

分数维空间中的损伤力学研究初探¹⁾

谢和平 鞠 杨

(中国矿业大学北京校区, 北京 100083)

摘要 结合损伤力学和分形几何理论, 给出分数维空间中分形损伤变量定义 (d_f) 及其解析表达式. 指出欧氏空间损伤变量 d_0 实际是分数维空间分形损伤变量 (d_f) 当维数取 Euclidean 维数时的一种特例, 将欧氏空间损伤变量定义推广到分数维空间, 建立起一种兼顾反映损伤微观结构效应和宏观损伤力学分析需要的损伤定义与描述方法. 在此基础上, 推导了材料损伤演化律和损伤本构关系的分形表达形式. 作为例证, 文中分析了单调压缩载荷下混凝土损伤及演化行为. 实验对比分析表明: 分形损伤模型较好地反映了混凝土实际损伤力学行为.

关键词 损伤, 分形, 分数维空间, 分形损伤变量, 分形损伤演化律, 分形损伤本构关系

引 言

诱发材料宏观物理力学性能劣化的内部微裂纹或孔隙发育、演化行为称作损伤. 选择恰当的损伤变量描述损伤及其演化律, 建立损伤宏观力学响应与微细观结构效应之间的定量关系是损伤力学研究最基本、同时也是最感兴趣的问题之一.

作为损伤间接描述方法, 与微细观描述相比, 宏观唯象描述具有可直接用于宏观损伤力学分析的优越性, 因而得到了普遍应用和发展^[1~4]. 然而这种方法不能直观反映损伤微细观物理机制, 且多数情况下损伤定义缺乏明确的物理意义, 损伤演化律和本构关系等力学分析模型也多通过实验拟合确定, 属经验或半经验性模型, 适用性较差. 因此, 建立一种既反映损伤细观结构效应、又便于宏观损伤力学分析的损伤变量定义和描述方法, 对于发展和应用宏细观相结合的损伤力学理论, 解决工程实际问题具有重要和现实的意义.

近年来分形几何方法得到广泛应用, 并已成为定量描述材料损伤断裂宏细观力学行为的有力工具^[5~14]. 但目前研究集中于探讨损伤行为的分形特征, 主要依赖实验数据拟合损伤分形描述与宏观力学量之间的对应关系, 分析模型基本属于经验性模型, 局限性较强. 一般来讲, 分形物体或分形结构的物理力学行为呈现分形特征. 一个具有分形性质的物体或材料, 其内部结构可能也是一种分形^[5~11]. 因此, 需要在分形空间中考虑并建立描述分形损伤行为的力学量和力学定律的表达式和运算法则^[12~14]. 目前尚未见到这方面的系统研究.

本文目的是依据材料损伤演化具有分形性质的基本事实^[4~17], 结合损伤力学与分形理论, 提出一种兼顾损伤细观特征描述和宏观损伤力学分析需要的分形损伤变量, 并给出损伤演化律和损伤本构模型的分形表达式. 尝试将欧氏空间损伤力学中的损伤变量、损伤演化律和损伤本构模型推广到分数维空间, 探索分数维空间中描述分形损伤现象及相关力学行为的基本理论与方法. 作为实例, 文中分析了单调压缩载荷作用下混凝土材料的损伤及演化行为, 并与实验结果进行了对比.

1997 - 05 - 04 收到第一稿, 1998 - 07 - 14 收到修改稿.

1) 国家杰出青年科学基金(59425003)、国家教委跨世纪优秀人才基金、国家自然科学基金(19702021)、煤炭科学基金(97建 10202) 资助项目.

1 分形损伤变量定义

1.1 分形损伤域与分形损伤余域

研究表明:材料损伤过程中损伤区微裂纹常呈现类似图 1 所示的分布及演化特征,损伤区微裂纹分布、结构及演化具有明显的统计自相似性,表现为分形^[9, 11~13, 15~17].

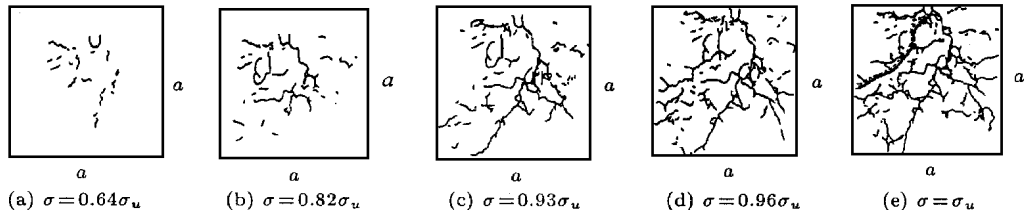


图 1 损伤区微裂纹的分形分布及演化特征^[15,16](图中 a 为区域的周界长度)

Fig. 1 Characteristics of fractal distribution and evolution of micro/ meso cracks^[15,16]

(a is the side length of boundary of the area)

假定 R^n 空间中材料承载单元内的分形损伤微裂纹分布如图 2 所示(如岩石、混凝土等).抽象地,令 E_0 表示 R^n 空间中一个典型承载单元内所有组份的集合,包括晶格或集料、微细观裂纹等,称该集合在空间 R^n 所占的区域为一个“典型域”.令集合 E 代表 R^n 空间中呈分形分布的微细观裂纹的全体,称 E 在空间 R^n 中所占的区域为“分形损伤域”,简称“损伤域”.令 \bar{E} 代表 R^n 空间中集合 E_0 内除微细观裂纹以外的所有组成元素的全体,称 \bar{E} 在空间 R^n 所占的区域为“分形损伤余域”,简称“损伤余域”.损伤余域可以看作是从典型域中“抠去”损伤域后形成的一种空间.可以看出, R^2 空间(即平面空间)中, E_0 对应于边长为 a 的整个区域(如图 2), E 对应于平面内的损伤裂纹全体, \bar{E} 对应于除损伤裂纹以外的平面区域.

