第 31 卷 第 2 期 力 学 学 报 Vol. 31, No.2
1999 年 3 月 ACTA MECHANICA SINICA Mar., 1999

耦合热弹性动力学的统一变分原理族[1)]

刘高联
(上海大学，上海市应用数学和力学研究所，上海 200072)

摘要 对耦合热弹性动力学问题，迄今文献中只建立了 Gurtin 型含卷积的统一变分原理，其缺点是只适用于常系数的线性问题，且因含卷积而使实际数值离散和求解复杂化. 文中首次成功地建立了耦合热弹性动力学问题经典型 (不含卷积) 统一变分原理族，其关键是建议了动态差分变换和初终值条件的新处理法. 该方法可以推广到各向异性材料以及非线性问题上去，同时在应用有限元法离散和求解上都比较简便.

关键词 热弹性理论，变分原理，有限元，热应力，高温结构设计

引 言

目前，非耦合的热弹性理论的变分原理已经相当完备；而耦合理论的变分原理的建立则非常困难，除对线性问题已建立了 Gurtin 型变分原理外 [1~3]，迄今尚无任何经典型 (即不包括 Gurtin 型、 Biot 型、最小二乘型、拟变分原理等 [2]) 的统一变分原理. 我们知道， Gurtin 型变分原理有二大缺点：一是只适用于方程及初边值条件都是线性且系数都是常数的场合；二是泛函中含有多重卷积，因而使数值离散及求解都大为复杂化. 这就大大限制了 Gurtin 型变分原理的实用价值，也就使探索建立经典型变分原理的工作仍然具有重要意义.

尽管国内外对耦合热弹性动力学经典型统一变分原理进行了长期大力探索 [1~8]，即使对线性问题也没有成功，因为所有文献导出的变分原理都含有一些限制变分量 (某些未知量在变分运算中被冻结，即被视作已知量)[9]. 例如， Biot 变分原理中 [5,7] 有二体积分需采用限制变分；又如 Ben-Amoz 的变分原理中 [8] 含算子 p 的各项都给不出所需的欧拉方程；钱伟长所建立的弹性动力学和导热的两条相关变分原理中 [4]，熵及其导数都需作限制变分处理. 还值得注意的是：除文 [4] 外，几乎所有非 Gurtin 型变分原理中 [1~3,5~8]，泛函都不对时间积分，这虽避开了对时端条件处理的困难，但也就不能用于 “时 - 空” 有限元求解；而与此相反，文 [4] 泛函包含了时 - 空积分，但却带来了时端条件的困难！

为了建立耦合热弹性动力学，包含时 - 空积分的经典型变分原理，必须克服下列两大障碍：

1) 众所周知，变分原理用于非椭圆型方程初边值问题时的一个先天性重大困难是时端条件的处理，这是由于变分原理本身要求同时给定初值和终值条件，而物理上则要求 (也只可能) 只给定初值条件. 因此必须设法改造泛函，使之能适应物理上的要求.

2) 由于导热方程中出现了对时间的一阶导数项，使算子失去了对称性 (非势算子)，从而使变分原理难以建立 [9]. 也正因为这一点，所以即使是对单纯的非定常导热问题也迄今未能建立经典变分原理 [5,7,9].

1997-08-10 收到第一稿， 1998-05-08 收到修改稿.
1) 国家自然科学基金资助项目.

为了扫除这些障碍，本文提出了动态 (连续型) 差分变换法以及改造泛函的新方法，使之能圆满处理时端条件．在此基础上，首次成功地建立了耦合热弹性动力学统一的经典型变分原理族．

1 耦合热弹性动力学基本方程

考察小位移各向同性热弹性动力学问题，设各物性参数都是常数，其基本方程组的无量纲形式为 [10,6]:

$$\overline{\partial}_j\overline{\sigma}_{ij} + \overline{b}_i = \rho_G \cdot \overline{\partial}_{tt}\overline{U}_i \tag{1}$$

$$\overline{\sigma}_{ij} = \overline{\lambda}\delta_{ij}e_{kk} + 2e_{ij} - K_\beta\delta_{ij}\theta = \partial\overline{A}/\partial e_{ij} \tag{2}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\overline{\partial}_j\overline{U}_i + \overline{\partial}_i\overline{U}_j) \tag{3}$$

$$Fo \cdot \overline{\nabla}^2\theta = \overline{\partial}_t\theta + K_\alpha \cdot \overline{\partial}_t e_{ii} - \overline{Q} \tag{4}$$

