

振动控制设计中的等价鲁棒性 极点配置问题¹⁾

李 书 卓家寿 任青文
(河海大学土木学院工程力学系, 南京 210098)

摘要 本文首先用 Householder 变换将状态反馈鲁棒极点配置问题做一等价转换, 然后基于以鲁棒度量尽可能小为准则确定相应的非线性规划问题, 应用一种优化方法得到所求非线性规划问题的总体优化解。由于经过转换后的等价状态反馈鲁棒极点配置问题中的状态矩阵为上 Hessenberg 矩阵形式, 这有利于迭代过程中的减少计算量, 为工程应用开辟了一条新途径。

关键词 振动控制, 极点配置, 状态反馈, 鲁棒性

引 言

状态反馈极点配置方法是结构振动控制系统设计的一个重要途径, 实际中也经常应用^[1,2]。极点配置法是系统设计时利用对反馈增益矩阵的选择使闭环系统的极点恰好处于期望的一组极点位置上, 以有效地改善系统的各种性能指标。设计工程主动控制系统时, 建立反映该控制系统的状态空间不可避免地会遇到固有的模型误差, 另外, 大载荷作用下, 结构参数可能是变化的, 一般认为是时间或响应的函数, 由于这些不确定的因素, 鲁棒控制是必要的。受控对象, 尤其是大柔性结构等受控对象, 往往有很高的阶数, 控制器的成本和复杂性随着受控对象阶数的增高而显著增加, 因此通常希望采取措施, 以减少设计计算量。由于此类问题的主要工作量是由于每迭代一步都要进行多次矩阵求逆, 为减少计算量, 本文提出应用 Householder 变换, 将状态反馈极点配置问题做一个等价的变换, 使得经过变换后的等价状态反馈极点配置问题中的状态矩阵转化为上 Hessenberg 矩阵, 因为 Hessenberg 矩阵有其自身的特点, 所以一般来说, Hessenberg 矩阵之逆的计算量要比求一般矩阵之逆的计算量要小。文献 [3] 研究了单输入情形下的 Hessenberg 矩阵极点配置问题, 但没有涉及鲁棒性。本文考虑到任何结构控制都要求极点_{对系统矩阵元素的改变不敏感, 通过选择鲁棒度量, 以其尽可能小为判据, 将问题的求解转化为具有约束的非线性规划问题, 用优化方法寻求控制增益矩阵近似解。}

1 等价的状态反馈鲁棒极点配置问题

1.1 Householder 变换

Householder 变换最常见的应用是将一个实向量 $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)^T$ 变换到与向量 $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ 平行的一个 (与 ν 等长度的) 向量 $\nu' = \pm \|\nu\|_2 e_1$ 。为此, 令 $\sigma = \|\nu\|_2^2$

1997-12-05 收到第一稿, 1998-04-10 收到修改稿。

¹⁾ 中国博士后科学基金资助项目。

$$\omega = \frac{\nu - \sigma e_1}{\|\nu - \sigma e_1\|_2} = \frac{(\nu_1 - \sigma, \nu_2, \dots, \nu_n)^T}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sigma(\sigma - \nu_1)}} = \frac{\xi}{\sqrt{2}\rho} \quad (1)$$

其中 $\rho = \sigma(\sigma - \nu_1)$, $\xi = (\nu_1 - \sigma, \nu_2, \dots, \nu_n)^T$.

为了防止分母相消, 减少计算误差, 可根据 ν_1 选取 σ 的符号 $\sigma = -\text{sign}(\nu_1)|\sigma|$, 则 Householder 变换 Q 可写为

$$Q = I - \frac{1}{\rho} \xi \xi^T \quad (2)$$

并且满足 $Q\nu = \sigma e_1$.

1.2 等价的鲁棒极点配置问题

考虑时不变的振动控制系统的状态方程

$$\dot{X} = AX + BU \quad (3)$$

其中 $A \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$ 为状态矩阵, $B \in \mathbf{R}^{2n \times n}$ 为控制或输入矩阵, $X \in \mathbf{R}^{2n \times 1}$ 为状态矢量, $U \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 为控制 (或输入) 矢量, 这里 $\mathbf{R}^{n \times m}$ 表示 $n \times m$ 阶实矩阵的集合. 所谓状态反馈, 就是取输入 $U = FX$, $F \in \mathbf{R}^{n \times 2n}$ 为输出矩阵, 这样方程 (3) 成为

$$\dot{X} = (A + BF)X \quad (4)$$

从控制理论可知, 如果 (3) 式是可控系统, 那么可以找到一个 F , 使得 $A + BF$ 的特征值可以取任意预先给定值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}$. 由文献 [4] 中定理 2.31 可知, 对于方程 (3) 中矩阵 A , 存在一正交矩阵 G , 使得

$$G^T A G = H \quad \text{或} \quad A = G H G^T \quad (5)$$

其中 H 为上 Hessenberg 矩阵, 形如

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \cdots & h_{1,2n} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \cdots & h_{2,2n} \\ 0 & h_{32} & h_{33} & \cdots & h_{3,2n} \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & h_{2n,2n-1} & h_{2n,2n} \end{bmatrix}$$

利用 Householder 变换, 能够方便地求得式 (5) 中的 G 和 H , 此处不再赘述.

