

特征值问题的边界形状灵敏度

刘中生¹⁾ 胡海昌²⁾

(吉林工业大学力学系, 长春 130022)

摘要 研究连续系统振动特征值问题的边界形状灵敏度满足什么方程和边界条件, 如何离散化作近似计算. 结果表明: 如果采用相同的有限单元剖分模式, 边界形状灵敏度方程和特征值问题方程具有相同的系数矩阵, 但前者是非齐次方程, 后者是齐次方程; 前者需要施加非齐次边界条件, 后者施加齐次边界条件.

关键词 形状灵敏度分析, 特征值问题, 振动

前 言

结构振动的设计灵敏度分析在优化设计中占有重要的地位. 设计变量可以是微分方程的系数(例如梁的横截面积、弹性模量和质量密度、板的厚度等等), 也可以是域的边界形状(例如梁的长度和板的形状等). 本文限于讨论域的边界形状这一类设计变量. 近些年来, 有不少文献研究这个问题, 限于篇幅, 本文不对此作综述. 有兴趣的读者可以参考文献 [1]. 本文作者在文献 [2~4] 中研究了特征值对边界形状的灵敏度问题. 本文是 [2~4] 的深入和发展, 目的在于说明怎样从原来的连续系统建立微分方程并在有限元系统下求解.

1 问题的描述

考虑一个平面上的弹性体, Ω 代表它的内部区域, Γ 代表它的边界. 它的振动特征值问题由下面的微分方程和边界条件描述

$$L[w(x, y)] - \lambda M w(x, y) = 0; \quad (x, y) \in \Omega \quad (1a)$$

$$G_j[w(x, y)] = 0; \quad j = 1, 2, \dots, r; \quad (x, y) \in \Gamma \quad (1b)$$

$$Q_j[w(x, y)] = 0; \quad j = 1, 2, \dots, p; \quad (x, y) \in \Gamma \quad (1c)$$

其中 λ 和 $w(x, y)$ 是特征值和相应的特征函数, L 是线性微分算子, 它的最高阶次是 $2(p+1)$. 算子 M 仅仅是坐标变量 (x, y) 的函数, G_j 是线性微分算子, 它相应于几何边界条件, Q_j 是线性微分算子, 它的最高阶次不超过 $2(p+r)-1$, 它相应于力的边界条件.

边界形状的摄动由下面的式子来定义

$$x_{B\tau} \equiv x_B + \tau p(x_B, y_B), \quad (x_B, y_B) \in \Gamma \quad (2a)$$

$$y_{B\tau} \equiv y_B + \tau q(x_B, y_B), \quad (x_B, y_B) \in \Gamma \quad (2b)$$

1997-01-15 收到第一稿, 1998-04-30 收到修改稿.

1) 吉林工业大学教授, 目前在加拿大多伦多大学航空研究所从事合作研究.

2) 吉林工业大学兼职教授, 航天部五院研究员.

其中 $(x_{B\tau}, y_{B\tau})$ 代表摄动后的边界上的点, $p(x, y)$ 和 $q(x, y)$ 是连续函数, 它们控制边界形状的改变模式, τ 是一个小参数, 当 $\tau \rightarrow 0$ 时, $x_{B\tau} \rightarrow x_B, y_{B\tau} \rightarrow y_B$, 即新边界退化为原边界. 边界摄动后的特征值问题可以写为

$$L[w_\tau(x, y)] - \lambda_\tau M w_\tau(x, y) = 0; \quad (x, y) \in \Omega_\tau \quad (3a)$$

$$G_{j\tau}[w_\tau(x, y)] = 0; \quad j = 1, 2, \dots, r; \quad (x, y) \in \Gamma_\tau \quad (3b)$$

$$Q_{j\tau}[w_\tau(x, y)] = 0; \quad j = 1, 2, \dots, p; \quad (x, y) \in \Gamma_\tau \quad (3c)$$

其中 λ_τ 和 $w_\tau(x, y)$ 是摄动后的特征值及其相应的特征函数, $G_{j\tau}$ 和 $Q_{j\tau}$ 是摄动了的边界算子. 当 $\tau \rightarrow 0$ 时, $Q_{j\tau} \rightarrow Q_j, G_{j\tau} \rightarrow G_j, \lambda_\tau \rightarrow \lambda, w_\tau(x, y) \rightarrow w(x, y)$. 为了讨论简便起见, 这里假定 λ 是孤立值, 但其推广到重特征值和密集特征值情形, 并无概念上困难, 可以参考文献 [5~7].