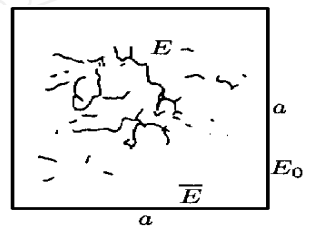


图 2 典型分形损伤单元
Fig. 2 Representative fractal damage element

根据差集^[5, 9, 12~14, 18]定义,损伤余域集合 \bar{E} 可由差集表示为:

$$\bar{E} = E_0 - E = E_0 \setminus E \tag{1}$$

式中, $E_0 \setminus E$ 表示属于 E_0 但不属于 E 的元素集合.

根据集合和分形几何理论^[5, 9, 12~14, 18],代表各区域的集合在数学上满足以下关系:

$$E \subseteq E_0, \quad \bar{E} \subseteq E_0, \quad E \cup \bar{E} = E_0 \tag{2}$$

1.2 损伤域、损伤余域的测度及其 Hausdorff 测度

1.2.1 损伤域、损伤余域的测度

根据测度理论^[5, 9, 12~14, 18],若任意集合 $A_i \subset R^n$,令 $M(A_i)$ 表示集合 A_i 的测度,对于 R^n 的每个子集的 M 均赋予一非负实数或 ∞ ,有以下关系成立:

- (a) $M(\emptyset) = 0$,其中 \emptyset 为空集;
- (b) 若集合 $A, B: A \subset B$,则 $M(A) \leq M(B)$;

(c) 若 $A_i (i = 1, 2, \dots, K)$ 是一组 K 个有限集序列,即: $M\left(\bigcup_{i=1}^K A_i\right) \leq \sum_{i=1}^K M(A_i)$;

(d) 若 A_i 为不交的 Borel 集, 则 $M\left(\bigcup_{i=1}^K A_i\right) = \sum_{i=1}^K M(A_i)$.

根据测度定义和基本性质, 若集合 A, B 是可测集, 且 $A \cap B = \emptyset$; 若 $C = A \cup B$, 则 C 也是可测集. 由可测集的完全可加性质, 有

$$M(C) = M(A) + M(B) \quad (3)$$

注意, 这里的测度指集合的抽象测度, 任意具体形式的测度均满足关系式(3).

不失一般性, 定义 $M(E)$, $M(\bar{E})$ 和 $M(E_0)$ 分别表示空间 R^n 中损伤域, 损伤余域及典型域 E , \bar{E} 和 E_0 的测度. 由于集合 E, \bar{E} 可测且互不相交, $E \cap \bar{E} = \emptyset$, 而且满足关系式(2), 即

$$E_0 = E \cup \bar{E} \quad (E_0 \setminus E) = \bar{E} \quad (E_0 - E) \quad (4)$$

故 E_0 为可测集, 由关系式(3)得

$$M(E_0) = M(E) + M(\bar{E}) \quad (5)$$

或

$$M(\bar{E}) = M(E_0) - M(E) \quad (6)$$

式(5)或(6)给出了损伤域、损伤余域和典型域的集合测度之间的相互关系.

1.2.2 损伤域、损伤余域的 Hausdorff 测度

Hausdorff 测度是集合测度的一种具体形式, 表征任意维被测集合的大小, 它是被测对象在 Euclidean 空间中的长度(1 维)、面积(2 维)和体积(3 维)在任意维数空间中的推广. 因此, 可以用集合 E, \bar{E} 和 E_0 的 Hausdorff 测度来定量表征分形损伤域、损伤余域和典型域在 R^n 空间中所占区域大小.

以损伤域 E 为例, 由 Hausdorff 测度及等价定义^[5,9,12~14,18], 令 $\{B_i\}$ 是集合 E 的一族覆盖球族, $E \subset \bigcup_i B_i$, 给定任意一个覆盖球族 B_i 对应于无量纲码尺 $\rho_i = r_i/a$ (这里 r_i 为有量纲度量码尺, a 为被覆盖区域的特征尺寸. 在 R^2 平面区域上 a 为区域的边长); 对任意一个非负实数 $0 < \rho < 1$, 有 $0 < \max(\rho_i) \leq \rho$. 由 Hausdorff 测度定义, 给定一个非负实数 d , E 的 Hausdorff 测度可表示为

$$H(d, E) = \liminf_{\rho \rightarrow 0} \left\{ C_{(E)} \sum_{i=1}^d \rho_i^d : \{B_i\} \text{ 是 } E \text{ 的 } \rho\text{-球覆盖} \right\} \quad (7)$$

其中 d 为集合 E 的 Hausdorff 维数, $C_{(E)}$ 为反映量纲的常数.

