函数值; $Z_i(A_{ij}, 1)$, $W_i(A_{ij}, 1)$ 分别是 α_i 的值为 1 时的约束函数值和目标函数值.

在计算 β_i 时, 由静定化假设, 认为各单元内力不变, 各单元的应力可表示为

$$\sigma_{il} = \frac{N_{il}}{A_i} \quad (14)$$

结构的位移可由 Mohr 定理表示为

$$\delta_{jl} = \sum_{k=1}^M \frac{1}{E_k A_k} \sum_{i \in G_k} N_{il} N_{ij} \quad (15)$$

其中, N_{il} , N_{ij} 分别是 i 单元在 l 工况和对应于 j 位移所加单位载荷的虚工况的内力.

当结构拓扑关系变化时, 考虑到单元内力可能有很大的变化, 静定化假设可能不再适用, 在计算 γ_i 时, 单元的内力和结构的位移必须由结构的重分析求得, 为提高计算效率, 可以采用近似结构重分析方法.

由以上定义可见, 相对差商的物理意义是当目标函数有单位增量时约束函数的增量. 由于拓扑优化是由结构基结构开始, 通过删除结构的构件而逐步得到最优拓扑, 为了和这种变化趋势相对应, 在计算 β_i 时按照设计变量 A_i 由 A_{ij} 变化到 $A_{i,j-1}$ 的方向, 这与文 [1] 的方向正好相反.

最轻重量结构优化设计的目的就是在满足结构各项约束条件的前提下, 设计重量最轻的结构. 为达此目的, 显然应改变相对差商最小的设计变量. 令

$$C_k = \min\{\beta_i\}, \quad D_k = \min\{\gamma_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (16)$$

若 $C_k \leq D_k$, 则令 $A_k = A_{k,j-1}$; 若 $C_k > D_k$ 且结构非几何可变, 则令 $\alpha_k = 0$, 删去该组变量所对应的杆件, 形成新的结构, 进行结构重分析及优化迭代过程.

2 算 例

例 1 图 1 所示的四杆桁架, 杆件分为两组, $A_1 = A_3, A_2 = A_4$, 各杆的弹性模量

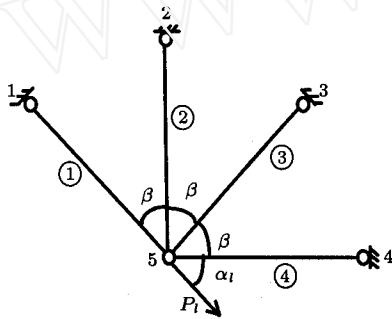


图 1 四杆桁架结构图
Fig.1 Four bar truss

$E = 1$, 杆长 $l = 1$, 杆间夹角 $\beta = 45^\circ$, 应力约束为 $|\sigma| \leq 5$. 三个荷载工况, 工况 1: $P = 40$, $\alpha = 45^\circ$; 工况 2: $P = 30$, $\alpha = 90^\circ$; 工况 3: $P = 20$, $\alpha = 135^\circ$. 各截面的离散变量集为 $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

这是拓扑优化中的一个著名问题, 许多学者曾对本问题进行过研究, 由于存在极限应力, 采用分离变量优化方法很难得到其最优解.

令 $C_1 = 2\rho_1 l_1$, $C_2 = 2\rho_2 l_2$, 包含两类变量的数学模型为

$$\begin{aligned} \min W &= \alpha_1 C_1 A_1 + \alpha_2 C_2 A_2 \\ \text{s.t. } \alpha_i |\sigma_{il}| &\leq 5 \\ A_i &\in S = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \\ \alpha_i &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

各杆的应力分别为

$$\begin{aligned} \sigma_{1l} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{P_l (\cos \alpha_l + \sin \alpha_l)}{A_1 + A_2} \\ \sigma_{2l} &= \frac{P_l \sin \alpha_l}{A_1 + A_2} \\ \sigma_{3l} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{P_l (\cos \alpha_l - \sin \alpha_l)}{A_1 + A_2} \\ \sigma_{4l} &= -\frac{P_l \cos \alpha_l}{A_1 + A_2} \end{aligned}$$