特征值和特征函数的灵敏度定义为

$$\dot{\lambda} \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\lambda_\tau - \lambda}{\tau} \quad (4a)$$

$$\dot{w}(x, y) \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{w_\tau(x, y) - w(x, y)}{\tau} \quad (4b)$$

本文的目的在于说明如何建立 $\dot{w}$ 和 $\dot{\lambda}$ 的微分方程及其边界条件, 并且说明在有限元系统下如何求解它们.

2 灵敏度的微分方程及其边界条件

将 (3a) 求相对于 τ 的导数, 并令 $\tau = 0$, 就得到了灵敏度的微分方程

$$L[\dot{w}(x, y)] - \lambda M \dot{w}(x, y) = \dot{\lambda} M w(x, y) \quad (5a)$$

为了建立灵敏度的边界条件, 本文提出如下的步骤:

第一步: 将边界条件的传统表达式 (3b), (3c) 改写为 δ -函数的形式

$$G_{j\tau}[w_\tau(x, y)]\delta(x - x_{B\tau})\delta(y - y_{B\tau}), \quad (x_{B\tau}, y_{B\tau}) \in \Gamma_\tau \quad (5b)$$

$$Q_{j\tau}[w_\tau(x, y)]\delta(x - x_{B\tau})\delta(y - y_{B\tau}), \quad (x_{B\tau}, y_{B\tau}) \in \Gamma_\tau \quad (5c)$$

第二步: 利用函数乘积的微分法则 (链式公式), 将 (5b), (5c) 求相对于 τ 的导数, 然后令 $\tau = 0$ 得

$$\begin{aligned} G_j[\dot{w}(x, y)]\delta(x - x_B)\delta(y - y_B) = \\ \left(-\dot{G}_j[w(x, y)] - G_j\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]p(x, y) - G_j\left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]q(x, y) \right)\delta(x - x_B)\delta(y - y_B) \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} Q_j[\dot{w}(x, y)]\delta(x - x_B)\delta(y - y_B) = \\ \left(-\dot{Q}_j[w(x, y)] - Q_j\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]p(x, y) - Q_j\left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]q(x, y) \right)\delta(x - x_B)\delta(y - y_B) \end{aligned} \quad (6b)$$

其中 $\dot{Q}_j$ 和 $\dot{G}_j$ 的定义是

$$\dot{G}_j[w(x, y)] \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{G_{j\tau}[w(x, y)] - G_j[w(x, y)]}{\tau} \quad (7a)$$

$$\dot{Q}_j[w(x, y)] \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{Q_{j\tau}[w(x, y)] - Q_j[w(x, y)]}{\tau} \quad (7b)$$

在上面的推演中, 我们使用了下面的 δ -函数微分公式^[8]

$$f(x) \frac{d\delta(x-a)}{da} = \frac{df(x)}{dx} \delta(x-a) = \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=a}$$

第三步: 将 (6a), (6b) 写为传统的边界条件表达式

$$\begin{aligned} G_j[\dot{w}(x, y)] &= -\dot{G}_j[w(x, y)] - G_j \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right] p(x, y) - \\ &G_j \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right] q(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} Q_j[\dot{w}(x, y)] &= -\dot{Q}_j[w(x, y)] - Q_j \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right] p(x, y) - \\ &Q_j \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right] q(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \end{aligned} \quad (8b)$$

这样, 我们就得到了灵敏度的微分方程 (5a) 及其边界条件 (8a), (8b).

对比特征值问题的微分方程 (1a) 和灵敏度的方程 (5a), 我们发现: 前者是齐次的, 右端项为 0; 后者是非齐次的, 它的右端项若是 0, 它便退化为前者.

