

各向异性介质波动问题的 时域边界元法及实验验证¹⁾

张楚汉 刘海笑 王光纶

(清华大学水利水电工程系, 北京 100084)

励 争

(北京大学力学与工程科学系, 北京 100871)

摘要 对前已建立各向异性介质波动问题的时域边界元计算模型进行了实验验证。用单向纤维增强光弹性复合材料模拟正交异性介质, 用冲击加载, 加载方向与纤维方向分别成 0° , 90° 及 45° 角度, 进行了正交异性动态光弹性实验及动态应变测量, 并同时对该模型进行了时域边界元计算。将时域边界元方法计算出的应力分量代入正交异性动态光弹性的动态应力-光性定律, 得到双折射条纹级数随时间的变化曲线, 将其与动态光弹性实验的结果进行比较; 此外, 由动态电测获得的应变响应曲线推算出应力时程, 与时域边界元计算出的应力响应曲线也进行了比较。两种情况下, 时域边界元的计算成果均与实验成果吻合较好, 从而证明该各向异性介质波动问题的时域边界元计算模型具有较好的精度及稳定性, 可用于各向异性介质的动态问题特别是波传播问题的分析研究。

关键词 各向异性介质, 纤维增强光弹性复合材料, 时域边界元, 正交异性动态光弹性, 动态电测

时域边界元方法直接利用弹性动力学方程的基本解建立包含时间积分的边界积分方程, 它具有一般边界元方法的优点, 如可以降低维、求解精度高等, 同时, 时域边界元能够直接给出系统的瞬态响应, 在研究爆炸与冲击载荷作用下系统的动力响应时, 用其求解系统的瞬态响应具有突出的优点。时域边界元方法在动态问题特别是波传播问题中的研究与应用, 正在向广度和深度发展, 作为有待发展的数值计算模型, 时域边界元方法在一些领域, 如各向异性问题, 断裂问题等, 还需要进一步的深入或开拓, 它在地震工程、爆破工程、岩土地基工程以及复合材料动力学研究中有着广泛的应用前景。由于各向异性介质动力基本解的复杂性和时域边界元方法实施过程可能带来的误差, 如时空域内的离散、奇异积分和入射波场的处理以及对时间的积分等一系列数值技术, 都可能降低数值模型的精度。对一般各向同性介质的时域边界元方法, 可以用解析方法验证其正确性与数值精度, 然而, 对各向异性介质的波动问题, 目前尚难找到标准问题 (Benchmark) 的解析解答。因此, 对所建立的计算模型进行实验验证, 考察其精度及稳定性, 是一件很有意义的工作。动态光弹性方法和动态电测技术是实验力学中较为成熟的方法, 动态光弹性方法以模型实验为手段, 研究在动载荷作用下介质中随时间变化的应力状态, 据此, 可以得到内部应力状态的全貌及应力波传播的全过程。另一方面, 动态电测技术的发展已有很长的历史, 其原理及技术操作比较简单, 便于现场实施和分析, 其缺陷在于只能用于逐

1997-10-22 收到第一稿, 1998-02-17 收到修改稿。

¹⁾ 国家自然科学基金资助项目 (19572035)。

点测量. 本文首先阐述各向异性介质波动问题的时域边界元计算模型, 然后用单向纤维增强光弹性复合材料模拟正交异性材料半无限域, 在介质表面施加冲击荷载, 用正交异性动态光弹性方法及动态应变测量相结合的方法, 对该计算模型进行了实验考察, 验证了这一计算模型的精度及其工程应用的可行性.

1 时域边界元计算

1.1 二维正交各向异性介质波动问题时域边界元法

二维弹性动力学问题边界积分方程可以写为

$$C_{ij}(S)u_j(S, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} [U_{ij}^*(Q, t; S, \tau)p_j(Q, \tau) - P_{ij}^*(Q, t; S, \tau)u_j(Q, \tau)] d\Gamma d\tau \quad (1)$$

其中 $C_{ij}(S)$ 是与源点处边界形状有关的系数, 对于光滑边界, $C_{ij}(S) = \frac{1}{2}\delta_{ij}$ (δ_{ij} 为 Kronecker- δ); $u_j(Q, \tau)$, $p_j(Q, \tau)$ 分别为场点 Q 在 τ 时刻 j 方向的位移和面力分量; $U_{ij}^*(Q, t; S, \tau)$ 和 $P_{ij}^*(Q, t; S, \tau)$ 分别为弹性动力学问题位移和面力基本解, 其意义分别是无限域中在 τ 时刻 S 点沿 i 方向作用的单位脉冲 (或 Heaviside 函数) 在 t 时刻 Q 点 j 方向产生的位移和面力.

