

三维 N-S 方程计算隐式有限体积法

谢中强 欧阳水吾

(北京空气动力研究所, 北京 100074)

摘要 利用 NND 有限差分格式, 发展了一种新的完全隐式的有限体积数值方法, 以求解与时间相关的 N-S 方程. 对通过单元体界面的无粘流和粘性流通量均作隐式处理. 对绕流钝锥体和不同攻角的气动辅助实验飞行器的高超声速粘性流和化学反应流获得了定常数值解. 对流加热率和流场电子密度的计算值与实验数据进行了比较, 符合较好, 证实了本方法的精确性.

关键词 有限体积法, NND 格式, N-S 方程, 粘性流, 化学反应流

引 言

NND 格式具有无波动、无自由参数等性质, 它的优越性在有限差分方法和有限体积法中都得到证实. 我们曾在有限体积法中对考虑对流项隐式的 NND 格式进行推导, 并用其求解完全气体和化学非平衡气体流场, 在一定雷诺数范围内取得较好的计算结果^[1]. 可是, 在飞行高度很高, 雷诺数很低时, 或在将网格加密, 出现较小的网格雷诺数时, 由于粘性项的影响增大, 这种格式计算收敛缓慢, 甚至出现发散. 为此, 我们将粘性项也进行隐式处理, 问题得到很大改观, 这对计算高空流动, 或者为了精确计算物面热流率而需要很小的壁面网格时, 具有很大的实用价值. 同时, 由于粘性隐式项的特殊结构, 该方法能够很方便地推广到化学非平衡流动的计算中, 而不需要大量地增加计算机时, 因而对于高超声速流场计算具有实际意义. 本文用多组实验数据比较两种格式的计算结果, 并计算国外复杂的 AFE 外形, 与实验数据比较, 结果表明, 在完全气体和化学非平衡气体的全 N-S 方程的计算中, 该格式都是很成功的.

1 控制方程

在所研究的流场区域中, 将流体动力学基本方程对一个单元体以积分形式表示如下

$$\iiint_{\Delta V} \frac{\partial q}{\partial t} dV + \iint_s (f \cdot n) ds = \iiint_{\Delta V} \dot{\omega} dV \quad (1)$$

考虑流场中一个形状为六面体的单元体. 单元体各顶点以 $(i, j, k), (i+1, j, k), (i, j+1, k), \dots$ 等表示, 中心点以 (I, J, K) 表示. 设单元体体积为 Ω , 其左平面中心以 (i, J, K) 表示, 右平面中心以 $(i+1, J, K)$ 表示, $\sigma_{i,J,K}$ 为左平面面积, 而其它各平面类似. 那么, 在该单元体上, 将控制方程按粘性项和无粘项展开后, 有

$$\left[\frac{\Omega}{\delta t} \delta q \right]_{I,J,K} + (E_{i+1}^{n+1} - E_i^{n+1})_{J,K} + (F_{j+1}^{n+1} - F_j^{n+1})_{i,K} + (G_{k+1}^{n+1} - G_k^{n+1})_{i,j} =$$

1997-01-17 收到第一稿, 1998-03-24 收到修改稿.

$$= (\mathbf{E}_{v,i+1}^{n+1} - \mathbf{E}_{v,i}^{n+1})_{J,K} + (\mathbf{F}_{v,j+1}^{n+1} - \mathbf{F}_{v,j}^{n+1})_{I,K} + (\mathbf{G}_{v,k+1}^{n+1} - \mathbf{G}_{v,k}^{n+1})_{I,J} + [\dot{\omega}\Omega]_{I,J,K} \quad (2)$$

其中通量表达式为

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{i,J,K} = \sigma_{i,J,K} \begin{bmatrix} \rho_s \hat{u} \\ \rho u \hat{u} + n_x p \\ \rho v \hat{u} + n_y p \\ \rho w \hat{u} + n_z p \\ \rho H \hat{u} \end{bmatrix}_{i,J,K} \quad (3)$$

$$\mathbf{E}_{v,i,J,K} = \sigma_{i,J,K} \begin{bmatrix} \rho_s D_s \frac{\partial c_s}{\partial \xi} \xi_n \\ \tau_{nx} \\ \tau_{ny} \\ \tau_{nz} \\ u\tau_{nx} + v\tau_{ny} + w\tau_{nz} + q_n \end{bmatrix}_{i,J,K}$$