对比特征值问题的边界条件 (3b), (3c) 和灵敏度边界条件 (8a), (8b), 可以发现: 后者是非齐次的, 前者是齐次的; 若令后者右端项为 0, 它便退化为前者.

3 特征值问题的有限元方程

为了后面讨论的需要, 这里给出特征值问题的有限元方程. 利用位移型的里兹有限元方法, 对 (1a) 进行离散化处理, 得到如下的代数方程

$$\left(\begin{bmatrix} K_{II} & K_{IE} & K_{IN} \\ K_{IE}^T & K_{EE} & K_{EN} \\ K_{IN}^T & K_{EN}^T & K_{NN} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M_{II} & M_{IE} & M_{IN} \\ M_{IE}^T & M_{EE} & M_{EN} \\ M_{IN}^T & M_{EN}^T & M_{NN} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} W_I \\ W_E \\ W_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_E \\ F_N \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中 λ 是特征值, $[W_I^T, W_E^T, W_N^T]$ 是特征向量, W_I 是 Ω 内部节点的位移自由度, W_E 是边界节点上对应于几何边界条件的位移自由度, W_N 是边界节点上对应于力的边界条件的位移自由度, F_E 是相应于 W_E 的等效节点力, F_N 是对应于 W_N 的等效节点力. 根据变分原理的结果^[9,10], 当给定了 Γ 上的几何边界条件 W_E 之后, 与其对应的等效节点力 F_N 就是未知量, 由变分来确定; 同样, 当指定了边界节点力 F_N 之后, 与其对应的位移 W_N 就是未知量, 由变分结果给定.

从边界条件 (1b), (1c) 可以看出

$$W_E = 0 \quad (10a)$$

$$F_N = 0 \quad (10b)$$

将 (10a), (10b) 代入到 (9) 中, 得

$$\left(\begin{bmatrix} K_{II} & K_{IN} \\ K_{IN}^T & K_{NN} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M_{II} & M_{IN} \\ M_{IN}^T & M_{NN} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} W_I \\ W_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

以及

$$F_E = (K_{IE}^T - \lambda M_{IE}^T)W_I + (K_{EN} - \lambda M_{EN})W_N \quad (12)$$

求解特征值问题 (11) 便可得到 λ 和 $[W_I^T, W_E^T]$, 接下去便可确定对应的边界约束力 F_E .

4 灵敏度的有限元方程

对比特征值问题的微分方程及其边界条件 (1a), (1b), (1c) 和灵敏度的微分方程及其边界条件 (5a), (8a), (8b), 可以发现: 它们具有完全重合的定义域 Ω 和边界 Γ . 因此, 它们可以共用同一套的有限元剖分模式 (节点和单元划分), 这样, 相应于灵敏度微分方程的有限元方程便具有下面的形式

$$\left(\begin{bmatrix} K_{II} & K_{IE} & K_{IN} \\ K_{IE}^T & K_{EE} & K_{EN} \\ K_{IN}^T & K_{EN}^T & K_{NN} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M_{II} & M_{IE} & M_{IN} \\ M_{IE}^T & M_{EE} & M_{EN} \\ M_{IN}^T & M_{EN}^T & M_{NN} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \dot{W}_I \\ \dot{W}_E \\ \dot{W}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{F}_E \\ \dot{F}_N \end{bmatrix} + \dot{\lambda} \begin{bmatrix} M_{II} & M_{IE} & M_{IN} \\ M_{IE}^T & M_{EE} & M_{EN} \\ M_{IN}^T & M_{EN}^T & M_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_I \\ W_E \\ W_N \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中各个量的物理意义是: $\dot{W}_I$ 是 Ω 内部节点的位移自由度, $\dot{W}_E$ 是边界节点上对应于几何边界条件的位移自由度, $\dot{W}_N$ 是边界节点上对应于力的边界条件的位移自由度, $\dot{F}_E$ 是相应于 $\dot{W}_E$ 的等效节点力, $\dot{F}_N$ 是相应于 $\dot{W}_N$ 的等效节点力. 依据变分原理, 每一对变量 ($\dot{W}_E$ 和 $\dot{F}_E$) 和 ($\dot{W}_N$ 和 $\dot{F}_N$) 中只能有一个变量是指定的, 另一个需要由变分结果确定.