由于各向异性介质的对应于 Heaviside 函数的面力基本解 $\bar{P}_{ij}^*$ 的奇异性比对应于 Dirac- δ 函数的面力基本解 P_{ij}^* 的奇异性低一阶且易于推导, 同时, $\bar{P}_{ij}^*$ 与对应于 Dirac- δ 函数的位移基本解 U_{ij}^* 的形式相似, 因此, 如果在边界积分方程中采用对应于 Dirac- δ 函数的位移基本解 U_{ij}^* 和对应于 Heaviside 函数的面力基本解 $\bar{P}_{ij}^*$, 则较有利于边界元数值计算的实施. 基于这些考虑, 并注意到对应于 Heaviside 函数的面力基本解 $\bar{P}_{ij}^*$ 与对应于 Dirac- δ 函数的面力基本解 P_{ij}^* 有如下关系式

$$d\bar{P}_{ij}^*(Q, t; S, \tau)/d\tau = P_{ij}^*(Q, t; S, \tau) \quad (2)$$

将其代入 (1) 式中, 利用分部积分法及零初始条件可得边界积分方程

$$C_{ij}(S)u_j(S, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} [U_{ij}^*(Q, t; S, \tau)p_j(Q, \tau) - \bar{P}_{ij}^*(Q, t; S, \tau)\dot{u}_j(Q, \tau)] d\Gamma d\tau \quad (3)$$

其中 $p_j(Q, \tau)$ 和 $\dot{u}_j(Q, \tau)$ 分别为边界点 Q 处 j 方向 τ 时刻的面力和速度分量.

U_{ij}^* 为对应于 Dirac- δ 函数的位移基本解, 其形式为^[1]

$$\left. \begin{aligned} U_{11}^*(Q, t; S, \tau) &= \frac{a}{\pi(t-\tau)} \operatorname{Im} \sum_P^+ \frac{-N(1, P, \bar{x} + \bar{y}P)}{T_{,P}(1, P, \bar{x} + \bar{y}P)} \\ U_{12}^*(Q, t; S, \tau) &= U_{21}^*(Q, t; S, \tau) = \frac{a}{\pi(t-\tau)} \operatorname{Im} \sum_P^+ \frac{kP}{T_{,P}(1, P, \bar{x} + \bar{y}P)} \\ U_{22}^*(Q, t; S, \tau) &= \frac{a}{\pi(t-\tau)} \operatorname{Im} \sum_P^+ \frac{-K(1, P, \bar{x} + \bar{y}P)}{T_{,P}(1, P, \bar{x} + \bar{y}P)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

对应于干扰为 Heaviside 函数的面力基本解 $\bar{P}_{ij}^*$ 为^[1]

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_{11}^*(Q, t; S, \tau) &= \frac{a\rho}{\pi(t-\tau)} \operatorname{Im} \sum_P^+ \frac{[-\beta N + k(k-1)P^2]n_1 + P[-N + k]n_2}{(\bar{x} + \bar{y}P)T_{,P}(1, P, \bar{x} + \bar{y}P)} \\ \bar{P}_{12}^*(Q, t; S, \tau) &= \frac{a\rho}{\pi(t-\tau)} \operatorname{Im} \sum_P^+ \frac{P[-N + k]n_1 + [-(k-1)N + \alpha k P^2]n_2}{(\bar{x} + \bar{y}P)T_{,P}(1, P, \bar{x} + \bar{y}P)} \\ \bar{P}_{21}^*(Q, t; S, \tau) &= \frac{a\rho}{\pi(t-\tau)} \operatorname{Im} \sum_P^+ \frac{P[\beta k - (k-1)K]n_1 + [kP^2 - K]n_2}{(\bar{x} + \bar{y}P)T_{,P}(1, P, \bar{x} + \bar{y}P)} \\ \bar{P}_{22}^*(Q, t; S, \tau) &= \frac{a\rho}{\pi(t-\tau)} \operatorname{Im} \sum_P^+ \frac{[kP^2 - K]n_1 + P[k(k-1) - \alpha K]n_2}{(\bar{x} + \bar{y}P)T_{,P}(1, P, \bar{x} + \bar{y}P)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中 T, N, K 均为关于 P 的多项式, α, β, k, a 均为材料常数^[2]; ρ 为介质密度; $T_{,P}$ 表示多项式 $T(1, P, \bar{x} + \bar{y}P) = 0$ 对 P 求一阶导数; $\operatorname{Im} \sum_P^+(\cdot)$ 表示将多项式 $T(1, P, \bar{x} + \bar{y}P) = 0$ 的 4 个根中虚部大于零的根分别代入表达式 $(\cdot)$ 中, 求出其和的虚部; n_1, n_2 分别表示从源点 S 到场点 Q 的直线与 x_1, x_2 坐标轴夹角的余弦。