由于振动控制系统的线性变换不改变系统的能控性条件 [5], 令 $X = GZ$, 则式 (3) 变为

$$\dot{Z} = HZ + G^T B U \quad (6)$$

因此如果 $\{A, b\}$ 可控, 等价于 $\{H, G^T, B\}$ 可控, 并且矩阵 H 和 A 有相同的特征值, 如果取输入 $U = F'Z$ 并代入式 (6), 有

$$\dot{Z} = (H + G^T B F')Z \quad (7)$$

则极点配置问题转化为找一个 F' , 使得 $H + G^T B F'$ 的特征值可以取任意预先给定的值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}$. 考虑振动控制系统鲁棒性时, 要求 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}$ 对于 $H + G^T B F'$ 的元素的改变是尽可能地不敏感. 最后, 我们很容易得到如下关系式

$$F = F' G^T \quad (8)$$

2 基于鲁棒度量的非线性规划问题

2.1 状态反馈鲁棒极点配置问题的求解过程

根据 Kautsky 等在文献 [6] 中描述的求解鲁棒性极点配置问题的三个基本步骤结合本文提出的等价的鲁棒极点配置问题, 求解过程如下:

步骤 1. 利用 Householder 变换求得满足式 (5) 的正交矩阵 G 和上 Hessenberg 矩阵 H , 令 $X = GZ$, 计算 $B' = G^T B$.

步骤 2. 计算矩阵 B' 的 QR 分解 $B' = (U_0 U_1) \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 $(U_0 U_1)$ 是一个实正交矩阵, L 非奇异. 对于 $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, 2n$, 求 $\varphi_j \equiv \eta(U_1^T(H - \lambda_j I))$ 的标准正交基向量, 其中 $\eta(*)$ 定义为零空间, 然后构成矩阵 $S_j, j = 1, 2, \dots, 2n$.

步骤 3. 选择向量 $z_j = S_j w_j \in \varphi_j, j = 1, 2, \dots, 2n$, 形成非奇异矩阵 $Z = (z_1, z_2, \dots, z_{2n})$, 通常除非 $Z = (z_1, z_2, \dots, z_{2n})$ 被恰当选取, 否则任何求解方法都不能直接应用于等价鲁棒极点配置问题.

步骤 4. 通过求解 $MZ = X\Lambda$ 得到矩阵 $M = H + B'F$, 利用式 $F' = L^{-1}U_0^T(M - H)$ 计算 F' , 由式 (8) 得 $F = F'G^T$.

在以上四个步骤中, 关键是步骤 3. 本文的目的就是将下面给出的方法应用于实际问题.

通过步骤 2, 我们作 $(U_1^T(H - \lambda_j I))^T$ 的 QR 分解, $(U_1^T(H - \lambda_j I))^T = [\hat{S}_j, S_j] \begin{bmatrix} E_j \\ 0 \end{bmatrix}$, 从该式能够得到满足要求的 S_j , 并且

$$S_j \in \mathbb{R}^{2n \times m}, \quad S_j^T S_j = I, \quad z_j = S_j w_j \in \varphi_j, \quad j = 1, 2, \dots, 2n \quad (9)$$

$$\mathcal{R} = \{w = (w_1^T, w_2^T, \dots, w_n^T)^T \in \mathbb{R}^N \mid w_j \in \mathbb{R}^m, \|w_j\|_2 = 1, \forall j\} \quad (10)$$

文 [6] 中采用的是优化方法, 在整个计算过程中, 迭代贯穿始终, 事实上, 计算量的大小很大程度上取决于迭代过程中的矩阵求逆, 本文正是针对这一问题的.