考虑最严约束, 以上应力约束可化为

$$A_1 + A_2 \geq 8$$

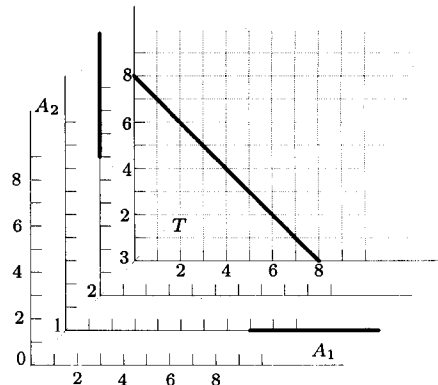


图 2 四杆桁架可行集
Fig.2 Feasible set of four bar truss

其对应的可行集如图 2 所示, 其对应的四个拓扑结构如图 3 所示.

应用本文考虑两类变量的相对差商法可求得问题的最优解 $\{A_1, A_2\}^T = \{0, 6\}^T$, 而采用一般的分离变量优化方法只能求得 $\{A_1, A_2\}^T = \{0, 8\}^T$. 其求解过程如表 1 所示.

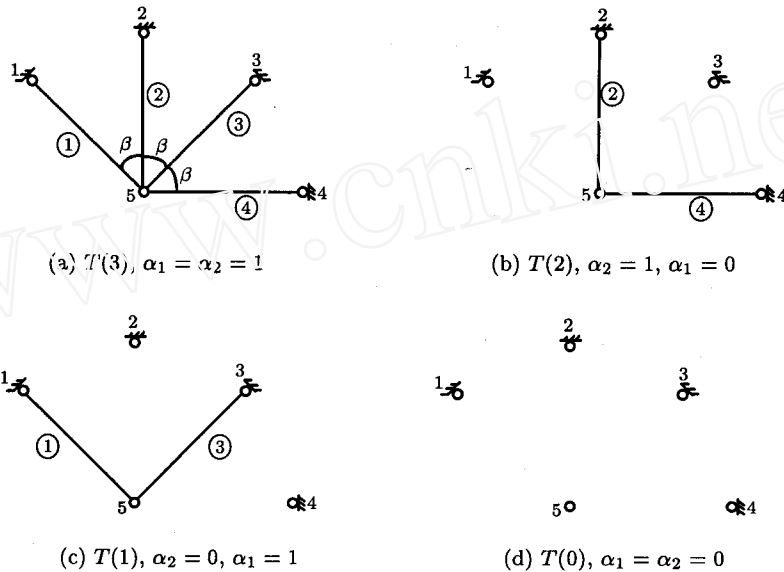


图 3 四杆桁架的四个拓扑结构

Fig.3 Four topological structures

表 1 四杆桁架的求解过程

Table 1 Calculating procedure of four bar truss

Calculating procedure	Relative difference quotient				Design variable			
	β_1	β_2	γ_1	γ_2	A_1	A_2	α_1	α_2
Initial value	0.029	0.029	0.0057	0.014	10	10	1	1
1	0	0.041	0	1	0	10	0	1
2	0	0.050	0	1	0	9	0	1
3	0	0.047	0	1	0	8	0	1
4	0	0.043	0	1	0	7	0	1
5	0	-1	0	1	0	6	0	1

注: 上表中 $\beta_1, \gamma_1 = 0$ 表示已将第一组杆删掉, $\gamma_2 = 1$ 表示若删掉第二组杆则结构将成为机构, 因此不能删掉第二组杆, $\beta_2 = -1$ 表示当 A_2 取其下一个离散值 $A_2 = 5$ 时, 统一约束函数 $Z(A_i, \alpha_i) = -1$, 有的约束条件不满足, 当前解即为优化结果.