式中 p 为压力, ρ 为密度, u, v, w 分别为速度 $\mathbf{V}$ 在坐标 x, y, z 方向的速度分量, e_t 为单位质量的总能量, H 为单位质量的总焓. $\mathbf{n}$ 为表面法向单位矢量, 它以下标增加的方向为正. n_x 为 $\mathbf{n}$ 与 x 方向的夹角余弦, 且

$$\hat{u} = un_x + vn_y + wn_z \quad (4)$$

$\dot{\omega}$ 为化学源项, 表示为

$$\dot{\omega} = [\dot{\omega}_s, 0, 0, 0, 0]^T \quad (5)$$

对于完全气体, 只有一个总的连续方程, 组元扩散项和化学源项均为零.

2 有限体积法中的全隐式 NND 格式

Jacobian 矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 表示如下

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{q}} \quad (6)$$

采用最大特征值分裂, 定义

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \lambda_{\max}^A \mathbf{I}), \quad \mathbf{A}^- = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \lambda_{\max}^A \mathbf{I}) \quad (7)$$

$\mathbf{I}$ 为单位矩阵, $\lambda_{\max}^A$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值的绝对值最大者.

$$\lambda_{\max}^A = \max(\sigma|\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{c}|, \sigma|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{c}|) \quad (8)$$

c 为声速.

按隐式 NND 格式의思想和构造方法^[1,2], 可将对流项展开为如下形式

$$\mathbf{E}_{i+1}^{n+1} = \mathbf{A}_I^+ \delta \mathbf{q}_I + \mathbf{A}_{I+1}^- \delta \mathbf{q}_{I+1} + \left[\frac{1}{2}(\mathbf{E}_I^n + \mathbf{E}_{I+1}^n) + \frac{1}{4} \mathbf{A}_{i+1} (\Delta_I \mathbf{q} - \Delta_{I+1} \mathbf{q}) + \frac{1}{4} \lambda_{i+1} (\Delta_I \mathbf{q} + \Delta_{I+1} \mathbf{q} - 2\Delta_{i+1} \mathbf{q}) \right] \quad (9)$$

式中

$$\delta q_I = q_I^{n+1} - q_I^n \quad (10)$$

$$\Delta_I q = \min \text{mod}(\Delta_i q, \Delta_{i+1} q) \quad (11)$$

$$\Delta_i q = q_I - q_{I-1} \quad (12)$$

以上各式需注意下标的大小写的不同.

为了对粘性项也作隐式处理, 可作如下构造

$$E_{v,i+1}^{n+1} = E_{v,i+1}^n + A_{v,I+1}^- \delta q_{I+1} - A_{v,I}^+ \delta q_I \quad (13)$$

$$A_{v,I}^+ = -\frac{1}{\rho_I} (\sigma \mu \xi_n)_{i+1} [a_{mn}]_{(I,i+1)} \quad (14)$$

$$A_{v,I}^- = -\frac{1}{\rho_I} (\sigma \mu \xi_n)_i [a_{mn}]_{(I,i)} \quad (15)$$

$[a_{mn}]$ 矩阵有双重下标, 表示其值既需要单元体表面参数, 又需要单元题中心参数, 计算 j, k 方向时, 上式中的 ξ_n 应改为 η_n 或 ζ_n .

将 E^{n+1} , E_v^{n+1} 以及类似的表示式 F^{n+1} , G^{n+1} 和 F_v^{n+1} , G_v^{n+1} 代入方程 (9) 式, 并注意 $A^+ - A^- = \lambda_{\max}^A I$, $B^+ - B^- = \lambda_{\max}^B I$, $C^+ - C^- = \lambda_{\max}^C I$, 得出有限体积法中的隐式 NND 格式如下

$$\begin{aligned} & (\tilde{A})_{I,J,K} \delta q_{I,J,K} + \tilde{A}_{I+1}^- \delta q_{I+1} - \tilde{A}_{I-1}^+ \delta q_{I-1} + \\ & \tilde{B}_{J+1}^- \delta q_{J+1} - \tilde{B}_{J-1}^+ \delta q_{J-1} + \tilde{C}_{K+1}^- \delta q_{K+1} - \tilde{C}_{K-1}^+ \delta q_{K-1} = \text{RHS} \end{aligned} \quad (16)$$