同理, 对于相同的 ρ -球覆盖 $\{B_i\}$, 集合 \bar{E} 和 E_0 的 Hausdorff 测度可分别表示为

$$H(\bar{d}, \bar{E}) = \liminf_{\rho \rightarrow 0} \left\{ C_{(\bar{E})} \sum_{i=1}^{\bar{d}} \rho_i^{\bar{d}} : \{B_i\} \text{ 是 } \bar{E} \text{ 的 } \rho\text{-球覆盖} \right\} \quad (8)$$

$$H(d_e, E_0) = \liminf_{\rho \rightarrow 0} \left\{ C_{(E_0)} \sum_{i=1}^{d_e} \rho_i^{d_e} : \{B_i\} \text{ 是 } E_0 \text{ 的 } \rho\text{-球覆盖} \right\} \quad (9)$$

其中 \bar{d}_f, d_e 分别表示损伤余域集合 \bar{E} 和典型域集合 E_0 的 Hausdorff 维数, $C_{(\bar{E})}, C_{(E_0)}$ 为反映量纲的常数. 注意到, 任意集合 X 的 Hausdorff 测度 $H(d, X)$ 当 Hausdorff 维数 d 取整数 n 时, $H(d, X)$ 与其 n 维 Lebesgue 测度相差一个常数项^[5,9,12~14,18]. 由于任一集合 X 的 n 维

Lebesgue 测度代表被测集在整数维空间中的广义面积和体积,故 n 维 Hausdorff 测度 $H(n, E)$, $H(n, \bar{E})$ 和 $H(n, E_0)$ 实际代表任意整数维空间中的损伤域 E , 损伤余域 \bar{E} 和典型域 E_0 的欧氏广义面积或体积,即不考虑分形效应时的表观面积或体积. 从这个意义上讲,测度 $H(d, E)$, $H(\bar{d}, \bar{E})$ 和 $H(d_e, E_0)$ 实际是整数维空间各区域的欧氏面积或体积在分数维空间中的推广,即考虑分形特征时各区域的广义面积或体积.

1.3 分形损伤变量定义

欧氏空间损伤力学理论中表观损伤变量的一个最基本定义为^[1~4]

$$\sigma_0 = A/A_0 = 1 - \bar{A}/A_0 \tag{10}$$

其中 A 为承载面的损伤面积, \bar{A} 为损伤后的有效截面积, A_0 为承载面的初始截面积,这里面积指二维欧氏空间中各区域的表观面积. 本文称欧氏空间损伤变量 σ_0 为表观损伤变量.

众所周知,一个客观物理量的定义、力学本质和力学定律在任何度量空间中均应是普适的,具有客观不变性^[19,20]. 研究分数维空间中的力学理论的基本假设是^[12~14]: 经典力学的物理假设和定义在分数维空间中仍然成立;物理假设、定义和力学定律具有形式不变性. 这里形式不变并不意味着完全等同,分数维空间中的力学量可能由不同的形式来表述.

考虑到式(10)是欧氏整数维空间中不考虑损伤分形效应时的损伤变量定义,对分形损伤行为而言,类比表观损伤变量定义,可采用分形损伤区域的广义面积或体积 $H(d, E)$, $H(\bar{d}, \bar{E})$ 和 $H(d_e, E_0)$ 来定义分形损伤变量,即

$$\sigma(d) = \frac{H(d, E)}{H(d_e, E_0)} = 1 - \frac{H(\bar{d}, \bar{E})}{H(d_e, E_0)} \tag{11}$$

其中 $H(d, E)$, $H(\bar{d}, \bar{E})$ 和 $H(d_e, E_0)$ 分别表示分数维空间中考虑分形效应时的损伤域 E 、损伤余域 \bar{E} 和典型域 E_0 的广义面积或体积. 不难看出:当维数 d 或 \bar{d} 取 Euclidean 整维数 2.0 时,测度 $H(d, E)$, $H(\bar{d}, \bar{E})$ 和 $H(d_e, E_0)$ 为被测区域的欧氏面积: $H(2, E) = A$, $H(2, \bar{E}) = \bar{A}$, $H(2, E_0) = A_0$, 定义式(11)退化为式(10). 表明欧氏空间表观损伤变量 σ_0 实际是分形损伤变量 $\sigma(d)$ 在 Hausdorff 维数 d 或 \bar{d} 取 Euclidean 维数时的一种特例,分形损伤变量是欧氏空间表观损伤变量在分数维空间中的推广. 需要说明的是,式(11)表明,损伤域和损伤余域的维数 d 和 \bar{d} 不相互独立. 故这里分形损伤变量仅表示成了 $\sigma(d)$ 的形式.

1.4 分形损伤变量的解析表达形式

类似于自然和物理分形现象,损伤分形不同于严格的数学分形,是有限范围内的分形. 具有分形特征的损伤域 E 实际是一个有标度的分形区域,因此,对损伤域 E 的 ϵ -球覆盖是存在上、下限的有限次覆盖.

特征标度 $0 < r_l \leq r_i \leq r_u$ 范围内(r_l, r_u 指分形标度域的上、下限, r_l 取决于细观结构的特征尺度),取 ϵ -球覆盖的无量纲码尺 ϵ_i 充分小: $0 < \epsilon_l \leq \epsilon_i \leq \epsilon_u \leq 1$, 其中 $\epsilon_l = r_l/a$, $\epsilon_u = r_u/a$. 以空间 R^n 中的损伤区域为例,假设当前标度下对应于无量纲码尺 $\epsilon_i \leq \epsilon_l$ 的 ϵ -球覆盖, d 维损伤域 E 存在 $N_{(d)}(\epsilon)$ 次的有限次覆盖; \bar{d} 维损伤余域 \bar{E} 存在 $N_{(\bar{d})}(\epsilon)$ 次的有限次覆盖;典型域 E_0 存在 $N_{(d_0)}(\epsilon)$ 次的有限次覆盖,那么,根据式(7) ~ (9),分形损伤域 E , 损伤余域 \bar{E} 及典型域 E_0 的测度即它们的广义面积或体积可足够精确地表示为