从边界条件 (8a), (8b) 可知, $\dot{W}_E$ 和 $\dot{F}_N$ 是已知的. 因此, 只有四类未知量 $\dot{W}_I$, $\dot{W}_N$, $\dot{F}_E$ 和 $\dot{\lambda}$ 是需要由 (13) 的求解来确定. 取出方程 (13) 的第一行和第三行, 并将已知量移至方程右侧, 得

$$\left(\begin{bmatrix} K_{II} & K_{IN} \\ K_{IN}^T & K_{NN} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M_{II} & M_{IN} \\ M_{IN}^T & M_{NN} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \dot{W}_I \\ \dot{W}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{F}_N \end{bmatrix} + \dot{\lambda} \begin{bmatrix} M_{II} & M_{IN} \\ M_{IN}^T & M_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_I \\ W_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{IE} - \lambda M_{IE} \\ K_{EN} - \lambda M_{EN} \end{bmatrix} \dot{W}_E \quad (14)$$

取出 (13) 的第二行, 得

$$\dot{F}_E = -\dot{\lambda}(M_{IE}^T W_I + M_{EN} W_N) + (K_{IE}^T - \lambda M_{IE}^T) \dot{W}_I + (K_{EE} - \lambda M_{EE}) \dot{W}_E + (K_{EN} - \lambda M_{EN}) \dot{W}_N \quad (15)$$

方程 (14), (15) 构成了有限元系统下的灵敏度方程.

5 灵敏度方程的求解

对比灵敏度方程 (14) 和特征值问题方程 (11) 可以发现, 它们有相同的系数矩阵, 这使得我们可以充分利用已求得特征值和特征向量来获得 (14) 的解.

5.1 确定 $\dot{\lambda}$

利用 (14) 的有解条件, 即右端项与 $[W_I^T, W_N^T]$ 正交, 得

$$\dot{\lambda} = -W_N^T \dot{F}_N + [W_I^T, W_N^T] \begin{bmatrix} K_{IE} - \lambda M_{IE} \\ K_{EN}^T - \lambda M_{EN}^T \end{bmatrix} \dot{W}_E \quad (16)$$

这里假定了特征向量的归一条件, 即

$$[W_I^T, W_N^T] \begin{bmatrix} M_{II} & M_{IN} \\ M_{IN}^T & M_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_I \\ W_N \end{bmatrix} = 1 \quad (17)$$

将 (12) 代入 (16) 中, (16) 可以进一步写为

$$\dot{\lambda} = -W_N^T \dot{F}_N + F_E^T \dot{W}_E \quad (18)$$

方程 (18) 就是特征值的敏度公式, 它含两项, 力的边界条件项 $(-W_N^T \dot{F}_N)$ 和几何边界条件项 $(F_E^T \dot{W}_E)$.

5.2 确定 $[\dot{W}_I, \dot{W}_N]$

求解方程 (14) 的一个有效办法就是模态叠加法, 也就是将未知量 $[\dot{W}_I^T, \dot{W}_N^T]$ 表达为已知特征向量的线性组合

$$\begin{bmatrix} \dot{W}_I \\ \dot{W}_N \end{bmatrix} = \sum_{r=1}^L c_r \begin{bmatrix} W_I^{(r)} \\ W_N^{(r)} \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} W_I \\ W_N \end{bmatrix} \quad (19)$$

其中 c_r 和 c 是待定系数, $[W_I^{(r)T}, W_N^{(r)T}]$ 是第 r 个特征向量. 将 (19) 代入 (14) 中, 并在两侧左乘 $[W_I^{(r)T}, W_N^{(r)T}]$, 得

$$c_r = \frac{1}{\lambda_r - \lambda} (\dot{F}_N^T W_N^{(r)} - \dot{W}_E^T F_E^{(r)}) \quad (20)$$

其中

$$F_E^{(r)} = \begin{bmatrix} W_I^{(r)} \\ W_N^{(r)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{IE} - \lambda M_{IE} \\ K_{EN} - \lambda M_{EN} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$F_E^{(r)}$ 的力学含义是边界上相应于 $W_E^{(r)}$ 的等效节点力.