如果所考虑的弹性体受入射波作用, 可直接将入射波场加到边界积分方程 (3) 式的右端, 此时, 边界积分方程式变为

$$C_{ij}(S)u_j(S, t) = \int_0^t \int_\Gamma [U_{ij}^*(Q, t; S, \tau)p_j(Q, \tau) - \bar{P}_{ij}^*(Q, t; S, \tau)\dot{u}_j(Q, \tau)]d\Gamma d\tau + u_i^I(S, t) \quad (6)$$

式中, $u_i^I(S, t)$ 表示入射波场在 S 点 t 时刻 i 方向的位移分量。

将边界积分方程 (3) 式或 (6) 式在时空域内进行离散, 即可进行数值求解^[2]。

在解出全部边界量 u 和 p 后, 根据下式确定内点 s 的位移

$$u_i(s, t) = \int_0^t \int_\Gamma [U_{ij}^*(Q, t; s, \tau)p_j(Q, \tau) - \bar{P}_{ij}^*(Q, t; s, \tau)\dot{u}_j(Q, \tau)]d\Gamma d\tau \quad (7)$$

或者

$$u_i(s, t) = \int_0^t \int_\Gamma [U_{ij}^*(Q, t; s, \tau)p_j(Q, \tau) - \bar{P}_{ij}^*(Q, t; s, \tau)\dot{u}_j(Q, \tau)]d\Gamma d\tau + u_i^I(s, t) \quad (8)$$

上述各向异性介质时域边界元计算模型的数值实施, 已由计算程序加以实现^[3]。关于边界点与内点的应力计算, 一般采取不同的方法。对于边界点, 一般根据边界面力与应力的平衡关系、本构关系以及应变与位移的关系在边界上恢复应力张量; 对于内点, 由于很难得到各向异性介质内点应力的积分表达式, 本文通过引入高精度的数值微分格式, 采取基于内点位移解的数值微分方法^[4]。

1.2 正交异性半无限域受冲击载荷的数值计算

如图 1 所示的由单向纤维增强光弹性复合材料模拟的二维正交异性半无限域, 在其表面 $x = 0$ 上一段区域受到垂直向下的冲击载荷, 加载方向与材料纤维方向分别成 $0^\circ, 90^\circ$ 及 45° 角度, 求其轴线上 A, B 两点的应力响应。

计算参数：边界元离散范围取原点左右各 0.2 m，用两节点线性单元离散，最大单元长度 $l_j = 0.01$ m， $C_I \Delta t / l_j$ 取值为 0.4 ~ 0.8，数值微分步长 $h = 0.005$ m，节点编号如图 1 所示。计算点坐标为：A(0.0, -0.025) 及 B(0.0, -0.045)。计算中输入的载荷曲线为动态光弹性实验的冲击载荷过程，通过一维杆由应变反推得到，如图 2 所示。计算中输入的材料的动态参数列于表 1。

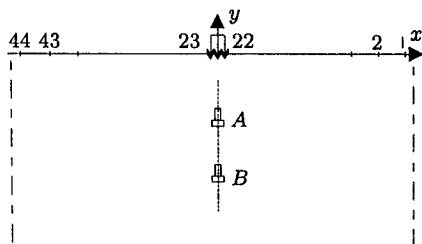


图 1 二维正交异性半无限域受冲击载荷作用
Fig.1 A half infinite orthotropic domain under impact loading