求解方程 (16) 时, 将格式分裂为两步处理

$$\tilde{A} D_{I,J,K}^* - \tilde{A}_{I-1}^+ D_{I-1}^* - \tilde{B}_{J-1}^+ D_{J-1}^* - \tilde{C}_{K-1}^+ D_{K-1}^* = \text{RHS} \quad (17a)$$

$$\tilde{A} \delta q_{I,J,K} + \tilde{A}_{I+1}^- \delta q_{I+1} + \tilde{B}_{J+1}^- \delta q_{J+1} + \tilde{C}_{K+1}^- \delta q_{K+1} = \tilde{A} D_{I,J,K}^* \quad (17b)$$

式中

$$\begin{aligned} \tilde{A} = & \left(\frac{\Omega}{\partial t} + \lambda_{\max}^A + \lambda_{\max}^B + \lambda_{\max}^C \right)_{I,J,K} I + A_{v,I}^+ + \\ & A_{v,I}^- + B_{v,J}^+ + B_{v,J}^- + C_{v,K}^+ + C_{v,K}^- \end{aligned} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A}_{I-1}^+ &= A_{I-1}^+ + A_{v,I-1}^+, & \tilde{A}_{I+1}^- &= A_{I+1}^- - A_{v,I+1}^- \\ \tilde{B}_{J-1}^+ &= B_{J-1}^+ + B_{v,J-1}^+, & \tilde{B}_{J+1}^- &= B_{J+1}^- - B_{v,J+1}^- \\ \tilde{C}_{K-1}^+ &= C_{K-1}^+ + C_{v,K-1}^+, & \tilde{C}_{K+1}^- &= C_{K+1}^- - C_{v,K+1}^- \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\text{RHS} = -(\tilde{E}_{i+1} - \tilde{E}_i + \tilde{F}_{j+1} - \tilde{F}_j + \tilde{G}_{k+1} - \tilde{G}_k) + W_v \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{i+1} &= \frac{1}{2} (E_I^n + E_{I+1}^n) + \\ & \frac{1}{4} A_{i+1} (\Delta_I q - \Delta_{I+1} q) + \frac{1}{4} \lambda_{i+1} (\Delta_I q + \Delta_{I+1} q - 2\Delta_{i+1} q) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} W_v = & (E_{v,i+1}^n - E_{v,i}^n)_{J,K} + (F_{v,j+1}^n - F_{v,j}^n)_{I,K} + \\ & (G_{v,k+1}^n - G_{v,k}^n)_{I,J} + [\dot{\omega}\Omega]_{I,J,K} \end{aligned} \quad (22)$$

对于 $\tilde{F}_{j+1}$, $\tilde{G}_{k+1}$ 有类似的表示式.

如果不考虑对粘性项取隐式格式, 则 $\tilde{A}$ 为一标量数, 对方程 (17) 的求解不需要解代数方程组, 粘性项取隐式形式, 方程 (17) 需要解代数方程组, 但由于粘性项的 Jacobian 矩阵 A_v , B_v , C_v 具有特别的形式, 可以看出不论是完全气体还是多组元气体, 方程 (17) 的代数方程组的求解过程是可以简化的, 花机时的主要部分只是求解一个 3×3 的代数方程组, 这样, 整个程序的工作量, 尤其是计算化学非平衡问题时, 并没有大幅度的增加, 因而该格式在目前机器条件下也是可行的.

3 计算结果和讨论

本文进行了多组计算, 并与实验结果相比较. 来流条件大致可分以下 3 组:

(1) 风洞条件: $U_\infty = 1461.7 \text{ m/s}$, $\rho_\infty = 0.9737 \times 10^{-2}$, $T_\infty = 47.37 \text{ K}$, $T_w = 300 \text{ K}$, 头部半径为 0.009525 m , 半锥角 $\theta = 15^\circ$.