由表 1 可见, 在由初始值计算的相对差商中, 最小值为 γ_1 , 优化设计的第一步即令其对应的设计变量 $\alpha_1 = 0$, 首先进行拓扑优化, 在以后的优化过程中, 做的都是截面优化.

例 2 十二杆平面桁架 (见图 4), 有 6 个节点 10 个设计变量, 材料是铝. $E = 68.97 \text{ GN/m}^2$, $\rho = 27150.68 \text{ N/m}^3$, 全部杆件的许用应力均为 $\pm 172.4 \text{ MN/m}^2$, 两个荷载工况, 工况 1: $P_{2y} = -445 \text{ kN}$, 工况 2: $P_{4y} = -445 \text{ kN}$, 各可动节点 y 方向的位移允许值为 50.8 mm , 各杆截面积的下

限均为 6.45 cm^2 , 初始设计值均为 64.5 cm^2 . 离散变量集为: $S = \{6.45, 19.35, 32.26, 51.61, 67.74, 77.42, 64.51, 96.77, 109.68, 141.94, 154.84, 167.74, 180.64, 187.1, 200, 225.81\}\text{ cm}^2$, 优化结果如表 2 所示.

表 2 12 杆桁架优化结果
Table 2 Calculating result of 12 bar truss

	W/kg	Sectional area of each bar/ cm^2											
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}
Reference [3]	20 477	167.74	0	109.68	96.77	51.61	0	32.26	96.77	141.94	0	0	0
Present method	20 122	167.74	19.35	109.68	77.42	0	19.35	32.26	109.68	109.68	32.26	0	0

本例题经过六轮优化收敛, 第一轮首先做面积优化, 然后删去了第 5 杆, 又做面积优化, 然后删去了第 12 杆, 再做面积优化, 然后删去了第 11 杆, 确定了结构的最优拓扑 (见图 6); 后五轮优化只进行了面积优化. 由以上优化过程可见, 拓扑优化和截面优化是交替进行的, 这也说明两类变量是互相耦合的, 采用本算法, 两类变量优化交替进行, 得到了与分离变量的分级算法不同的最优拓扑结构, 且目标函数更优. 如果选定的基结构如图 5 所示的 10 杆桁架, 则优化结果相同. 对不同的初始点所做的对比计算, 优化结果也相同.

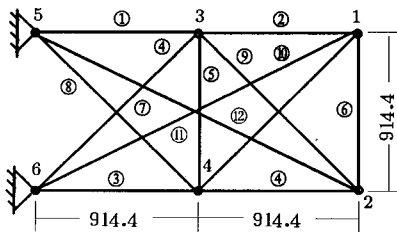


图 4 12 杆桁架
Fig.4 Plane truss with 12 bar

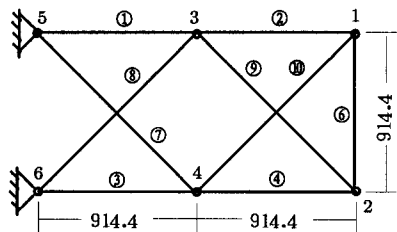


图 5 12 杆桁架最优拓扑
Fig.5 Optimum topology of 12 bars truss

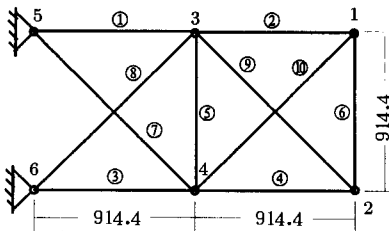


图 6 10 杆桁架
Fig.6 Plane truss with 10 bars

例 3 15 杆桁架如图 7 所示, $E = 210\text{ GN/m}^2$, $\rho = 78.5\text{ kN/m}^3$, $\bar{\sigma} = 160\text{ MN/m}^2$, $\underline{\sigma} = -160\text{ MN/m}^2$. 两个荷载工况, 工况 1: $P_{3y} = P_{5y} = P_{7y} = -4.45 \times 10^5\text{ N}$; 工况 2: $P_{4y} = P_{6y} = P_{8y} = -4.45 \times 10^5\text{ N}$, $M = 8$, 分组情况如表 3 所示, 结点 5 的 y 方向有 $\pm 1.524\text{ cm}$ 的位移约束.