$$H(d, E) = \liminf_{i \rightarrow 0} \left\{ C_{(E)} \sum_{i=1}^{N(d)} d_i^d \right\} = C_{(E)} N_{(d)}(\cdot) d \tag{12}$$

$$H(\bar{d}, \bar{E}) = \liminf_{i \rightarrow 0} \left\{ C_{(\bar{E})} \sum_{i=1}^{N(\bar{d})} \bar{d}_i^{\bar{d}} \right\} = C_{(\bar{E})} N_{(\bar{d})}(\cdot) \bar{d} \tag{13}$$

$$H(d_e, E_0) = \liminf_{i \rightarrow 0} \left\{ C_{(E_0)} \sum_{i=1}^{N(d_e)} d_i^{d_e} \right\} = C_{(E_0)} N_{(d_e)}(\cdot) d_e \tag{14}$$

将式(12) ~ (14)代入式(11)中,分形损伤变量 (d, \cdot) 改写为

$$(d, \cdot) = \frac{C_{(E)} N_{(d)}(\cdot) d \cdot d_e}{C_{(E_0)} N_{(d_e)}(\cdot) d_e} = 1 - \frac{C_{(\bar{E})} N_{(\bar{d})}(\cdot) \bar{d} \cdot d_e}{C_{(E_0)} N_{(d_e)}(\cdot) d_e} \tag{15}$$

引入初始条件:当损伤域 E 和损伤余域 \bar{E} 的 Hausdorff 维数取 Euclidean 维数,即 $d = d_e, \bar{d} = d_e$ 时,分形损伤变量 (d, \cdot) 为表观损伤变量 \cdot_0 ,即: $(d, \cdot) |_{d=d_e \text{ 或 } \bar{d}=d_e} = \cdot_0$. 注意到,对任一确定的损伤状态而言, $N_{(d)}(\cdot), N_{(\bar{d})}(\cdot)$ 和 $N_{(d_e)}(\cdot)$ 仅与 \cdot -球覆盖的码尺 \cdot 相关,为 \cdot 的函数.分形损伤变量表达式(15)改写成

$$(d, \cdot) = \cdot_0 d \cdot d_e \text{ 或 } (d, \cdot) = 1 - (1 - \cdot_0) \bar{d} \cdot d_e \tag{16}$$

该式即为用分形域维数和度量码尺表征的分形损伤变量的解析表达式,其中 d, \bar{d} 分别为损伤域和损伤余域的 Hausdorff 维数, d_e 为典型域的 Euclidean 维数, \cdot_0 为欧氏空间表观损伤变量.考虑到 Hausdorff 维数的等价定义和盒维数定义,实际应用中维数 d, \bar{d} 可近似取为分形集的盒维数即分形维数,因此式(16)实际给出了以分形维数 d (或 \bar{d}) 和度量码尺 \cdot 表征的分形损伤变量.对于图 2 的 R^2 平面空间中的分形损伤行为,分形损伤变量可具体写成为

$$(d, \cdot) = \cdot_0 d \cdot 2 \text{ 或 } (d, \cdot) = 1 - (1 - \cdot_0) \bar{d} \cdot 2 \tag{17}$$

1.5 分形损伤变量 $\cdot - d$ 和 $\cdot - \bar{d}$ 的相关性

式(16)表明分形损伤变量 (d, \cdot) 与损伤域分维 d (或损伤余域的分维 \bar{d}) 和度量码尺 \cdot 相关.事实上,研究证实损伤过程中不同时期材料的损伤程度不同,损伤域不同,损伤域分维 d 随之变化^[9,11~14,17].因而分形损伤变量 (d, \cdot) 必然与损伤域分维 d 有关.由于损伤区分维表征损伤分布及演化的不规则性,因而分形损伤变量实际反映了损伤分布及演化不规则性对损伤量的影响.另一方面,对一个确定的损伤状态而言,损伤域分维 d (或损伤余域分维 \bar{d}) 是不变量,当考虑微细观裂纹分布和结构的分形效应时,由于具有精细结构,因而当度量码尺 \cdot 由大到小变化时,观测到的微细观裂纹的数目和精细结构增多,分形损伤量 (d, \cdot) 增大.这与考虑分形效应时的分形裂纹扩展长度 $L_{(d_f)}$ 与度量码尺 \cdot 之间关系 $L_{(d_f)} = L_0 \cdot^{1-d_f}$ 十分相似(L_0 为不计裂纹分形结构效应时的表观裂纹扩展长度, d_f 为分形维数)^[7,9,11~14].当不计损伤分形效应,即损伤区分维 $d = d_e$ 时,由式(16)知,分形损伤变量 $(d, \cdot) = \cdot_0$,与度量码尺 \cdot 无关,分形损伤变量退化为欧氏空间中的表观损伤变量.可见,正是由于考虑损伤分形效应,分形损伤变量 (d, \cdot) 才随度量码尺的变化而变化.分形损伤变量反映了材料微细观结构对损伤量的影响.数学意义上, $0 < \cdot_0 < 1, 0 < d \leq d_e$, 由定义式(16)有: $\cdot_0 \leq (d, \cdot) = \cdot_0 d \cdot d_e <$

表明当分形损伤域的度量码尺无限细分时,分形损伤量 $(d,)$ 趋于无穷大.然而在物理意义上,损伤是一种有标度域的自然分形,即: $0 < l < i < u < 1$, 下限 l 取决于材料微细观结构,与所研究问题的最小特征尺度有关;上限 u 为被覆盖区域的宏观尺度.因此,分形损伤变量 $(d,)$ 实际被界定在有限范围

$$0 \leq d_0 = (d, u) \leq (d,) \leq (d, l) \leq 1 \tag{18}$$

之内(本文以下实例将具体分析这一点).在该有限范围内,分形损伤量 $(d,)$ 大于等于表观损伤量,并随度量码尺的减小而增大.分形损伤变量与度量码尺的相关性是分形损伤变量 $(d,)$ 区别于欧氏空间表观损伤变量的重要特征.