(2) 飞行高度: $H = 76 \text{ km}$, 马赫数 $M = 25.7$ 的飞行条件: 球锥体外形, 头部半径 $Rn = 0.1524 \text{ m}$, 半锥角 $\theta = 9^\circ$. $U_\infty = 7620 \text{ m/s}$, $\rho_\infty = 0.3500 \times 10^{-4}$, $T_\infty = 219 \text{ K}$, $T_w = 1000 \text{ K}$.

(3) AFE 外形: $U_\infty = 1420.5 \text{ m/s}$, $\rho_\infty = 0.4057 \times 10^{-2}$, $T_\infty = 51.67 \text{ K}$, $T_w = 300 \text{ K}$, 计算 3 种攻角, α 分别为 0° , 10° , -10° . 马赫数 $M = 9.86$.

对粘性项作隐式处理的格式 (以下简称隐式格式) 不仅其收敛情况明显好于未对粘性项作隐式处理的格式 (以下简称显式格式), 更重要的是它对很小的网格雷诺数和来流雷诺数有较强的适应能力, 而这对于热流的计算是极其重要的. 图 1 为条件 (1) 下驻点线温度分布和其在壁面附近的放大图, 其中粗细实线分别表示隐式和显式格式的计算结果. 该图清晰地表明热流求解对网格的依赖. 在整个流场内, 两种格式所求得温度分布是基本一致的, 但由于壁面网格

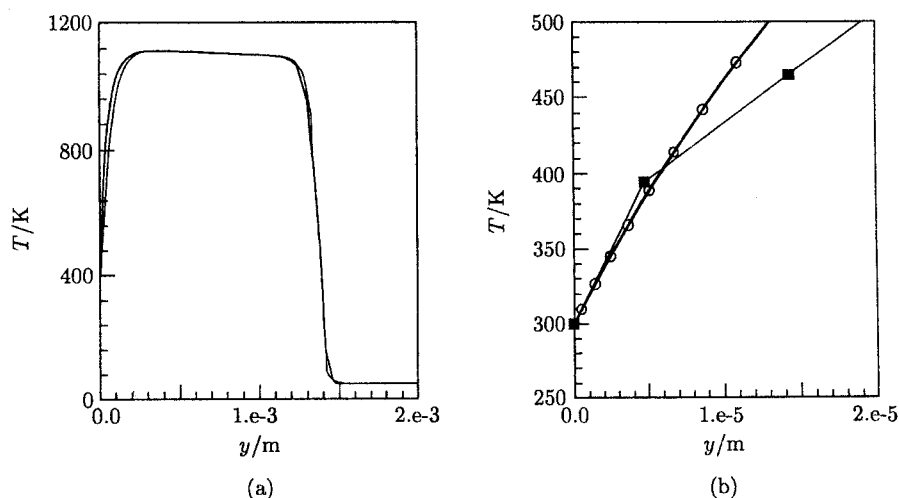


图 1 驻点线温度分布

Fig.1 Temperature distribution along the stagnation line

的不同, 导致壁面温度导数的差异. 经反复的数值实验, 我们认为只有当壁面附近网格点上的温度值与网格点到壁面的距离近似成线性关系时, 所求的温度梯度才更可靠, 显然只有足够密的壁面网格才能得到这种结果. 图 2 为同样条件下, 本文计算结果与实验结果^[3]的比较, 图中也显示出对粘性项作不同处理时, 其计算结果的不同. 需要说明的是, 隐式格式壁面网格厚度为头部半径的万分之一, 网格雷诺数约为 1. 而显式格式是隐式格式的十倍. 因为在壁面附近格式精度降低, 只有当网格雷诺数不大于 2 时才能保证较为精确地模拟粘性效应. 而显式格式一般是达不到这个网格雷诺数的. 图 3 为对飞行高度 $H = 76\text{ km}$ 飞行条件下化学非平衡电离流场的计算结果. 完全催化 (FCW) 和非催化 (NCW) 两种壁面催化条件引起的计算结果有较大差别, 本文中完全催化壁的计算结果符合较好. 由此可见, 对峰值电子数密度的计算, 如何取壁面条件也是一个值得探索的课题.