为了确定 c , 需要补充特征函数归一化方程^[11]

$$\int_{\Omega} 2M\dot{w}w d\Omega + \int_{\Gamma} Mw^2(p(x, y) \cos \alpha + q(x, y) \cos \beta) d\Gamma = 0 \quad (22)$$

其中 $\cos \alpha$ 和 $\cos \beta$ 是 Γ 的方向余弦. 在有限元系统下, (22) 式可以写为

$$2[W_I^T, W_E^T, W_N^T] \begin{bmatrix} M_{II} & M_{IE} & M_{IN} \\ M_{IE}^T & M_{EE} & M_{EN} \\ M_{IN}^T & M_{EN}^T & M_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{W}_I \\ \dot{W}_E \\ \dot{W}_N \end{bmatrix} + Y = 0 \quad (23)$$

其中

$$Y \equiv \int_{\Gamma} Mw^2(x, y)(p(x, y) \cos \alpha + q(x, y) \cos \beta) d\Gamma \quad (24)$$

将 (19) 代入 (23) 中, 得

$$c = \frac{1}{2} Y - [W_I^T, W_N^T] \begin{bmatrix} M_{IE} \\ M_{EN}^T \end{bmatrix} \dot{W}_E \quad (25)$$

总结如下: 特征值敏度 $\dot{\lambda}$ 由公式 (18) 给定, 其中的 $\dot{W}_E$ 和 $\dot{F}_N$ 由边界条件 (8a), (8b) 给出, W_N 和 F_E 由特征值问题 (11), (12) 的解给定. 特征向量的敏度由 (19) 式给定, 其中 c_r 由

(20) 式获得, c 由 (25) 式给出. 在本文中除 $\dot{G}_j$ 和 $\dot{Q}_j$ 以外, 其它各量都已推导出公式或者方程, 而 $\dot{G}_j$ 和 $\dot{Q}_j$ 需要根据具体问题具体解决.

这里需要指出, 在模态截断情况下, 公式 (19) 是近似的, 关于如何提高模态截断法的精度, 建议参考文献 [5, 12, 13].

6 三个例子

为了说明如何用本文方法建立灵敏度方程, 并用有限元法求解, 下面给两个示例.

1) 首先考虑一个两端简支的 Euler 梁. 它的弯曲振动的特征值问题由下面方程及其边界条件描述

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} - \lambda m w = 0, \quad x_L < x < x_R.$$

几何边界条件为

$$w(x_L) = w(x_R) = 0$$

力的边界条件为

$$EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=x_L} = EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=x_R} = 0$$

边界的摄动由下式来表示

$$x_{L\tau} = x_L, \quad x_{R\tau} = x_R + \tau$$

按照文中的直接求导办法, 得到灵敏度的微分方程

$$EJ \frac{d^4 \dot{w}}{dx^4} - \lambda m \dot{w} = \dot{\lambda} m w, \quad x_L < x < x_R$$

及其边界条件.

几何边界条件

$$\dot{w}(x_L) = 0, \quad \dot{w}(x_R) = -\frac{dw}{dx} \Big|_{x=x_R}$$

力的边界条件

$$EJ \frac{d^2 \dot{w}}{dx^2} \Big|_{x=x_L} = 0$$

$$EJ \frac{d^2 \dot{w}}{dx^2} \Big|_{x=x_R} = -EJ \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=x_R}$$

在有限元系统下, 已知的边界条件是

$$W_E \equiv [w(x_L), w(x_R)]^T = [0, 0]^T$$

$$F_E \equiv \left[-EJ \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=x_L}, EJ \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=x_R} \right]^T$$

$$W_N \equiv \left[\frac{dw}{dx} \Big|_{x=x_L}, -\frac{dw}{dx} \Big|_{x=x_R} \right]^T$$