表 3 变量连结

Table 3 Elements in each group

Group number	1	2	3	4	5	6	7	8
Bar number	1, 2	3, 4	5, 6	7, 8	9, 10	11, 12	13, 14	15

表 4 15 杆桁架优化结果

Table 4 Optimum solutions of the truss with 15 bars

	W/N	Sectional area/cm ²							
		A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈
Reference [3]	4859	83.87	45.16	32.26	0	6.45	6.45	6.45	70.97
Present method	4859	83.87	45.16	32.26	0	6.45	6.45	6.45	70.97

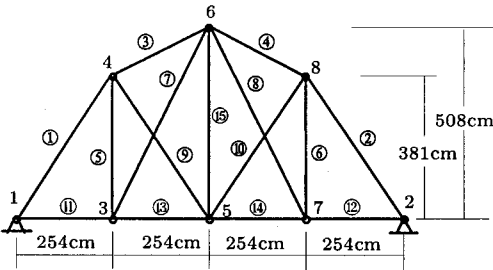


图 7 15 杆桁架
Fig.7 Truss with 15 bars

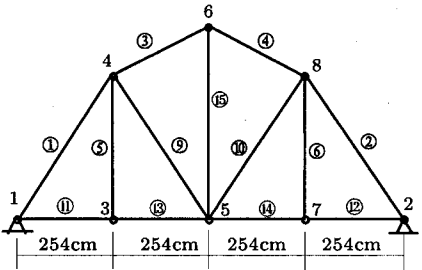


图 8 15 杆桁架最优拓扑
Fig.8 Optimum topology

截面离散集为： $S = \{6.45, 9.68, 22.58, 32.26, 45.16, 70.97, 83.87, 103.23, 129.03, 161.29, 193.55\} \text{ cm}^2$.

优化结果如表 4 所示，最优拓扑如图 8 所示。

在该例题的优化过程中，第一轮首先删去了第 7, 8 杆，然后是面积优化；第二轮全都是面积优化，经过两轮迭代，算法就收敛了。

例 4 25 杆空间桁架有 10 个节点（见图 9）， $E = 6.897 \times 10^4 \text{ N/cm}^2$ ， $\rho = 0.0277 \text{ N/cm}^2$ 。由对称性，将 25 根杆分为 8 组，即有 8 个设计变量。位移约束是节点 1 和 2 在 x, y 方向的位移不超过 $\pm 0.889 \text{ cm}$ 。截面离散集为： $S = \{0.774, 1.255, 2.142, 3.348, 4.065, 4.632, 6.542, 7.742, 9.032, 10.839, 12.671, 14.581, 21.483, 34.839, 44.516, 52.903, 60.258, 65.226\} \text{ cm}^2$ ，变量连接情况、许用应力和荷载工况分别列于表 5~表 7。

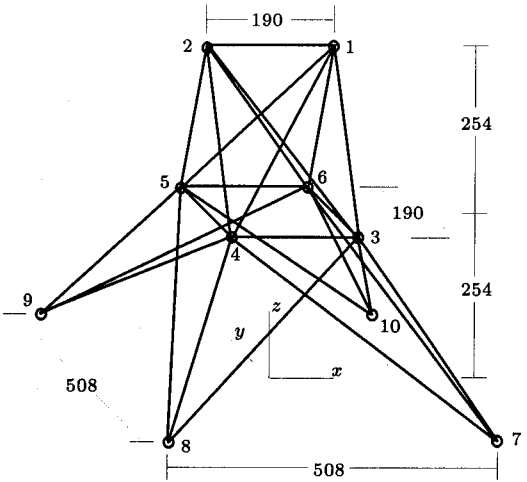


图 9 25 杆桁架结构图
Fig.9 Truss with 25 bars

表 5 许用应力
Table 5 Allowable stress

Group No.	σ	$\bar{\sigma}$
1	-24 204	27 590
2	-7 994	27 590
3	-11 936	27 590
4	-24 204	27 590
5	-24 204	27 590
6	-4 662	27 590
7	-4 662	27 590
8	-7 604	27 590