可见,分形损伤变量 $(d,)$ 分别通过分维 d 和分形度量码尺 定量反映了损伤分布及演化的不规则性和材料微细观结构对损伤量的影响,它是表观损伤变量 d_0 在考虑损伤分形效应时的推广.该定义的各参数物理意义明确,容易确定,适用于宏观损伤力学分析.

2 分形损伤演化律

损伤变量定量描述了损伤全过程某一确定的损伤状态.损伤演化律则表征各个损伤状态演化所遵循的基本规律.类比欧氏空间的损伤演化分析方法^[1~4],可根据与分形损伤有关的耗散势来构造分形损伤演化律.

考虑损伤分形效应,分数维空间中与分形损伤有关的耗散势可表达为^[1~4,17]

$$F(Y(d,); (p, (d,))) = \frac{Y^2(d,)}{2m(d)[1 - (d,)]} H(p - p(d,)) \tag{19}$$

式中: $(d,)$ 为分形损伤变量; $Y(d,)$ 为考虑损伤分形效应时的分形损伤应变能释放率,可表示为:

$Y(d,) = \frac{w_e(d,)}{1 - (d,)}$,其中 $w_e(d,)$ 为计及损伤分形效应的弹性应变能密度函数: $w_e(d,) = 1/2 \int_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} [1 - (d,)]$; $m(d)$ 为与分维有关材料常数; $H(p - p(d,))$ 为考虑损伤演化阈值现象而引入的阶跃函数,即当累积塑性应变 p 超过阈值 $p(d,)$ 时方产生损伤,有:

$$H(p - p(d,)) = \begin{cases} 1 & p \geq p(d,) \\ 0 & p < p(d,) \end{cases}, \text{其中 } p(d,) \text{ 为对应于分形损伤起始时的累积塑性应变阈值.}$$

由不可逆热力学状态律^[1~4,17],分形损伤演化律可表示为

$$\dot{(d,)} = \frac{\partial F(Y(d,); (p, (d,)))}{\partial Y(d,)} \cdot (d,) \tag{20}$$

其中 $(d,)$ 为考虑分形效应时的标量乘子函数^[1~4,17]: $\dot{(d,)} = \dot{p}[1 - (d,)]$.代入 $\dot{(d,)}$ 和式(19)有

$$\dot{(d,)} = \frac{Y(d,)}{m} \dot{p} H(p - p(d,)) \tag{21}$$

或

$$\dot{(d,)} = \frac{w_e(d,)}{m[1 - (d,)]} \dot{p} H(p - p(d,)) \tag{22}$$

式(21)或(22)为分形损伤演化律的一般表达式.

引入关系 $(d,) = d_0^{d-d_e}$,得到考虑损伤分形效应时的损伤演化律

$$\dot{d}_0 + d \ln d_0 = \frac{w_e(d,) \cdot d_e^{-d}}{m[1 - (d,)]} \dot{p} H(p - p(d,)) \tag{23}$$

其中： $\dot{\epsilon}$ 表示表观损伤变化率， \dot{d} 表示损伤域分维值变化率， p 为表示累积塑性应变. 当不考虑损伤分形效应时，分形维数 $d = d_e$ ，式(23)退化为欧氏空间表观损伤演化律

$$\dot{\epsilon} = \frac{w_e}{m(1 - \nu)} \dot{p} H(p - p_0) \tag{24}$$

3 分形损伤本构关系

不失一般性,考虑材料弹塑性损伤行为,由不可逆热力学原理^[1~4],空间 R^n 中考虑损伤分形效应的势函数 F 可以表示为^[17]

$$F(d, \epsilon) = (\tilde{\epsilon} - X)_{eq, (d, \epsilon)} - R - \nu \epsilon + \frac{3}{4X} X_{ij} X_{ij} - F(d, \epsilon) (Y(d, \epsilon) : (\tilde{\epsilon}, (d, \epsilon))) \tag{25}$$

式中前三项 $(\tilde{\epsilon} - X)_{eq, (d, \epsilon)} - R - \nu \epsilon$ 为加载函数， R 表示各向同性硬化引起的应力， ν 表示材料屈服应力， $(\tilde{\epsilon} - X)_{eq, (d, \epsilon)} = \left[\frac{3}{2} \left(\frac{ij}{1 - (d, \epsilon)} - X_{ij} \right) \left(\frac{ij}{1 - (d, \epsilon)} - X_{ij} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$ ， ij 表示应力偏张量， X_{ij} 为随动应变强化引起的应力偏张量；势函数第四项与非线性运动硬化有关的， X 为表征非线性运动硬化的特征量. $F(Y(d, \epsilon) : (\tilde{\epsilon}, (d, \epsilon)))$ 项为与分形损伤演化有关的势， $\tilde{\epsilon}$ 表示与 R 相伴产生的损伤累积塑性应变， $Y(d, \epsilon)$ 为分形应变能释放率.