2.2 鲁棒度量

研究鲁棒性极点配置问题的关键在于如何刻划解的鲁棒性, 文 [6] 提出和使用了关于鲁棒性的几种不同度量, 并且指出, 本质上鲁棒度量极点配置问题是选择特征向量 $z_j \in \varphi_j$, 使得 $\|z_j\|_2 = 1$, 并且特征向量 z_j 之间尽可能正交, 根据这一基本思想, 我们定义一种鲁棒度量

$$v_z = \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 2n} (z_i^T z_j)^2 \right)^{1/2} / \sqrt{n(2n+1)} \quad (11)$$

令 $Z_j = (z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_{2n})$, S_j 由步骤 2 得到, 并且 $N = 2nm$, 设

$$\Gamma_{ij} = \gamma S_i^T S_j, \quad r_{ij}(w) = w_i^T \Gamma_{ij} w_j, \quad \Gamma_{ij}(w) = r_{ij}(w) \Gamma_{ij}, \quad \forall i \neq j$$

并且

$$\Gamma(w) = \begin{pmatrix} \alpha^2 I & -\Gamma_{12}(w) & \cdots & -\Gamma_{1,2n}(w) \\ -\Gamma_{12}(w) & \alpha^2 I & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\Gamma_{2n-1,2n}(w) \\ -\Gamma_{1,2n}(w) & \cdots & -\Gamma_{2n-1,2n}(w) & \alpha^2 I \end{pmatrix}, \quad \alpha > \beta \quad (12)$$

其中 $\beta = \gamma \max_{1 \leq k \leq 2n} \|(S_1, \dots, S_{k-1}, S_{k+1}, \dots, S_{2n})\|_2$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}$, 则鲁棒度量 v_z 极小化可以转化为解下面的约束非线性规划问题

$$\left. \begin{array}{l} \text{最大值} \quad w^T \Gamma(w) w \\ \text{为约束条件} \quad w \in \mathcal{R} \end{array} \right\} \quad (13)$$

这里我们用一个称为 P-SOR 的方法 [7], 求式 (13) 的总体优化解.

3 应用算例

结构模型为一个三层钢架结构和控制系统如图 1 所示. 激励我们采用 Loma Prieta 地震加速度的东西向分量记录, 见图 2 (MTHLAB 软件中提供并经重新标定) 来验证本文方法. 设结构每一层的质量、刚度、阻尼均相等, 分别为 $m_1 = m_2 = m_3 = M = 1000 \text{ kg}$, $k_1 = k_2 = k_3 = 980 \text{ kN/m}$, $c_1 = c_2 = c_3 = 3.407 \text{ kNs/m}$.

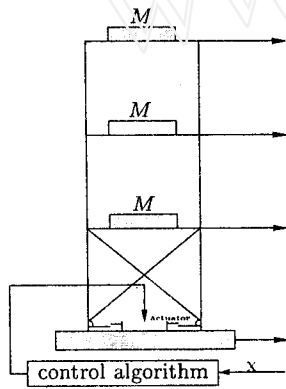


图 1 三层钢架结构主动控制模型

Fig.1 The control model of a three-story structure

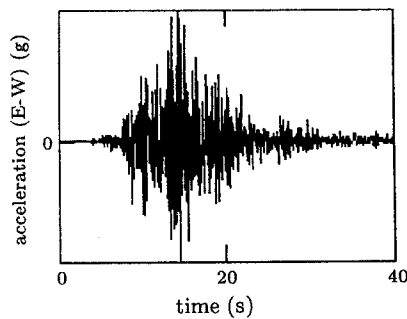


图 2 Loma Prieta 地震加速度东西向分量

Fig.2 LP earthquake acceleration

用本文方法进行振动控制系统设计, 并比较结构控制前、后的加速度和位移结果, 见图 3 和图 4.

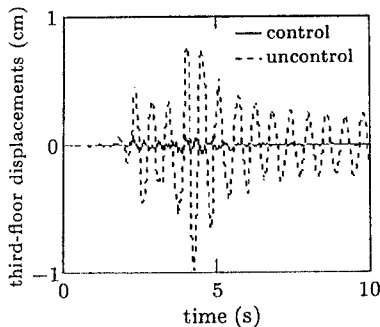


图 3 控制前后第三层位移比较

Fig.3 Comparison of displacements

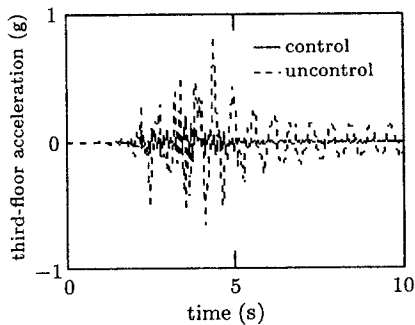


图 4 控制前后第三层加速度比较

Fig.4 Comparison of acceleration

从图3和图4可以看出,采用本文方法进行设计后,第三层加速度和位移的响应大大降低,并且降低的速度很快,充分证明了本文方法的效能.