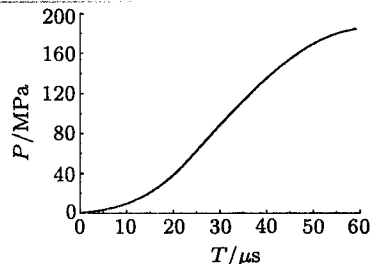


图 2 冲击载荷曲线
Fig.2 The impact loading curve

表 1 材料动态参数 (纤维体积含量约 5%)

Table 1 Dynamic constants of the composites (with approximate 5% fiber content)

E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{21}	ν_{12}	f_1 (10^3 N/m·fringe)	f_2 (10^3 N/m·fringe)	f_{12} (10^3 N/m·fringe)
7.66	4.27	1.60	0.36	0.20	49.18	36.71	31.86

2 正交异性动态光弹性实验

2.1 正交异性动态应力 - 光性定律

正交异性动态光弹性方法是一种新的实验力学方法，其中，适用于动态研究的光弹性模型材料、残余双折射效应、正交异性材料的动态应力 - 光性定律以及动态力学参数及动态应力条纹值的标定，是正交异性动态光弹性方法研究中几个需要首先解决的基本问题，而正交异性动态应力 - 光性定律的研究，又是研究的焦点所在。本文将静态下 Hyer 和 Liu 表述的应力 - 光性定律推广到动态领域^[5]，从而得到任意笛卡尔坐标系 xy 下的正交异性动态应力 - 光性定律

$$N_T = \left\{ \left(\frac{\sigma_x}{C_1} - \frac{\sigma_y}{C_2} + \frac{\tau_{xy}}{C_3} + N_R \cos 2\delta_R \right)^2 + \left[2 \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{C_4} + \frac{\tau_{xy}}{C_5} \right) + N_R \sin 2\delta_R \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (9)$$

其中，

$$\left. \begin{aligned} 1/C_1 &= d \left(\frac{\cos^2 \theta}{f_1} - \frac{\sin^2 \theta}{f_2} \right), & 1/C_2 &= d \left(\frac{\cos^2 \theta}{f_2} - \frac{\sin^2 \theta}{f_1} \right) \\ 1/C_3 &= d(1/f_1 + 1/f_2) \sin 2\theta, & 1/C_4 &= -\frac{d \sin \theta \cos \theta}{f_{12}} \\ 1/C_5 &= \frac{d(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{f_{12}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

在上式中， N_T 为观察到的由全部双折射产生的条纹级数， N_R 为残余双折射导致的条纹级

数, δ_R 表示主坐标系下的残余等倾角, f_1 , f_2 及 f_{12} 分别表示纤维方向、垂直于纤维方向及纯剪切应力状态下材料的动态应力条纹值, d 为模型厚度, θ 表示纤维方向与 x 轴的夹角. N_R 及 δ_R 均在无载荷状态下直接测取, 材料的三个动态应力条纹值以及动态力学参数一般利用三个单轴试件, 即加载方向与纤维方向分别成 0° , 90° 及 45° 的单轴试件, 进行冲击压缩实验测得.

动态光弹性实验与时域边界元计算模型的比较, 是以双折射条纹级数为对象进行的, 上述应力 - 光性定律是时域边界元方法计算双折射条纹级数的依据. 计算与应变分析所用材料的动态力学参数与动态光弹性常数均由实测所得, 表 1 为模型材料标定结果.

2.2 实验成果

实验用仪器为 Cranz-Schardin 动态光弹性仪 (简称沙丁机), 它是常见的记录动态等差线条纹的高速摄影系统. 由于沙丁机具有记录清晰、能够连续获得 16 甚至 36 个时刻的照片、幅间隔小且可调等优点, 因而在动态光弹性实验中得以广泛应用. 沙丁机主要由 3 个部分组成, 即高速摄影系统, 加载系统以及控制同步、延迟及记录时间系统. 由小口径步枪冲击加载, 加载速率约 50 MN/s , 加载方向与材料纤维方向分别成 0° , 90° 及 45° 角度. 对每一个加载方向, 保持同样条件连续进行 3 次动态光弹性实验. 图 3 为分别得到的 3 个加载方向下其中 6 幅双折射条纹照片.