$$\overline{A}(e_{ij}) = \frac{\overline{\lambda}}{2}e_{ii}e_{jj} + e_{ij}e_{ij} - K_\beta\theta e_{ii} \tag{5}$$

$$\partial_\theta\overline{A} = -K_\beta e_{ii} \tag{6}$$

其中已选取 t_0, L, T_0 和 G 为特征尺度来构成下列无量纲量

$$\overline{x}_i = x_i/L, \quad \overline{t} = t/t_0, \quad \theta = (T - T_0)/T_0, \quad \overline{U}_i = U_i/L,$$

$$\overline{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/G, \quad \overline{\mu} = \mu/G = 1, \quad \overline{\lambda} = \lambda/G = \frac{2\nu}{1-2\nu},$$

$$\overline{\partial}_j\overline{U}_i = \frac{\partial\overline{U}_i}{\partial\overline{x}_j}, \quad \overline{b}_i = b_i\left(\frac{\rho L}{G}\right), \quad \overline{\nabla} = L\nabla = \frac{\partial}{\partial\overline{x}_i}j_i,$$

$$\overline{\nabla}^2 = L^2\nabla^2, \quad \overline{\partial}_{tt}\overline{U}_i = \partial^2\overline{U}_i/\partial\overline{t}^2, \quad Fo = \frac{\alpha t_0}{L^2}\ (\text{富利埃数})$$

$$\rho_G = \frac{\rho}{G}\left(\frac{L}{t_0}\right)^2, \quad K_\alpha = \frac{K_\beta G}{\rho c_e T_0}, \quad K_\beta = \beta T_0(3\overline{\lambda} + 2),$$

$$Bi = hL/k\ (\text{毕奥数}), \quad \overline{q}_i = q_i\left(\frac{L}{kT_0}\right), \quad \overline{Q} = \frac{t_0 Q_s}{\rho c_e T_0}$$

边界条件为 (设边界面 $A = A_u \cup A_p = A_1 \cup A_2 \cup A_3$)

$$A_u\ \text{上}: \quad \overline{U}_i = (\overline{U}_i)_{pr} \tag{7A}$$

$$A_p\ \text{上}: \quad \overline{\sigma}_{ij}n_j = (\overline{p}_i)_{pr} \tag{7B}$$

$$A_1\ \text{上}: \quad \theta = \theta_{pr} \tag{7C}$$

$$A_2\ \text{上}: \quad \overline{\partial}_n\theta = (\overline{q}_n)_{pr} \tag{7D}$$

$$A_3\ \text{上}: \quad \overline{\partial}_n\theta = B_i(\theta_\infty - \theta) \tag{7E}$$

初值条件

$$\tau = 0\ \text{时}: \quad \overline{\partial}_t\overline{U}_i = \overline{f}_{1i}(x) \tag{7F}$$

$$\overline{U}_i = \overline{f}_{2i}(\boldsymbol{x}) \tag{7G}$$

$$及\ \theta = f_3(\boldsymbol{x}) \tag{7H}$$

今后，为简化书写起见，上列 (1)~(7H) 式中的所有上标横线将一律略去. 于是，今后所有方程中的量都是无量纲的.

2 统一的变分原理和广义变分原理

为了建立单纯的非定常导热方程经典型变分原理，我们曾建议一个新的动态差分变换术，它一反差分公式只能用于固定 (静态) 离散点的传统做法，建议将差分节点连续变位，使之活化 (动态化), 再结合 Hermite 插值法以提高其精度，从而大大推广了差分的概念和应用范围. 下面我们将首先用它把方程 (4) 变换成差分 - 微分方程形式，接着再建议一个初终值条件处理法，就可以建立本文主题所需的统一的经典型变分原理族.

2.1 动态差分变换术

2.1.1 变换术 I

首先写出函数 $\phi(t')$ 在 $[0\sim t']$ 区间的一阶精度的差分公式

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t') \cong \frac{\phi(t)-\phi(t^{(n-1)})}{t-t^{(n-1)}} = \frac{\phi(t')-\phi(0)}{t'} \tag{8}$$

其中 $t' = t - t^{(n-1)} = \Delta t$, t' 表示局部差分步长 (图 1). 通常差分公式都用于微分方程的离散化，即它对 t 轴上一系列固定的离散点使用 (静态差分法). 本文却一反这个常规，建议赋予 (8) 式以全新的含义与功能，使之动态化 (连续化，活化). 其主要思想是只将上式中的一点 (例如 $t'=0$ 的点) 固定，而将 t' 值作连续变化，从而 $\phi(t')$ 也随之连续变化，这样，在一定范围 (例如 $0\le t'\le l$, l 是适当选定的正值，是随时间推进求解时的时间步长, 见图 1) 内, 上式就不只是适用于一些固定的离散节点上, 而是一个适用于一定时间间隔 l 内的连续变化的动态化的导数表达式了. 将这个动态的差分变换式应用到本文导热方程 (4) 式，就可以化解其中所含的各时间偏导数，从而也就消除了建立变分原理的重大障碍.