$$\begin{aligned}
F_N &\equiv \left[-EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=x_L}, EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=x_R} \right]^T = [0, 0]^T \\
\dot{W}_E &\equiv [\dot{w}(x_L), w(x_R)]^T = \left[0, -\frac{dw}{dx} \Big|_{x=x_R} \right]^T \\
\dot{F}_E &\equiv \left[-EJ \frac{d^3 \dot{w}}{dx^3} \Big|_{x=x_L}, EJ \frac{d^3 \dot{w}}{dx^3} \Big|_{x=x_R} \right]^T \\
\dot{W}_N &\equiv \left[\frac{d\dot{w}}{dx} \Big|_{x=x_L}, -\frac{d\dot{w}}{dx} \Big|_{x=x_R} \right]^T \\
\dot{F}_N &\equiv \left[-EJ \frac{d^2 \dot{w}}{dx^2} \Big|_{x=x_L}, EJ \frac{d^2 \dot{w}}{dx^2} \Big|_{x=x_R} \right]^T = \left[0, -EJ \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=x_R} \right]^T
\end{aligned}$$

将上面这些表达式代入 (18) 中, 得到特征值敏度

$$\dot{\lambda} = -2 \left(\frac{dw}{dx} \Big|_{x=x_R} \right) \left(EJ \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=x_R} \right)$$

2) 下面的例子是一个矩形薄板 (各向同性) 的横向弯曲振动问题。它的微分方程和边界条件是

$$D \nabla^4 w - \lambda m w = 0$$

几何边界条件 (四边固支)

$$\begin{aligned}
w(x_L, y) &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=x_L} = 0 \\
w(x_R, y) &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=x_R} = 0 \\
w(x, y_L) &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=y_L} = 0 \\
w(x, y_R) &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=y_R} = 0
\end{aligned}$$

指定它的边界改变模式为

$$\begin{aligned}
x_{L\tau} &= x_L, \quad x_{R\tau} = x_R + \tau \\
y_{L\tau} &= y_L, \quad y_{R\tau} = y_R
\end{aligned}$$

即仅仅是右边界 $x = x_R$ 发生了改变。

按照文中的求导办法, 可以得到灵敏度微分方程及其边界条件

$$\begin{aligned}
D \nabla^4 \dot{w} - \lambda m \dot{w} &= \dot{\lambda} m w \\
\dot{w}(x_L, y) &= 0, \quad \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \Big|_{x=x_L} = 0
\end{aligned}$$

$$\dot{w}(x_R, y) = 0, \quad \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \Big|_{x=x_R} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=x_R}$$

$$\dot{w}(x, y_L) = 0, \quad \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \Big|_{y=y_L} = 0$$

$$\dot{w}(x, y_R) = 0, \quad \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \Big|_{y=y_R} = 0$$

在有限元系统下, 如果节点位移自由度是 $\left[w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right]$, 那么相应的节点力应该是 $[V_N, M_x, M_y]$, 其中 V_N, M_x 和 M_y 是等效节点剪力和弯矩.

由 w 的边界条件可知

$$W_E = 0$$

由 $\dot{w}$ 的边界条件可知: 只有边界 $x = x_R$ 上的节点的位移 $\frac{\partial \dot{w}}{\partial x}$ 不是零, 在其它三个边界上, 所有的位移自由度均是零.

根据上述分析, 可由方程 (18) 给出特征值灵敏度

$$\dot{\lambda} = F_E^T \dot{W}_E = \sum_{j=1}^n M_{xj} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_j$$

其中 n 是边界 $x = x_R$ 上的节点数目, M_{xj} 是边界 $x = x_R$ 上的第 j 个节点处的弯矩, $(\partial^2 w / \partial x^2)_j$ 是边界 $x = x_R$ 上的第 j 个节点处的 w 的二阶偏导数.

3) 最后一个例子是一块平板的横向弯曲振动固有频率相对于几何尺寸 L 的灵敏度问题. 板的几何尺寸如图 1 所示, 它的左侧边和右侧边均为简支, 其它各边为自由边界. 板厚 $h = 0.002\text{m}$, 弹性模量 $E = 2.1 \times 10^{11}\text{Pa}$, 质量密度 $\rho = 7800\text{kg/m}^3$, 泊松比 $\nu = 0.3$.