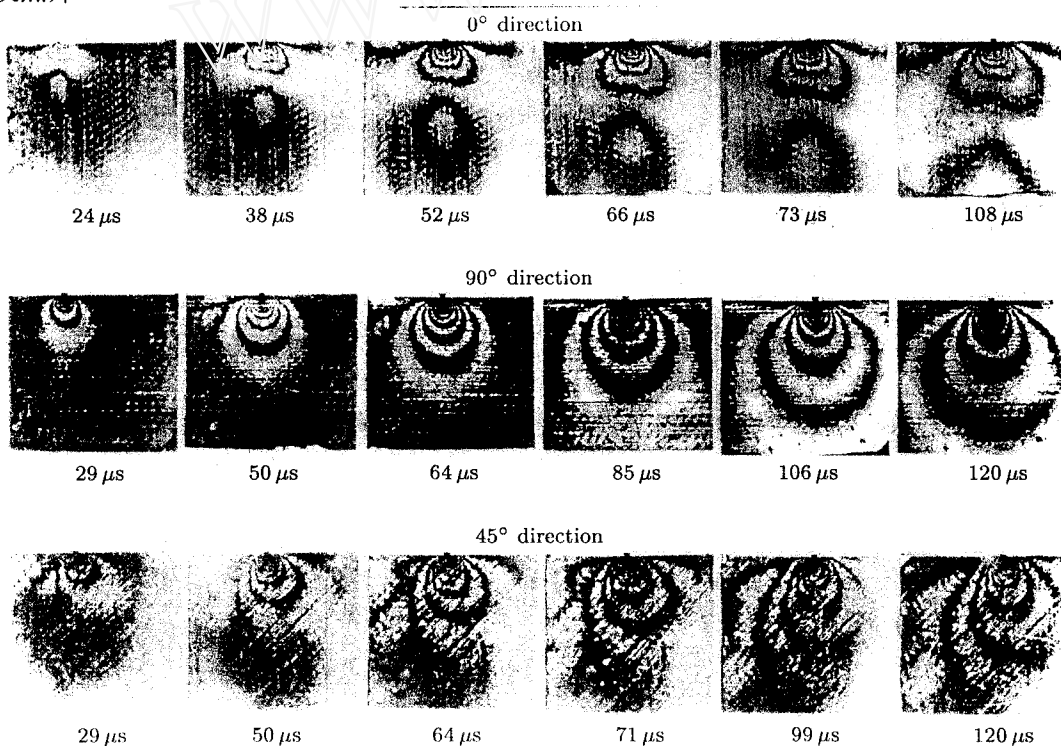


图 3 3 个加载方向系列双折射条纹图像

Fig.3 Series of birefringent fringe patterns for each loading direction

将时域边界元计算出的应力历程代入式 (9), 得到双折射条纹级数的历程曲线, 这可以与动态光弹性实验的结果进行比较, 如图 4, 图 5 及图 6 所示 (图中括弧内号码为实验重复序号),

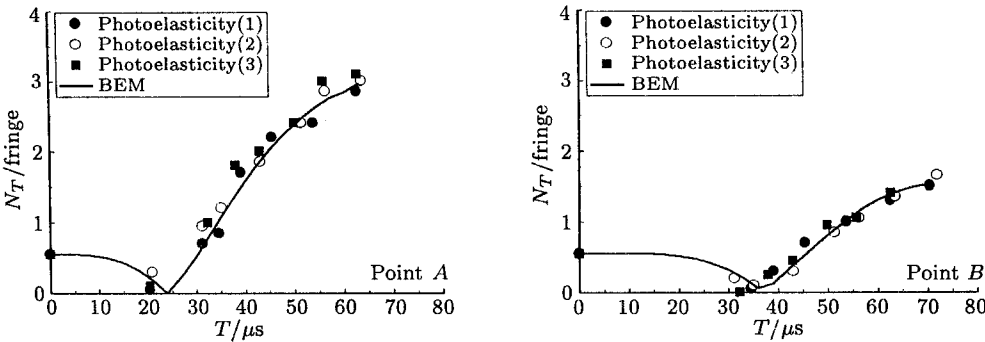


图 4 0° 方向双折射条纹级数历程

Fig.4 Histories of birefringent fringe orders for specific points(0° direction)