根据不可逆热力学状态律^[1~4],计及损伤分形效应的材料本构方程可写成为^[17]

$$p_{ij, (d, \epsilon)} = \frac{\partial F(d, \epsilon)}{\partial ij} \cdot (d, \epsilon) \tag{26}$$

代入 (d, ϵ) ，关系式(25)和分形损伤变量表达式 $(d, \epsilon) = \epsilon_0^{d - d_e}$ ，有

$$p_{ij, (d, \epsilon)} = \frac{\partial}{\partial ij} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{ij}{1 - \epsilon_0^{d - d_e}} - X_{ij} \right) \left(\frac{ij}{1 - \epsilon_0^{d - d_e}} - X_{ij} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \dot{p} (1 - \epsilon_0^{d - d_e}) \tag{27}$$

该式即为考虑损伤分形效应的材料分形损伤本构关系. 其中 ϵ_0 为表观损伤量； d 为 R^n 空间损伤域分维值； ϵ_0 为分形度量咫尺,反映材料微细观结构的特征尺度； d_e 为 Euclidean 维数.

对于 R^2 空间一维弹性损伤行为,材料分形损伤本构关系可简化表示成^[17]

$$= E \left(1 - \epsilon_0^{d - 2} \right) \tag{28}$$

式中 d 代表损伤区分维值， E 代表无损材料弹性模量， ϵ 为弹性应变值.

可见,由于引入了分形损伤变量 (d, ϵ) ,分形损伤演化律和分形损伤本构关系直观反映了损伤分布及演化的不规则性和材料微细观结构特征的影响,揭示了材料宏观力学性能变化对损伤微细观结构效应的依赖关系. 由于不涉及具体材料,本文上述分形损伤变量定义和由此导出的分形损伤演化律和分形损伤本构关系具有一般性.

4 混凝土的分形损伤分析

作为应用,本文具体分析了一维单调压缩荷载作用下混凝土的分形损伤及演化行为^[17],加载模式如图 3 所示.

4.1 分形损伤及演化

考虑到混凝土损伤分布及演化的分形特征(如图 4 所示)^[17,21],由分形损伤变量定义,混

混凝土承载面内的分形损伤 (d, ϵ) 可表示为^[17]

$$(d, \epsilon) = \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^r \frac{E'}{E_0} \right]^{d-2} \quad (29)$$

其中: d 为混凝土承载面分形损伤区的分形维数, 由试样横剖面的显微观测实验测取^[17, 21]. ϵ 为加载过程中的混凝土瞬时应变, ϵ_0 为卸载时表观残余塑性变形; E' , E_0 分别为加载过程中混凝土卸载模量和初始弹性模量. 这些均可由混凝土实测应力-应变曲线确定^[17].

代入各损伤时期损伤区的分形值 d , 可以计算出各阶段混凝土

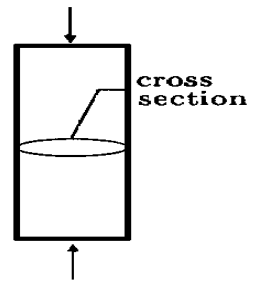


图 3 加载示意图

Fig. 3 Pattern of loads

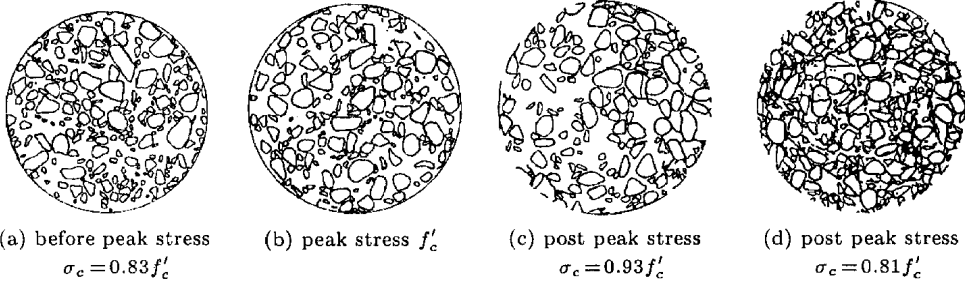


图 4 混凝土承载面内细观裂纹及其分布的显微观测^[17, 21]

Fig. 4 Graphics of micro/ meso cracks and its distribution on cross section of concrete^[17, 21]

的分形损伤大小^[17]. 考虑到分形损伤的标度域及其实际物理意义, 由关系式(18)可得到对应不同分形维数的损伤分形的标度域下限 l . 取 l 最大值, 混凝土损伤分形的物理标度域范围为

$$0.263 = l \leq \leq u = 1 \quad (30)$$

图 5 给出了 $d = 1/2, 2/5, 1/3$ 和 $2/7$ 时的分形损伤 (d, ϵ) 随应力水平 ϵ/f_c 变化的趋势. 为分析对比, 图中同时给出了表观损伤 ϵ_0 的演化趋势. 结果表明: 混凝土分形损伤与表观损伤具有相同的演化趋势, 但考虑损伤分形效应时的混凝土损伤量大于表观损伤量, 而且混凝土分形损伤量随度量码尺减小而增加.