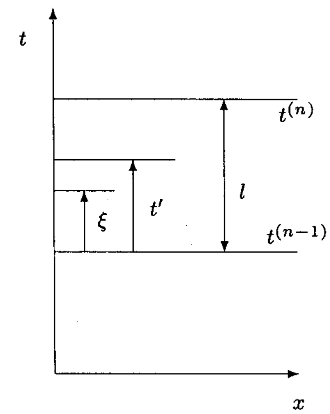

图 1 动态差分概念

Fig.1 The dynamic finite-difference concept

应用 (8) 式 (以 θ 代 ϕ) 可将 (4) 式变换成连续型差分 - 微分方程如下

$$Fo\cdot t'\nabla^2\theta - \theta - K_\alpha e_{ii} = F' \tag{9}$$

其中

$$-F' = \left(\theta^{(n-1)} + K_\alpha e_{ii}^{(n-1)} + t'Q\right)$$

2.1.2 变换术 II

上述变换式 (8) 只有一阶精度，而有时希望应用更高阶的变换式，以便提高精度或采用更大的时间步长 l (图 1), 缩短计算时间.

为此 (令 $\tau=\xi/t'$, ξ 为局部时间变量) 写出函数 $\phi(t)$, 在 $(0\sim t')$ 间的 Hermite 插值公式

$$\phi(\tau)=H_1(\tau)\cdot\phi(0)+H_2(\tau)\cdot\phi(1)+H_0(\tau)\cdot\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}(0) \tag{10}$$

其中

$$H_1(\tau)=1-\tau^2,\quad H_2(\tau)=\tau^2,\quad H_0(\tau)=\tau(1-\tau)$$

对上式求导一次，得

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{d\tau}=2\tau[\phi(1)-\phi(0)]+(1-2\tau)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}(0)$$

在 $\tau=1$ 处，上式给出

$$t'\cdot\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t)=2[\phi(t)-\phi(t^{(n-1)})]-t'\cdot\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t^{(n-1)}) \tag{11}$$

其中 t' 是第 n 时间步 (由 $t^{(n-1)}$ 至 $t^{(n)}$ 间的区域) 计算中的时间变量 (局部差分步长): $0\le t'\le l$, 计算沿 t 向逐步推进时，其每一时间步长为 $l=t^{(n)}-t^{(n-1)}$, 因此我们的变分原理也将针对这一时间子域写出 (图 1).

显然，(11) 式的含义是在一时间步长内 t' 时刻的 $\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t')$ 值可用同时刻的 $\phi(t')$ 值以及 $t'=0$ 时刻的初值 $\phi(0)$ 及其导数 $\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(0)$ 来表示之，且易知其精度为二阶 (即 $\sim t'^2$).

我们把 (11) 式中的 t' 看作在 0 与 l 之间连续变化的量，从而上式就是一个具有二阶精度的动态差分变换式.

应用动态差分变换式 (11) 就可将 (4) 式转化为与 (9) 式类似的连续差分 - 微分方程，它可同 (9) 式统一记作如下通用形式

$$Fo\cdot t'\nabla^2\theta-D(\theta+K_\alpha\cdot e_{ii})=F \tag{12}$$

其中

$$-F=D\big(\theta^{(n-1)}+K_\alpha e_{ii}^{(n-1)}\big)+(D-1)t'\big(\partial_t\theta^{(n-1)}+K_\alpha\cdot\partial_t e_{ii}^{(n-1)}\big)+t'Q$$

且

$$D=\begin{cases}1 & (\text{当采用一阶精度变换式 (8) 时})\\ 2 & (\text{当采用二阶精度变换式 (11) 时})\end{cases}$$

应当指出的是 F 中包含了 $(\partial_t\theta+K_\alpha\partial_t e_{ii})^{(n-1)}$ 项，它的具体计算有二法：一是从上一时间步已求得的有限元解插值公式直接求导得出，二是将 $t^{(n-1)}$ 时的有限元解代入 (4) 式得出.