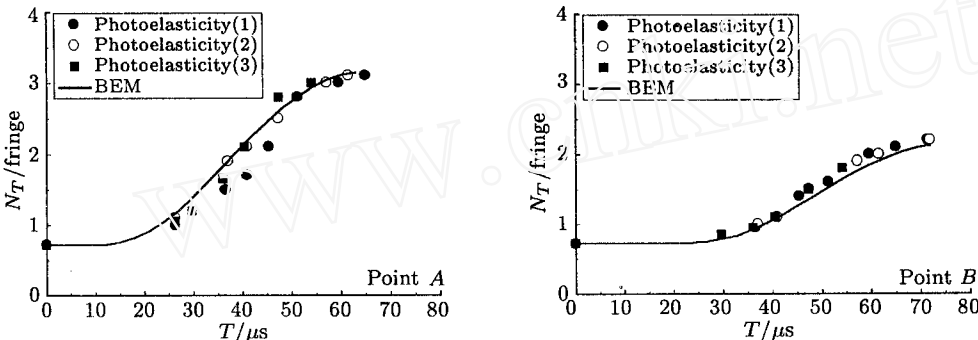


图 5 90° 方向双折射条纹级数历程

Fig.5 Histories of birefringent fringe orders for specific points (90° direction)

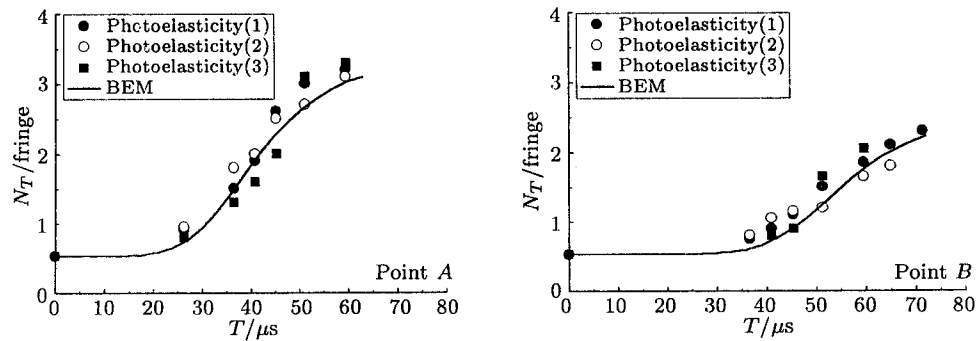


图 6 45° 方向双折射条纹级数历程

Fig.6 Histories of birefringent fringe orders for specific points (45° direction)

可以看出，二者吻合较好。

3 动态应变测量

在进行正交异性动态光弹性实验的同时，对计算点 A 、 B 处进行动态应变测量，从而在获

得 3 个加载方向系列双折射条纹图片的同时,可以得到 3 个加载方向测点的应变响应曲线. 实验用仪器有超动态应变仪、瞬态波形存储器及 xy 记录仪,其中超动态应变仪可以测量应变变化频率在 10 Hz 至 1 MHz 之间的动态应变,瞬态波形存储器的动态频响也可以达到几兆赫,这可以保证在冲击实验中瞬态应变信号不会失真. 所用应变片为 1 mm×1 mm 超精密级箔式应变片,布片如图 1 所示(对 45° 加载方向,贴片为 45° 应变花).

根据正交异性材料平面应力状态下的应力应变关系,换算出测点的应力历程,详见图 7,图 8 及图 9. 从图中可以看出,时域边界元计算的结果与动态应变测量的结果基本吻合.