4.2 分形损伤本构关系

由前述的分形损伤力学分析, 一维条件下混凝土分形损伤本构关系可表达为

$$(d, \epsilon)(\sigma) = (1 - \epsilon_0) E_0 \quad \text{或} \quad (d, \epsilon)(\sigma) = \left(1 - \epsilon_0^{d-2} \right) E_0 \quad (31)$$

式中 ϵ_0 为混凝土表观损伤量, 由文献[17]确定; E_0 为初始弹性模量; ϵ 为加载过程总应变. 进一步展开有

$$(d, \epsilon)(\sigma) = (1 - \epsilon_0) E_0 + (1 - \epsilon_0^{d-2}) \epsilon_0 E_0 \quad (32)$$

令 $(d, \epsilon)(\sigma) = (1 - \epsilon_0^{d-2}) \epsilon_0 E_0$, 代入式(32), 上式可改写成

$$(d, \epsilon)(\sigma) = (\sigma) + (d, \epsilon)(\sigma) \quad (33)$$

这里 $(d, \epsilon)(\sigma)$ 项是由于损伤分形效应引起的应力响应增量, 混凝土分形损伤应力-应变响应相当于表观损伤应力-应变响应和计及损伤分形效应增量的两部分叠加. 由文献[17, 21]实验

结果,图 6 给出了考虑损伤分形效应影响的混凝土应力-应变响应和实验结果的对比,其中度量码尺 根据实验用混凝土的骨料尺寸和损伤分形的物理标度域[式(30)]确定,取 $\zeta = 1/3.5$, 该尺度反映界面上出现微细观裂纹的最小骨料尺寸. 图中同时给出了表观损伤应力-应变曲线. 结果表明:混凝土分形损伤应力-应变曲线较表观损伤应力-应变曲线更接近于实验值,混凝土分形损伤本构模型较好地反映了混凝土的实际损伤力学行为.

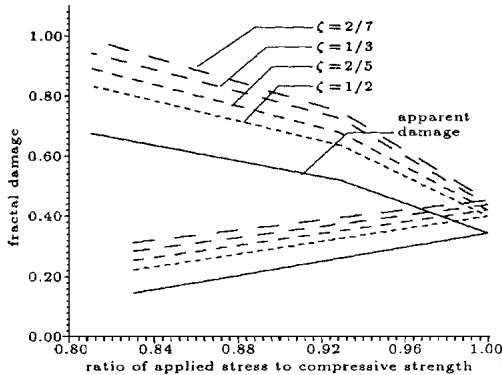


图 5 混凝土分形损伤量及演化趋势

Fig. 5 Fractal damage of concrete and its evolution

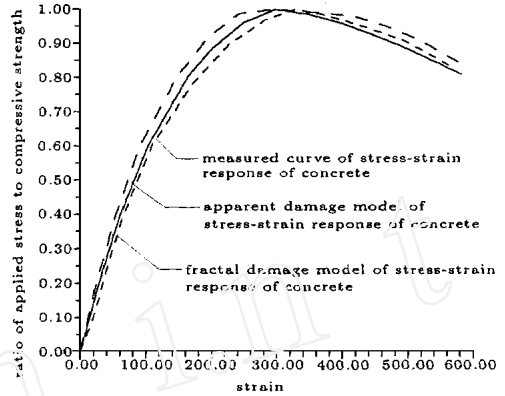


图 6 混凝土的分形损伤应力-应变响应

Fig. 6 Stress - strain responses of concrete with fractal damage

5 小结

本文结合损伤力学和分形几何理论,给出了分形损伤变量定义,推导了分形损伤演化律和分形损伤本构关系的表达形式,将欧氏空间中的经典损伤变量定义、损伤演化律和损伤本构关系推广到分形空间. 主要结论包括:

1) 分形损伤变量可由欧氏空间表观损伤变量 d_0 表示为 $(d, \bar{d}) = d_0^{d-d_c}$ 或 $(d, \bar{d}) = 1 - (1 - d_0)^{\bar{d}-d_c}$. 表观损伤变量 d_0 实际是分形损伤变量 (d, \bar{d}) 在损伤域分维 d 或损伤余域分维 \bar{d} 取 Euclidean 维数时的一种特例. 分形损伤变量是表观损伤变量在考虑损伤分形效应时的推广,反映了损伤微细观特征对表观损伤量的影响.

2) 分形损伤变量 (d, \bar{d}) 与分维值 d (或 \bar{d}) 和度量码尺 ζ 有关. 码尺相关性是分形损伤变量区别于表观损伤变量的主要特征. 混凝土分形损伤分析表明,考虑损伤分形效应时的损伤量大于表观损伤量,分形损伤量随度量码尺减小而增加,损伤分形描述反映出损伤的实际物理状态.

3) 尝试建立了考虑损伤分形效应的材料分形损伤演化律和分形损伤本构关系,揭示了宏观损伤力学性能变化对损伤微细观结构效应的依赖关系. 混凝土实验和理论分析表明:混凝土的分形损伤力学模型更接近于实际力学响应.

参 考 文 献

- 1 Kachanov LM. Introduction to Continuum Damage Mechanics. The Netherlands: Martinus Nijhoff Dordrecht, 1986
- 2 Lemaitre J, Chaboche JL. Mechanics of Solid Materials. Cambridge: Cambridge University Press, 1990
- 3 Lemaitre J. A course on damage mechanics. Berlin: Springs-Verlag, 1992
- 4 谢和平. 岩石、混凝土损伤力学. 徐州: 中国矿业大学出版社, 1990 (Xie HP. Damage Mechanics of Rocks and Concrete. Xuzhou: China University of Mining and Technology Publisher, 1990 (in Chinese))