若要求应用更高精度的变换式，则可采用更高阶的 Hermite 插值公式类似地导出相应的动态差分变换公式，不赘述.

2.2 耦合热弹性理论统一的变分原理族

在基本方程 (1)~(3), (5), (6), (12) 以及初边值条件 (7A)~(7H) 式的基础上，采用文 [11] 的系统性方法处理初边值条件的新方法 (即在泛函中增设一些特殊的时端积分项), 即可反推出本文主题的变分原理和广义变分原理如下.

变分原理 I　在一切满足变分约束 (3), (5) 式及本质边界条件 (7A), (7C) 式的弹性位移场 U_i 与温度场 θ 中，能使下列泛函 J_{I} 取驻值的那组 U_i 与 θ 必是耦合热弹性问题的解.

$$J_{\mathrm{I}}(U_i,\theta)=\int_{(t^{(n-1)})}^{t^{(n)}}\int_{(\Omega)}\left\{\frac{\rho_G}{2}\partial_t U_i\cdot\partial_t U_i-\mathcal{A}_F(e_{ij},\theta)+b_iU_i+\right.$$
$$\left.+\frac{K_\gamma}{2}\left[Fo\cdot t'\cdot(\nabla\theta)^2+2F\theta\right]\right\}\mathrm{d}\Omega\cdot\mathrm{d}t+I_b \tag{13}$$

其中

$$I_b=\int_{(t)}\int_{(A_p)}(p_i)_{pr}U_i\mathrm{d}A\cdot\mathrm{d}t-K_\gamma\cdot Fo\int_{(t)}\int_{(A_2)}t'(q_n)_{pr}\theta\cdot\mathrm{d}A\cdot\mathrm{d}t-$$
$$K_\gamma\cdot Fo\cdot B_i\int_{(t)}\int_{(A_3)}t'\Big(\theta_\infty-\frac{\theta}{2}\Big)\theta\cdot\mathrm{d}A\cdot\mathrm{d}t-$$
$$\int_{(\Omega)}\rho_G\Big\{\big(U_i\cdot\partial_t\mathring{U}_i\big)^{(n)}-\frac{1}{2}[U_i\cdot f_{1i}+(U_i-f_{2i})\partial_tU_i]^{(n-1)}\Big\}\mathrm{d}\Omega$$

其中 $K_\gamma=\dfrac{K_\beta}{D\cdot K_\alpha}$ 为一无量纲常数，$\mathcal{A}_F=\mathcal{A}-\dfrac{D\cdot K_\gamma\theta^2}{2}$ 为自由能，上标 ° 表示限制变分量[9].

证明　取 (13) 式之一阶变分，并利用本质边界条件 (7G) 与 (7H) 式，即可由 $\delta J_{\mathrm{I}}=0$ 导出泛函 J_{I} 的驻值条件如下：

欧拉方程：(1) 和 (12) 式

自然边界条件

A_p 上：(7B) 式

A_2 上：(7D) 式

A_3 上：(7E) 式

自然初值条件

$t=t^{(n-1)}$ 时：(7F) 及 (7G) 式

特别需要指出的是：在泛函 J_{I} 中，由于我们新构造了一个特殊的时端积分项，即 (13) 式中的最末积分，就不但成功地消除了对 U_i 在 $t^{(n)}$ 时的终值条件，而且把 $t^{(n-1)}$ 时的两个初值条件 (7F) 与 (7G) 式都能化成自然条件；此外，又由于采用了动态差分变换式 (9) 和 (11) 式，所以在泛函 J_{I} 的变分式中根本就不再出现对 θ 的时端积分项，因而对 θ 的终值要求被取消了，同时 (7H) 式也就不以初值条件的形式显现出来，而是隐含在时空的重积分中的 F 之内了.

至此可见，应用上述变分原理确能成功地导出耦合热弹性问题的全部微分方程及大部分物理初边值条件. 由于其中不含卷积，所以可以直接地应用常规有限元法离散示解.

按照文 [11] 的方法，可以系统地推广上列变分原理，形成一个变分原理族，但下面只拟列出其中一条广义变分原理.