4 结论

本文应用 Householder 变换将状态反馈鲁棒极点配置问题做一等价转换,由于变换后不改变原来问题可控性,作为等价状态反馈鲁棒极点配置问题,其状态矩阵为上 Hessenberg 矩阵,从数学角度而言,这样做是值得的,因为等价状态反馈鲁棒极点配置问题最后归结为求解基于鲁棒度量非线性规划问题,计算过程表明要多次迭代,每次迭代中都要进行矩阵求逆,而 Hessenberg 矩阵求逆比一般矩阵求逆来得更容易,所以本文的方法有利于提高计算效率,状态矩阵阶数愈高,效果愈明显,为工程应用开辟了一条新途径.作者计算经验表明 PSOR 方法是一个易于实现的方法,它产生的任何结果总是收敛于问题(13)的优化解.从式(9)和 $\|(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_{k-1}, \mathbf{S}_{k+1}, \dots, \mathbf{S}_{2n})\|_2^2 \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{2n} \|\mathbf{S}_i \mathbf{S}_i^T\|_2 = 2n - 1$ 我们可以看出 $\beta \leq \gamma\sqrt{2n-1}$. 计算实例表明选择 $\alpha > \gamma\sqrt{2n-1}$, 选择初始参数 $\omega_i^{(k)} \leq 3$ 能够取得较好的效果.

参 考 文 献

- 1 Rohmn MA, Lipholz HH. Structural Control by Pole Assignment Method. *J Engineering Mechanics*, 1978, 104(10): 1159~1175
- 2 马扣根, 顾仲权. 最优极点配置法在梁式结构主动控制中的应用. 振动与冲击, 1991, (3): 63~66 (Kuogen M, Zhongquan G. Application of optimal pole assignment method in beam structure active control. *Journal of Vibration and Impact*, 1991, (3): 63~66(in Chinese))
- 3 Datta B N. An algorithm to assign eigenvalues in a hessenberg matrix: single input case. *IEEE Trans Aut Control*, 1987, AC-32(5): 414~417
- 4 周树荃, 戴华. 代数特征值反问题. 郑州: 河南科学技术出版社, 1991 (Shuquan Z, Hua D. The Algebraic Inverse Eigenvalue Problems. Zhengzhou: Henan Science and Technology Press, 1991 (in Chinese))
- 5 刘豹主编. 现代控制理论. 北京: 机械工业出版社, 1982 (Bao L. Modern Control Theory. Beijing: Mechanical Industry Press, 1982 (in Chinese))
- 6 Kautsky J, Nichols NK, Dooren PV. Robust Pole Assignment in Linear State Feedback. *Int J Control*, 1985, 41(5): 1129~1155
- 7 Sun JG. An algorithm for the solution of multiparameter eigenvalue problems (I). *Math Number Sinica*, 1986, 8, 137~149

THE EQUIVALENT ROBUST POLE ASSIGNMENT IN VIBRATION CONTROL DESIGN ¹⁾

Li Shu Zhuo Jiashou Ren Qingwen

(Department of Engineering Mechanics, Hehai University, Nanjing 210098, China)

Abstract In this paper, we consider the vibration controllable system where $A \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$, $B \in \mathbf{R}^{2n \times m}$ and $X \in \mathbf{R}^{2n \times 1}$, $U \in \mathbf{R}^{m \times 1}$, are the state and input of the above system. If we use state feedback, that is, if we set $U = FX$, in which $F \in \mathbf{R}^{p \times 2n}$, then we have

$$\dot{X} = (A + BF)X$$

From the control theory we know that if the system is controllable, then for any given numbers $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}$ there exists a matrix F , such that matrix $(A + BF)$ has eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}$. Robust control is necessary for structures due to the inherent modeling errors encountered in creating state space representations of these systems. In addition, under larger magnitude loading, structural parameters may vary as unknown functions of time or structural response. The major time cost is to calculate the inverse of the system matrix for each iteration. Therefore, we transformed the problem of state feedback robust pole assignment to an equivalent one by Householder transformation. After transformation, the system matrix of the equivalent state feedback robust pole assignment problem is an upper Hessenberg matrix, in general, whose inverse consumes less time. Based upon the criterion in which the defined measure of robustness is minimized, we can establish corresponding nonlinear program problem. Utilizing an optimal numerical method, we can obtain global optimal solution. Since the state matrix of the problem of equivalent state feedback robust pole assignment is an upper Hessenberg matrix, it is beneficial to reduce computational cost during iteration and provide a new method for engineering applications.

Key words vibration control, pole assignment, state feedback, robustness

Received 5 December 1997, revised 10 April 1998.

¹⁾ The project supported by the National Postdoctoral Science & Technology Foundation of China.