- 5 Mandelbrot BB. The Fractal Geometry of Nature. New York: W. H. Frecman, 1982
- 6 Ostojar-Starzewski M. Damage in a random microstructure: size effects, fractals and entropy maximization. *Appl Mech Rev*, 1989, 42: 5202 ~ 5212
- 7 卢春生,白以龙. 材料损伤断裂中的分形行为. 力学进展, 1990, 20(4): 468 ~ 477 (Lu CS, Bai YL. Fractal behaviors of damage and fracture of materials. *Advances in Mechanics*, 1990, 20(4): 468 ~ 477 (in Chinese))
- 8 Panagiotopoulos PD. Fractal geometry in solids and structures. *Inter J Solids & Struct*, 1992, 29: 2159 ~ 2175
- 9 Xie H P. Fractals in rock mechanics. Rotterdam, Netherlands: A. Balkema Publisher, 1993
- 10 Underwood EE. Fractals in materials research. *Acta Stereogica*, 1994, 13: 269 ~ 279
- 11 谢和平. 脆性材料中的分形损伤. 机械强度, 1995, 17(2): 75 ~ 82 (Xie HP. Fractal damage in brittle materials. *J Mech Strength*, 1995, 17(2): 75 ~ 82 (in Chinese))
- 12 谢和平. 分形力学的数学基础. 力学进展, 1995, 25(2): 174 ~ 185 (Xie HP. Mathematical fundamentals to fractal mechanics. *Advances in Mechanics*, 1995, 25(2): 174 ~ 185 (in Chinese))
- 13 谢和平. 分形—岩石力学导论. 北京:科学出版社, 1997 (Xie HP. Introduction to Fractal Rock Mechanics. Beijing: Science Press, 1997 (in Chinese))
- 14 谢和平,薛秀谦. 分形应用中的数学基础与方法. 北京:科学出版社, 1997 (Xie HP, Xue XQ. Mathematical Fundamentals and Approaches to Application of Fractal Theory. Beijing: Science Press, 1997 (in Chinese))
- 15 Nolen-Hoeksema RC, Gordon RB. Optical detection of crack patterns in the opening-mode fracture of marble. *Inter J Rock Mech Min Sci*, 1987, 24:135 ~ 144
- 16 Botsis J, Kumin B. On self-similarity of crack layer. *Inter of Fracture*, 1987, 35: 51 ~ 56
- 17 鞠杨. 混凝土分形损伤力学理论研究. 中国矿业大学北京研究生部博士后研究报告. 北京: 1997 (Ju Y. A Study on Theory of Fractal Damage Mechanics of Concrete. Postdoctoral Research Thesis, China University of Mining and Technology (Beijing Campus), Beijing, 1997)
- 18 Falconer. Fractal geometry: mathematical foundation and application. New York: John Wiley & Sons, 1990
- 19 Truesdell C. Rational Thermodynamics. New York: McGraw-Hill Book Company, 1969
- 20 Eringen AC. Nonlinear theory of continuous media. New York: McGraw-Hill, 1962
- 21 Shah SP, Sanker R. Inter cracking and strain-softening response of concrete under uniaxial compression. *ACI Material Journal*, 1987, 84(3):200 ~ 212

A STUDY OF DAMAGE MECHANICS THEORY IN FRACTIONAL DIMENSIONAL SPACE¹⁾

Xie Heping Ju Yang

(China University of Mining and Technology, Beijing Campus, Beijing 100083, China)

Abstract Of most importance in continuum damage mechanics is how to properly define a damage variable that is available for describing damage degree and its evolution. It plays a key role in correlating macro mechanical responses to their internal micro/ meso damage effects in materials. As one of widely-accepted effective approaches to define a damage variable, macro phenomenological definition performs a great advantage of being easily utilized in analyzing macro damage mechanical responses of materials and structures. Nevertheless, the definition cannot reflect intrinsic mechanism of damage properties. The majority of phenomenological definitions are

Received 4 May 1998, revised 14 July 1998.

1) The project is supported by National Distinguished Youth's Science Foundation of China, Trans-century Training Programme for Talents by State Education Commission of China, National Natural Science Foundation of China and Coal Science Foundation of China.

deficient in physical meaning, and most of proposed mechanical models for damage evolution and constitutive equation are empirical ones that have very limited applicability. For applying damage mechanics to accurately explaining and elucidating damage and rupture phenomena in materials and structures, it is essential to determine a damage variable that can not only quantitatively state damage intrinsic mechanism but also be easily adopted in macro damage analyses.

In the present paper, a fractal damage variable (d, ϵ) is proposed, which can not only reflect internal damage mechanism but also be fitted to macro damage mechanics analyses. Furthermore, the fractal expressions of damage evolution laws and damage constitutive equation are deduced in terms of definition of fractal damage variable. As an example, damage mechanical behaviors of concrete under uniaxial compressive stress have been discussed by means of the proposed method.

It is shown that fractal damage variable (d, ϵ) to be defined at fractional dimensional space actually is a generalized case of the apparent damage variable ϵ_0 which is defined at Euclidean space. The fractal damage variable (d, ϵ) will be the same as ϵ_0 when the fractal dimension d is equal to Euclidean integer dimension. The concept of damage variable in continuum damage mechanics has been extended from Euclidean space to fractional dimensional space. The discussion also indicates that fractal damage variable (d, ϵ) depends on fractal dimension d and measure scale Δ . The dependency on measure scale is a hallmark of fractal damage variable to be differed from the apparent damage variable ϵ_0 . The analyses of fractal damage of concrete implies that fractal damage is higher than apparent damage if the fractal effects of damage is considered. Fractal damage increases when the measure scale decreases. Additionally, the investigation shows that fractal models of damage evolution law and damage constitutive relationship for concrete are better in agreement with the actual damage evolution and stress-strain responses. The models quantitatively manifest the dependence of macro mechanical behaviors on their internal micro/ meso damage effects.

Key words damage, fractal, fractional dimensional space, fractal damage variable, fractal damage evolution law, fractal damage constitutive equation