图 4 到图 6 为国外经典的 AFE 外形的计算结果. AFE (Aeroassist Flight Experiment

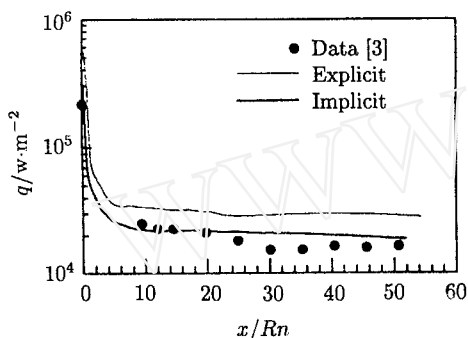


图 2 物面热流分布
Fig.2 Surface heating rate distribution

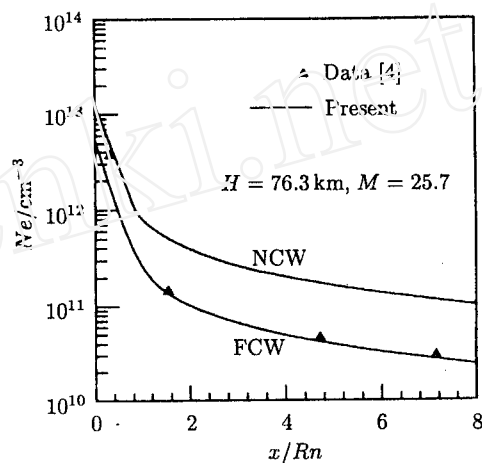


图 3 峰值电子数密度分布
Fig.3 The peak electron number density distribution

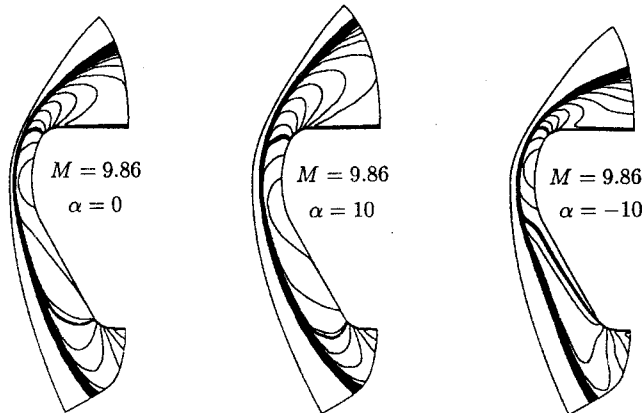


图 4 AFE 飞行器绕流等值马赫线
Fig.4 Mach number contours

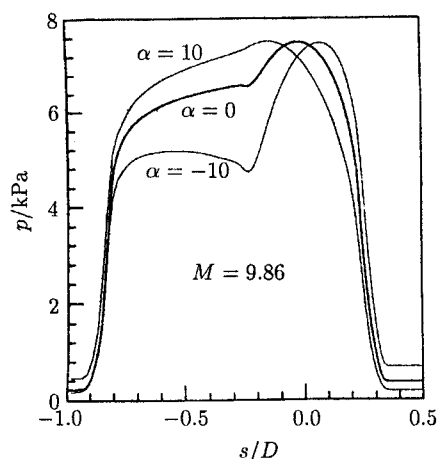


图 5 物面压力分布

Fig.5 Surface pressure distribution

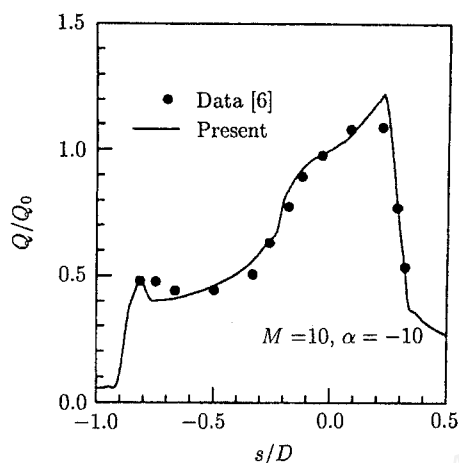


图 6 物面热流分布

Fig.6 Surface heating rate distribution

Vehicle) 外形^[5] 头部为一椭圆球头和与之相切的椭圆锥, 锥体被一斜截面截断, 该截面正好为圆形, 其直径 $D = 1$ m, 另有一裙体在此截面与椭圆锥相切联结. 为简化计算, 采用文献 [6] 的方法拉长尾裙. 图 4 为 3 个不同攻角下, AFE 外形绕流对称平面上的马赫数等值线, 图中的粗实线为声速线, 显示了攻角的变化对亚声速区的影响. 图 5 为对称平面上压力分布, 图中给出了攻角对压力的影响. 图 6 为 -10° 攻角条件下对称平面上物面热流与实验数据的比较, 它们与文献 [6] 的结果有较好的一致性.