利用 MSC/NASTRAN for Windows 计算了它的第一个固有频率和归一后的振动模态. 固有频率 $f_1 = 1.9287\text{Hz}$ (相应的特征值 $\lambda = 146.7096$). 将板划分为 142 个四边形板单元, 计 173 个节点, 其中右侧边上有 6 个节点.

利用公式 (18) 计算特征值的灵敏度, 需要先获得右侧边上 6 个节点处的 $W_N, \dot{F}_N, F_E$ 和 $\dot{W}_E$.

因为右侧边为简支边, 即 $W_E = 0$, 所以 F_E 代表节点的约束力, 即支承施加到边界节点上的约束力 (沿着 z 方向)

$$F_E^T = [-81.7211, -24.8985, -26.6583, -29.6118, -22.4403, -82.1885]$$

在简支边情形下, $\dot{W}_E$ 代表特征函数在节点处绕 y 轴的转角, 但符号相反, 即

$$\dot{W}_E^T = [0.74922, 0.72405, 0.71067, 0.71102, 0.72358, 0.74920]$$

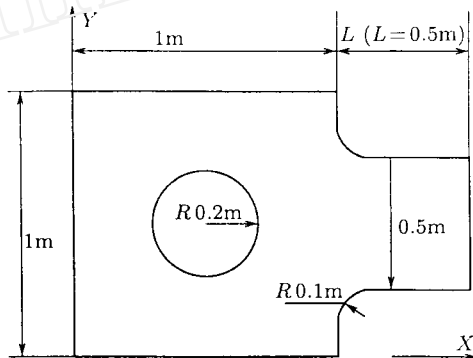


图 1 左右端简支的带孔平板

Fig.1 A plane plate with a hole, its left side and right side simply supported

在简支边情形下, $F_N \equiv \left[EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0$, 所以 $\dot{F}_N = - \left[EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$, 可见 $\dot{F}_N$ 在数值上等于支
承施加的约束力, 但符号相反, 即

$$\dot{F}_N^T = [-81.7211, -24.8985, -26.6583, -29.6118, -22.4403, -82.1885]$$

因为 W_N 是相应于 F_N 的位移, 所以 W_N 是特征函数在右边界节点处的绕 y 轴的转角, 即

$$W_N^T = [-0.74922, -0.72405, -0.71067, -0.71102, -0.72358, -0.74920]$$

将上面这些结果代入公式 (18) 得到特征值敏度

$$\dot{\lambda} \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial L} = -W_N^T \dot{F}_N + F_E^T \dot{W}_E = -396.136$$

为了比较, 又用 MSC/NASTRAN for Windows 计算了 L 摄动后的固有频率, 其中 $\Delta L = 0.01 \text{ m}$, 摄动后的固有频率为 1.90322 Hz , 相应的特征值为 142.8557 . 由此可以求得有限差分敏度为

$$\frac{\Delta \lambda}{\Delta L} = \frac{142.8557 - 146.7096}{0.01} = -385.384$$

可见, $\frac{\partial \lambda}{\partial L}$ 与 $\frac{\Delta \lambda}{\Delta L}$ 很相近.

7 结束语

本文提出了如何建立特征值问题对边界形状灵敏度的微分方程及其边界条件的具体方法和步骤, 并且说明了如何在有限元系统下求解. 本文指出: 灵敏度的微分方程恰恰是特征值问题微分方程相应的非齐次方程, 灵敏度边界条件恰恰是特征值问题边界条件对应的非齐次边界条件. 因此, 在有限元系统下, 灵敏度方程和特征值问题具有相同的系数矩阵, 前者是非齐次方程, 需要施加非齐次边界条件, 后者是齐次方程, 需要施加齐次边界条件. 从本文给出的公式还可以看出, 为了获得 $\dot{\lambda}$ 和特征函数的敏度, 需要获得特征函数在边界上的变化梯度以及边界上的约束反力. 本文方法的优点之一是不需要求得刚度矩阵和质量矩阵的导数, 这对有限元实施方面能带来益处.

本文作者之一刘中生向德国洪堡基金会 (German Humboldt Foundation) 致谢, 感谢它的资助; 也向德国慕尼黑工业大学机械系教授 Pfeiffer 致谢, 感谢提供良好的工作环境.