广义变分原理 II　在一切满足本质边界条件 (7A) 和 (7C) 的热弹性位移 U_i, 应变 e_{ij}, 应力 σ_{ij}, 温度场 θ 和热流 q_i 中，能使下列泛函 $J_{\mathrm{II}}(U_i,e_{ij},\sigma_{ij},\theta,q_i)$ 取驻值的那组分布必为耦合热弹

性问题的解.

$$J_{\mathrm{II}}=\int_{t^{(n-1)}}^{t^{(n)}}\int_{(\Omega)}\left\{\frac{\rho_G}{2}\partial_t U_i\cdot\partial_t U_i-\mathcal{A}_F(e_{ij},\theta)+b_iU_i+\sigma_{ij}\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(\partial_jU_i+\partial_iU_j)\right]+\right.$$
$$\left.\frac{K_\gamma}{2}[Fo\cdot t'(2\partial_i\theta-q_i)q_i+2F\theta]\right\}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t+I_b \tag{14}$$

不难证明，取上式之变分 (让 $U_i, e_{ij}, \sigma_{ij}, \theta$ 和 q_i 都各自独立变分), 由 $\delta J_{\mathrm{II}}=0$ 可导得下列驻值条件:

欧拉方程组

$$\delta U_i:\ \partial_j\sigma_{ij}+b_i=\rho_G\partial_{tt}^2U_i$$
$$\delta\sigma_{ij}:\ e_{ij}=\frac{1}{2}(\partial_iU_j+\partial_jU_i)$$
$$\delta e_{ij}:\ \partial_{e_{ij}}\mathcal{A}_F=\sigma_{ij}$$
$$\left.\begin{aligned}&\delta\theta:\ \partial_\theta\mathcal{A}_F=K_\gamma[F-Fo\cdot t'\cdot\partial_iq_i]\\&\delta q_i:\ \partial_i\theta=q_i\end{aligned}\right\}\text{由此得出 (12) 式.}$$

自然边界条件：与变分原理 I 的完全相同.

此外，我们指出：若在 J_{I} 和 J_{II} 中补充下列边界项

$$I_b'=\int_t\int_{(Au)}[U_i-(U_i)_{pr}]\sigma_{ij}n_j\mathrm{d}A\mathrm{d}t-K_\gamma\cdot Fo\int_t\int_{(A_1)}t'q_n(\theta-\theta_{pr})\mathrm{d}A\mathrm{d}t \tag{15}$$

则 (7A) 与 (7C) 式就也可转化为自然边界条件.

3 结束语

本文成功地建立了耦合热弹性问题的经典型变分原理与广义变分原理 (以自由能表示). 由于它不含卷积，故可较方便地用常规有限元法离散求解，并可推广到各向异性材料以及非线性问题中去. 此外，它也为进一步与文 [12] 结合，形成更广泛的交叉学科 —— 耦合的气动 · 热 · 弹性理论 —— 的变分理论奠定了重要的基础，从而为发展一些高新科技 (如航天航空、核技术、新材料等) 提供一项新的分析与设计的理论工具.

符号说明

A	$=A_u\cup A_p=A_1\cup A_2\cup A_3$	D	常数，见 (12) 式后
A_u, A_p	分别给定位移与负荷的表面	∂_iU_j	$=\partial U_j/\partial x_i$
$A_{1,2,3}$	分别给定温度、温度梯度和放热条件的表面	$\partial_{tt}\theta$	$=\partial^2\theta/\partial t^2$
$\mathcal{A}$	含温度效应的应变能密度	e_{ij}	应变张量
$\mathcal{A}_F$	自由能密度	F	见 (12) 式后
Bi	Biot 数	Fo	富利埃数
$\boldsymbol{b}$	质量力	$\boldsymbol{f}_{1,2}, f_3$	见 (7F, 7G, 7H) 式
C_e	零应变比热	G	剪切模量

符号说明

k	导热系数	$\boldsymbol{u}$	变形位移矢
l	$=t^{(n)}-t^{(n-1)}$	x_i	$(i=1,2,3)$ 笛卡儿坐标
$\boldsymbol{n}$	外法向单位矢	α	$=k/(\rho C_e)$, 热扩散系数
$\boldsymbol{p}$	单位表面积负荷矢	β	线膨胀系数
Q_s	内热源	ξ	局部时间变量
$\boldsymbol{q}$	热流矢	λ	拉梅弹性常数: $\lambda=\dfrac{2\mu\nu}{1-2\nu}$
T	温度	μ	拉梅弹性常数: $\mu=G$
t,t'	时间变量: $t'=t-t^{(n-1)}$	ν	泊松比
h	放热系数	ρ,ρ_G	密度及其无量纲形式
$K_{\alpha,\beta,\gamma}$	见 (6) 式后, $K_\gamma=K_\beta/(DK_\alpha)$	θ,θ_∞	固体的及其周围环境的温度
		σ_{ij}	应力张量
上标:		下标:	
$\circ$	限制变分 [9]	n	外法向
n	时间步数	i	$=1,2,3$
		$\circ$	参考状态
		pr	给定量