4 结 论

在有限体积法中应用隐式的 NND 格式求解流场, 在 70 km 以下高空, 能求解出比较精确的流场参数和气动力系数, 随着飞行高度的进一步增高, 对控制方程无粘项和粘性项均进行隐式处理, 则在不大量增加机时的情况下, 可以对更小的来流雷诺数和网格雷诺数进行计算, 并能得到更为精确的热流分布. 反复的数值实验表明, 有限体积法中全隐式的 NND 格式的计算结果是准确可靠的.

参 考 文 献

- 1 谢中强, 欧阳水吾. 粘性流场三维 N-S 方程有限体积法数值解. 空气动力学学报, 1996, 14(4): 476~484 (Xie Zhongqiang, Ouyang Shuiwu. A three-dimensional finite volume Navier-Stokes solver for computing viscous flowfield. *Acta Aerodynamica Sinica*, 1996, 14(4): 476~484 (in Chinese))
- 2 Zhang HX, Zhuang FG. NND schemes and their applications to numerical simulation of two- and three-dimensional flows. *Advances in Applied Mechanics*, 1992, 29: 374
- 3 Cleary JW. Effects of angle of attack and bluntness on laminar heating-rate distributions of a 15° cone at a mach number of 10.6. NASA TN D-5450, 1969
- 4 Imlay Scott T, Roberts DW, Soetrisno M. Nonequilibrium thermo-chemical calculations using a diagonal implicit scheme. AIAA-91-0468, 1991
- 5 Cheatwood FM, Dejarnette FR, Hamilton HH. Geometrical description for a proposed aeroassist flight experiment vehicle. NASA TM-87714, July 1986

6 Hamilton HH, Weilmuenster KJ. Calculation of convective heating on proposed aerossist flight experiment vehicle. AIAA-86-1308, 1986

IMPLICIT FINITE VOLUME METHOD FOR THREE-DIMENSIONAL NAVIER-STOKES COMPUTATION

Xie Zhongqiang Ouyang Shuiwu

(Beijing Institute of Aerodynamics, Beijing 100074, China)

Abstract In this study, a new fully-implicit finite-volume numerical algorithm is developed to solve the time-dependent Navier-Stokes equations using NND finite difference scheme. Both inviscid and viscous fluxes across cell boundaries are treated implicitly. The present work emphasizes the finite-volume approximation of the integral form of the conservation laws. The integral approach enhances both stability and accuracy of the algorithm. Nonequilibrium reacting hypersonic ionizing air viscous flows over the reentry vehicles are investigated and numerically simulated by the Navier-Stokes equations with the chemical source terms. The global continuity equation is replaced by the conservation equations of individual species. For the high temperature ionized air there are seven primary constituents: N_2 , O_2 , NO , NO^+ , N , O , and e^- . Chemical kinetics are described by 7 species and 6 possible reactions between these species. The governing equations in conservation form including multicomponent, finite-rate chemical reactions are solved to demonstrate the ability of the technique. All the computations are performed using shock-capturing methods. The non-catalytic surface boundary condition is treated for the chemical species. The steady state numerical solutions are obtained for hypersonic viscous and chemically reacting flows over the blunted cones and three-dimensional blunt-body at different angles of attack. We have successfully avoided the stiffness problem by treating the source term implicitly. Good comparisons with experimental data and other numerical results for pressure distributions, heat transfer distributions, and electron densities in the flow field have been demonstrated for three-dimensional blunt-body flows. Good agreements are obtained and verify the accuracy of the present method.

Key words finite-volume algorithm, NND scheme, Navier-Stokes equations, hypersonic viscous flows, chemical reacting flows

Received 17 January 1997, revised 24 March 1998.