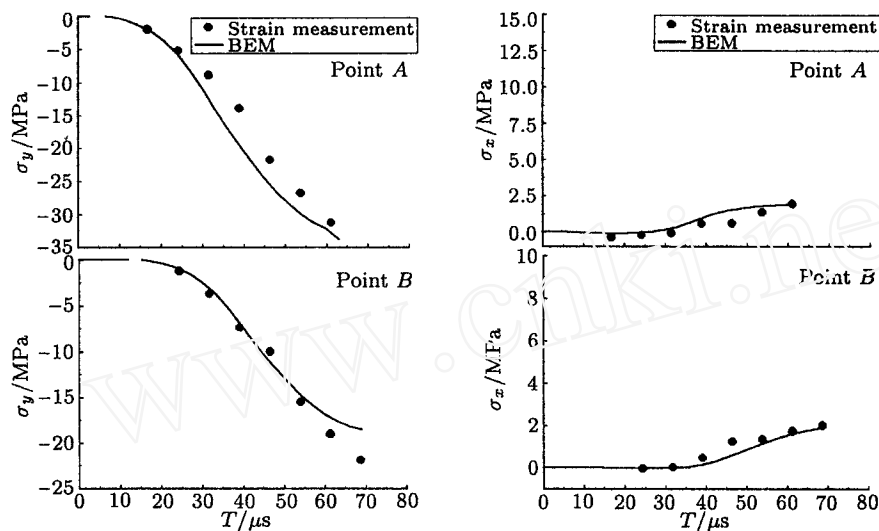


图 7 0° 方向应力历程

Fig.7 Stress histories for specific points (0° direction)

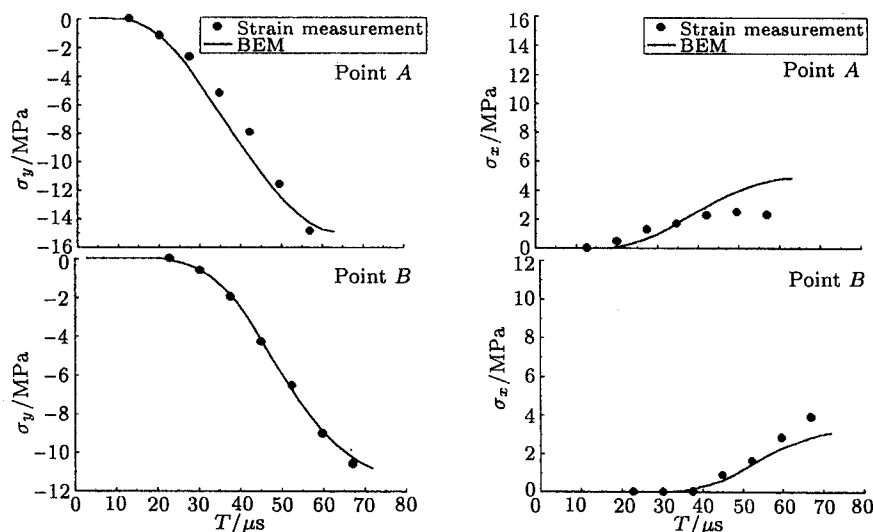


图 8 90° 方向应力历程

Fig.8 Stress histories for specific points (90° direction)

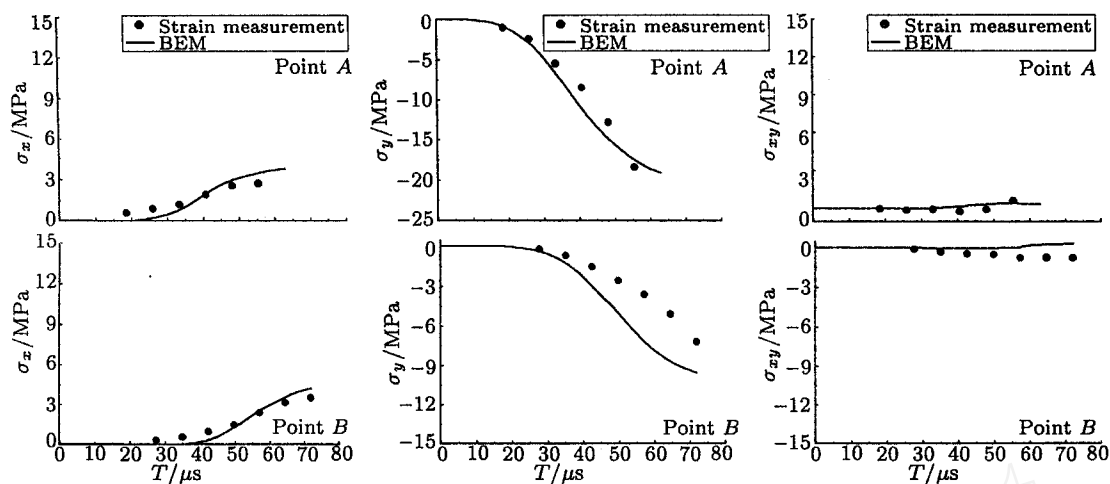


图 9 45° 方向应力历程

Fig.9 Stress histories for specific points (45° direction)