参 考 文 献

1 Truesdell C ed. Mechanics of Solids. Vol II. Springer, 1984 (Originally as Vol. VIa/2 of Handbuch der Physik. Springer, 1973)

2 Грибанов ВФ. и Паничкин НГ. Связанные и Динамические задачи термоупругости. Москва: Машиностроение, 1984

3 Nickell R E, Sackman JJ. VPs for linear coupled thermoelasticity. *Q Appl Math,* 1968, 26: 11～26

4 钱伟长. 变分法与有限元 (上). 北京：科学出版社， 1980 (Chien WZ. Calculus of Variations and Finite Elements. Vol I. Beijing: Science Press, 1980 (in Chinese))

5 Nowinski JL. Theory of Thermoelasticity with Applications. Netherlands: Sijthoff & Noordhoff, 1978

6 Nowacki W. Thermoelasticity. 2nd ed. Pergamon, Oxford, 1986

7 Biot MA. Variational Principles in Heat Transfer. Oxford: Oxford Univ Press, 1970

8 Ben-Amoz M. On a variational theorem in coupled thermoelasticity. *J Appl Mech,* 1965, 32: 943～945

9 Finlayson B A. The Method of Weighted Residuals and Variational Principles. Acad Press, 1972. 336～337

10 Mase GE. Theory and Problems of Continuum Mechanics. New York: McGraw-Hill, 1970

11 Liu Gao-lian. A systematic approach to the search and transformation for variational principles in fluid mechanics with emphasis on inverse & hybrid problems. In: Experimental & Computational Aerothermodynamics of Internal Flows. Chen NX, Jiang HD eds. Beijing: World Publ Corp, 1991. 128～135

12 Liu Gao-lian. A unified variational formulation of aeroelasticity problem for coupled "fluid-wing" vibration system in 3-D transonic flow. In: Proc 2nd Intl Conf on Fluid Mech. July 1993, Beijing. 438～444

A FAMILY OF UNIFIED CLASSICAL VARIATIONAL PRINCIPLES IN COUPLED THERMOELASTO DYNAMICS [1)]

Liu Gaolian
(*Institute of Mechanics, Shanghai University, Shanghai* 200072, *China*)

Abstract The variational principle (VP) of classical type (excluding the Biot's VP, the Gurtin's VP, the least square VP & various constrained VP, in which some unknown variables are frozen during the variation operation) for the entitled problem is extremely difficult to establish, so that up to now all VP for this problem, to more or less degree, are constrained VP with the only exception of the Grutin's VP. However, the Gurtin's VP posesses the following two essential short-comings: 1) it is confined only to linear differential eqs. and boundary/initial conditions with constant coefficients; 2) the presence of multiple convolutions in the functional makes the discretization & numerical solution very complicated to carry out. Consequently, it is still meaningful to search for VP of classical type for the coupled thermoelastodynamics. To this end, first of all, the following two obstacles must be eliminated: 1) VP, when applied to initial-value problems, inherently encounter the difficulty that they require to specify not only initial-value conditions but also final-value conditions, while physically only initial-value conditions are allowed to be given. 2) the differential operator of the unsteady heat conduction eq. is nonpotential and hence it is impossible to construct the corresponding VP according to the Vainberg's theorem.

Just for removing these obstacles, in the present paper a new dynamic (continuous) finite-difference transformation is introduced to convert the operator to a potential one and in addition a method for modifying the functional to accommodate all physically required initial-value conditions while removing the final-value conditions is also suggested. On this basis and following a systematic approach for deriving VP suggested previously by the present author in Ref.[11], it has been succeeded for the first time to establish a family of unified classical VP for the coupled thermoelastodynamics, from anyone of which the basic elastodynamic equations, the unsteady heat conduction equations as well as the natural boundary/initial-value conditions can be derived naturally.

In this way a complete rigorous theoretical foundation for the finite element analysis of the problem under study is founded. This variational approach can be extended to anisotropic materials and nonlinear case as well.

Key words variational principles, finite element method, thermoelasticity, thermal stress, high-temperature structural design

Received 10 August 1997, revised 8 May 1998.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China.