参 考 文 献

- Haftka RT, Adelman H M. Recent developments in structural sensitivity analysis. *Structural Optimization*, 1989, 1(3): 137~152
- Liu Zhong-sheng, Hu Hai-chang. Eigenpair derivative with respect to boundary shape. *AIAA Journal*, 1997, 35(1)
- 胡海昌, 刘中生, 王大钧. 约束位置的修改对振动模态的影响. *力学学报*, 1996, 28(1): 23~32 (Hu Haichang, Liu Zhongsheng, Wang Dajun. Influence of small changes of support location on vibration mode shapes. *Acta Mechanica Sinica*, 1996, 28(1): 23~32 (in Chinese))
- Liu Zhong-sheng, Hu Hai-chang, Wang Dajun. A new method for eigenvalue sensitivity with respect to support locations. *AIAA Journal*, 1996, 34(4)
- 陈塑寰. 结构振动分析的矩阵摄动理论. 重庆: 重庆出版社, 1991 (Chen Suhuan. Matrix Perturbation Theory for Structural Vibration Analysis. Chongqing: Chong-Qing Press, 1991 (in Chinese))

- 6 胡海昌. 多自由度结构固有振动理论. 北京: 科学出版社, 1987 (Hu Haichang. Natural Vibration Theory of Structures with Multiple Degrees of Freedom. Beijing: Science Press, 1987 (in Chinese))
- 7 刘中生, 陈塑寰. 频率集聚时模态分析的移位摄动法. 宇航学报, 1993, 14(1): 81~88 (Liu Zhongsheng, Chen Suhuan. Perturbation analysis of vibration modes with close Eigenvalues by eigenvalue shift. *Journal of Astronautics*, 1993, 14(1): 81~88 (in Chinese))
- 8 Butkov E. Mathematical Physics. Addison-Wesley, Reading, MA, 1968. 221~235
- 9 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京: 科学出版社, 1981 (Hu Haichang. Variational Principles of Elasticity with Applications. Beijing: Science Press, 1981 (in Chinese))
- 10 Reddy J N. Finite Element Methods. McGraw-Hill, Second Edition, 1993. 28~57
- 11 Haug E J, Choi K K, Komkov V. Design Sensitivity Analysis of Structural Systems. Academic, New York, 1986. 197
- 12 陈塑寰, 刘中生, 赵又群. 振型一阶导数的高精度截尾模态展开法. 力学学报, 1993, 25(4): 427~434 (Chen Suhuan, Liu Zhongsheng, Zhao Youqun. An accurate modal superposition method for computing mode shape derivatives in structural dynamics. *Acta Mechanica Sinica*, 1993, 25(4): 427~434 (in Chinese))
- 13 刘中生, 陈塑寰, 赵又群. 自由-自由结构振动模态的一阶导数. 宇航学报, 1994, 15(1): 35~41 (Liu Zhongsheng, Chen Suhuan, Zhao Youqun. Calculating of first-order derivatives of vibration mode shapes for free-free structures. *Journal of Astronautics*, 1994, 15(1): 35~41 (in Chinese))

SHAPE SENSITIVITY ANALYSIS OF THE EIGENPROBLEM

Liu Zhongsheng Hu Haichang

(Department of Mechanics, Jilin University of Technology, Changchun 130022, China)

Abstract This paper deals with eigenproblem sensitivity analysis with respect to boundary shape. It shows how to obtain the distributed parameter differential equations plus boundary conditions which govern the eigenproblem sensitivity before the structure is discretized, and how to obtain the solution to them using finite element methods. This paper points out that the distributed parameter differential equations plus boundary conditions, which govern the eigenproblem sensitivity, are just the non-homogeneous ones associated with the eigenproblem. Thus, the eigenpair sensitivity problem and its original eigenproblem have the same system matrices (mass matrix and stiffness matrix), when finite element methods are applied to them, but different boundary condition. At the end, this paper gives three examples to illustrate the idea presented.

Key words shape sensitivity analysis, eigenproblem, structural vibration