表 6 变量连接情况
Table 6 Elements in each groups

Group No.	Bar No.
1	1-2
2	1-4, 2-3, 1-5, 2-6
3	2-5, 2-4, 1-3, 1-6
4	3-5, 4-5
5	3-4, 5-6
6	3-10, 6-7, 4-9, 5-8
7	3-8, 4-7, 6-9, 5-10
8	3-7, 4-8, 5-9, 6-10

表 7 荷载工况
Table 7 Load case

Load case	Node	P_x/kN	P_y/kN	P_z/kN
1	1	4.45	44.5	-22.25
	2	0	44.5	-22.25
	3	2.225	0	0
	6	2.225	0	0
2	1	0	89	-22.25
	2	0	-89	-22.25

表 8 25 杆桁架优化结果
Table 8 Optimum solutions of truss with 25 bars

Design variable	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	W
Reference [4]	0	12.671	21.483	0	0	6.542	14.581	14.581	2750
Present method	0	12.671	21.483	0	0	3.348	12.671	21.483	2733.5

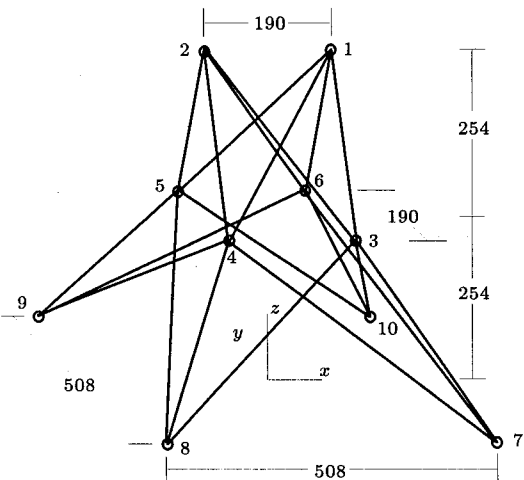


图 10 25 杆桁架最优拓扑
Fig.10 Optimum topology of truss with 25 bars

本例由相对差商法，经过两次迭代就收敛，优化结果如表 8 所示，最优拓扑如图 10 所示。

在该例题中，第一轮优化一开始就删去了杆 1，紧接着删去了杆 12, 13, 然后分别对杆 10, 11 和 14, 15 做几次面积优化，又删去了杆 10, 11; 最后全部都是面积优化。第二轮全部都是面积优化，没有进行删杆优化，实际上，当前的结构已经不能再删杆，否则将变成机构(见图 10)。

3 讨 论

通过本文的研究可以看出，将两类变量分离考虑，尽管将问题的难度降低了，但由于忽略了截面变量与拓扑变量间的耦合关系，很难

求得问题的最优解. 在离散变量结构拓扑优化设计中, 根据截面变量与拓扑变量均为离散值的特点, 将两类变量统一起来作为组合优化问题进行求解, 这样充分考虑了截面变量与拓扑变量间的耦合关系, 反映了拓扑优化的本质, 可以较好地解决“极限应力”、“最优解的奇异性”等困扰结构拓扑优化设计的问题. 本文采用相对差商法进行离散变量拓扑优化, 直接求解包含两类变量的离散变量结构拓扑优化设计数学模型, 收到了比较满意的效果.