4 小 结

本文通过设计模型实验, 运用正交异性动态光弹性方法和动态应变测量方法, 对所建立的各项异性介质波动问题的时域边界元计算模型进行了实验验证. 由于数值计算模型处理的是理想化的力学模型和数学模型, 而实验分析方法也有一定模型假设的前提及其它系统误差, 因此, 任意一种分析方法都不可能绝对反映模型的实际应力状态. 同时, 下列因素也会使计算和实验结果产生误差, 如冲击载荷曲线的精确测取、材料动力学参数及动态光弹性常数的标定以及对条纹图、应变曲线的取数等. 考虑到这些情况, 以及本文取得的数值模型结果与实验结果的符合程度, 认为所建立的各项异性介质波动问题的时域边界元计算模型具有较好的精度和稳定性, 可以应用于解决工程实际问题.

致谢 金峰教授对本文工作提出了宝贵意见, 特此致谢.

参 考 文 献

- 1 Payton R G. Elastic wave propagation in transversely isotropic media. Nijhoff, The Netherlands: Martinus, 1983
- 2 任允涛. 各向同性与各向异性介质波动问题边界元法及其工程应用: [博士学位论文]. 北京: 清华大学, 1995 (Ren Yuntao. Boundary element methods for wave propagation problems in isotropic or anisotropic media and its application in engineering: (Ph.D. Dissertation). Beijing, China: Tsinghua University, 1995 (in Chinese))
- 3 Ren Yuntao, Jin Feng, Zhang Chuhan, Wang Guanglun. A time domain BEM for wave propagation problems in 2D orthotropic media and its applications. In: Tanaka M and Yao Z, eds. Boundary Element Method. Tokyo: Elsevier Science, 1996: 233~242
- 4 刘海笑, 张楚汉, 金峰. 时域边界元应力计算方法研究. 清华大学学报, 1998, 38(1): 115~118 (Liu Haixiao, Zhang Chuhan, Jin Feng. Stress calculations in time domain BEM analysis. *J of Tsinghua University*, 1998, 38(1): 115~118 (in Chinese))
- 5 Hyer M W, Liu D H. An assessment of the accuracy of orthotropic photoelasticity. NASA Report, No.3773, 1984

TIME DOMAIN BEM FOR WAVE PROPAGATION PROBLEMS IN ANISOTROPIC MEDIA AND ITS EXPERIMENTAL VERIFICATIONS ¹⁾

Zhang Chuhan Liu Haixiao Wang Guanglun

(*Department of Hydraulic Engineering and Hydropower, Tsinghua University, Peking 100084, China*)

Li Zheng

(*Department of Mechanics, Peking University, Beijing 100871, China*)

Abstract Attributed primarily to the reduction of dimensionality of problems, high accuracy of results and automatic consideration of the radiation conditions at infinity, Boundary Element Method (BEM) has become increasingly popular for the solution of linear elastodynamic problems. Time domain Boundary Element Method for wave propagation problems in anisotropic media is effectively applicable in the research fields of earthquake engineering, rock dynamics and composite dynamics. Due to the complexity of time domain fundamental solutions for anisotropic media and possible errors from implementing procedures, verification of the numerical model and examination of its accuracy and stability by experiments are valuable. The main purpose of this paper is to verify experimentally the computational model of time domain BEM for wave propagation problems in anisotropic media. A half infinite orthotropic domain of unidirectional fiber-reinforced photoelastic composite under impact loading, with the loading direction parallel, perpendicular and at 45° to the fiber direction, is analyzed by dynamic orthotropic photoelasticity, dynamic strain measurement and time domain BEM for wave propagation problems in anisotropic media. The histories of birefringent fringe orders, calculated from the dynamic stress-optic law making use of stress values from BEM, are presented and compared with the results from tests of dynamic orthotropic photoelasticity. Also, the stress histories, obtained from dynamic strain measurement, are presented and compared with the BEM results. The good agreement between two results of time domain BEM and above experimental method demonstrates that this computation model is not only reliable but also achieving sufficient accuracy. It can be used in analysis of dynamic problems, especially of wave propagation problems for anisotropic media.

Key words Anisotropic media, fiber-reinforced photoelastic composite, time domain BEM, dynamic orthotropic photoelasticity, dynamic strain measurement

Received 22 October, 1997, revised 17 February, 1998.

¹⁾ The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19572035).