参 考 文 献

- 1 Chai S, Sun H. A relative difference quotient algorithm for discrete optimization. *Structural Optimization*, 1996, 12(1): 45~56
- 2 Cheng G. Some aspects of truss topology optimization. *Structural Optimization*, 1995, 10(3): 173~179
- 3 王跃方, 孙焕纯. 多工况多约束下离散变量结构拓扑优化设计. 力学学报, 1995, 27(3) (Wang Y, Sun H. The topology optimization of structure with discrete variables under multiload case and multiconstraint. *Acta Mechanica Sinica*, 1995, 27(3) (in Chinese))
- 4 孙焕纯, 柴山, 王跃方. 离散变量结构优化设计. 大连理工大学出版社, 大连, 1995 (Sun HC, Chai S, Wang YF. The structure optimization design with discrete variables. Dalian, China: Dalian University of Technology Press (in Chinese))
- 5 孙焕纯, 柴山, 王跃方. 离散变量结构优化设计的发展、现状及展望. 力学与实践. 1997, 19(4): 7~11 (Sun HC, Chai S, Wang YF. The development, present and future of the structure optimization with discrete variables. *Mechanics and Practice*, 1997, 19(4): 7~11 (in Chinese))
- 6 段宝岩, 何明. 桁架结构的拓扑优化设计. 上海力学, 1990, 11(2) (Duan BY, He M. The topology optimization of truss. *Shanghai Mechanics*, 1990, 11(2) (in Chinese))

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF TRUSS STRUCTURES WITH DISCRETE VARIABLES INCLUDING TWO KINDS OF VARIABLES¹⁾

Chai Shan

(Shandong Inst. of Tech., Zibo 255012, China)

Shi Lianshuan Sun Huanchun

(Dalian Univ. of Tech., Dalian 116023, China)

Abstract Because the topology of structure and the sizes of cross sections must be designed in the topology optimization, two kinds of variables, topology variables α_i and size variables of cross sections A_i are included in the mathematics model of topology optimization. The model is a mixed discrete programming or a pure discrete one including two kinds of variables. It is more complex and difficult to be solved than sizing optimization of structures, so it is a challenging problem in the field of structural optimization, and it is a focus in the optimization of structures. Comparing with the topology optimization of continuous variables, the development of topology optimization of discrete variables is slower because of the limitation of development in sectional sizing optimization of structures with discrete variables.

Received 20 October 1997, revised 16 April 1998.

1) The project supported by the Natural Science Foundation of Shandong Province.

The basic method for topology optimization is based on ground structure. A set of nodes is constructed according to the given supporting conditions, load cases and other conditions, and the nodes are linked by members to form the initial ground structure. The all topological forms of structure can be obtained by the combinations of members in the initial ground structure. This problem is expressed as the combination of programming P_1 of sectional sizing optimization with the lower limitation of zero and other programming P_2 only including the topological variables.

After obtained the optimum solution of P_1 , the topological optimization is done by canceling some members of zero sectional area and some other members according to some canceling or resuming rules. In fact, this is an optimization method of separating variables. The sectional variables and topological variables are separated and solved respectively. Its advantages are relative less computational efforts and higher computational efficiency. But there are stronger coupling relations between topological variables and sectional variables of actual structures. If the coupling relations are neglected, the optimum solution (or local optimum solution) may not be obtained. In addition, some difficult problems, such as "the limiting stress" and "singular of optimization solution" must be faced. To overcome the problems caused by separating the variables, two kinds of variables should be treated together through the total procedure of optimization.

In this paper, a mathematical model of topology optimization of truss structures with discrete variables including two kinds of variables is developed. The model has considered the coupling relations between cross section variables and topological variables, so that it reflects the innate characters of topology optimization as a combinatorial optimization problem. And the problems such as the "limit stress" and "the singular solution of structural optimization" can be solved by using this model. The model of topology optimization of truss structures with discrete variables including two kinds of variables are solved directly by using the relative difference quotient algorithm. The computational results are satisfactory and some new topologies and better solution are obtained.

Key words discrete variables, topology, optimum design of structures, combinatorial optimization