

三维裂纹分析的主值型 面力边界积分方程法¹⁾

陶伟明 郭乙木 曹志远* 嵇醒*

(浙江大学力学系, 杭州 310027)

*(同济大学工程力学与技术系, 上海 200092)

摘要 给出了一组只包含 Cauchy 主值积分、不含有强奇异积分的三维静动力边界积分方程及其应用于裂纹问题的具体列式, 并给出了几何轴对称问题的相应半解析边界元求解方法, 将三维问题降阶为一维数值问题. 文中分析了无限、半无限介质中圆裂纹、平行圆裂纹系、球面裂纹等在静载及应力波作用下的静力或瞬态动力响应问题, 求得了相应的应力强度因子.

关键词 主值积分, 面力边界积分方程法, 裂纹, 应力强度因子, 动力学

引 言

边界积分方程法(边界元法)是求解裂纹问题的一种有效途径, 但标准的边界积分方程法应用于裂纹问题的求解时, 由于理想裂纹的上下表面在几何上是合一的, 故将遇到不确定性^[1]. 文[2, 3]综述了克服这一困难的各种方法, 其中面力边界积分方程法从某种角度来说既直接, 形式上也简单, 是一种较理想的方法. 然而, 一般的由 Rizzo 型边界积分方程通过求导而推得的面力边界积分方程含有强奇异积分, 这在积分的数学定义及具体的数值计算上都存在着一定的困难. 现有的计算这种强奇异积分的方法大致有: 修正的 Newton-Cotes 法和 Gauss 法^[4], 级数展开法, 以及各种正则化方法等. 其中, 正则化方法如, 通过分部积分将关于积分核的偏导数转移到待求函数上, 从而降低积分核的奇异性^[5]. 胡海昌^[6]通过弹性静力学的双场守恒积分, 简单而直接地推导了一组只含有 Cauchy 主值积分的面力边界积分方程, Zhang 等^[8]则依此给出了弹性动力问题的相应面力边界积分方程. 这些方程均不含强奇异积分, 因此是求解裂纹问题的一种较理想的选择.

本文首先列出裂纹问题面力边界积分方程, 建立相应边界元法, 然后给出其半解析求解过程, 最后计算分析了无限、半无限介质中圆裂纹、平行圆裂纹系、球面裂纹等在静载及应力波作用下的静力或瞬态动力响应问题.

1 主值型面力边界积分方程

弹性弹力学中存在着多种守恒积分(如众所周知的 J 积分), 在弹性动力学中也存在类似的守恒积分. 通过取对于同一物体的两组对应的精确状态, 可以推得双场守恒积分, 若取其中一组状态为问题的基本解, 则可导出主值型面力边界积分方程^[8]. 这里统一列出静力、时域动力

1) 同济大学, 国家教委固体力学开放研究实验室资助项目.

1997-03-20 收到第一稿, 1997-10-29 收到修改稿.

和频域动力问题的相应方程

$$\frac{1}{2} p_i(,) = D_{ijkl} n_j \cdot [e_{rst} e_{rlj} \overset{*}{ijk} \circ u_{i,t} n_s + U_{ik} \overset{*}{\circ} \hat{u}_i n_l - U_{ik,l} \overset{*}{\circ} p_i] d \quad (S, S \text{ 光滑}) \quad (1)$$

其中, p_i, u_i 表示边界面力和位移分量; $\overset{*}{ijk}, u_{ij}^*$ 为应力和位移基本解; S, n_i 分别为物体边界及其法向余弦; D_{ijkl} 为弹性系数矩阵; e_{ijk} 为三阶符号张量; 其他符号或算符为

$$\hat{u}_i = \begin{cases} 0 \\ \ddot{u}_i \\ -s^2 u_i \\ s^2 u_i \end{cases} \quad \text{种正核的}, \quad \circ = \begin{cases} \times (\text{乘}) \\ * (\text{卷积}) \\ \times \\ \times \end{cases}$$

www.cnki.net

$$D_{ijkl}n_j \int_{\Gamma} [e_{rst}e_{rlq} \delta_{pqk}^* u_{p,t}n_s + U_{pk}^* \delta_{pnl}^*] d\Gamma + D_{ijkl}n_j \int_{\Sigma} [e_{rst}e_{rlq} \delta_{pqk}^* u_{p,t}n_s + U_{pk}^* \delta_{pnl}^*] d\Sigma = 0 \quad (5)$$

对于含 m 个裂纹的裂纹系, 在以上各式中, $\delta_{ij}^+ = \sum_{i=1}^m \delta_{ij}^+$, δ_{ij}^+ 为第 i 个裂纹的上表面.

2 数值求解

积分方程(4)~(6)一般只能数值求解. 文[8]给出了无限域中位于 x_1Ox_2 平面内的平面裂纹问题的数值求解过程. 本文结合半解析法, 建立轴对称裂纹(系)问题的半解析边界元列式.

首先考虑全空间时域动力问题. 将裂纹面划分为 M 个单元, 将考察的时间长度 T 划分为 N 个时间单元, 即 $t^+ = \sum_{e=1}^M t_e^+$, $T = N \cdot t$, 假设裂纹张开位移

$$u_i(x, t) = \sum_{e=1}^M \sum_{n=1}^N e_{i1}^e(x) n(t) u_{1;e}^n \quad (7)$$

其中

$$n(t) = \begin{cases} 1 - |t - n \cdot t| / t & (|t - n \cdot t| \leq t) \\ 0 & (|t - n \cdot t| > t) \end{cases}$$

将其代入方程(5), 且将 t 遍历每个单元的中心点(线)坐标 $x|_d$ ($d = 1, 2, \dots, M$), 而时间 t 遍历每个时间点 $t^m = m \cdot t$, 则可得关于每一时步裂纹张开位移的线性代数方程组

$$\bar{p}_{i;d}^m = \bar{p}_i(x|_d, m \cdot t) \sum_{n=1}^N \sum_{e=1}^M A_{i1;ed}^{mn} u_{1;e}^n \quad (8)$$

对于奇异单元, $|_d = x|_e$ 时

$$A_{i1;ed}^{mn} = D_{ijkl}n_j \int_{\Gamma} [e_{rst}e_{rlq} \delta_{pqk}^* (g_{p1,t}(x) n_s(x) - g_{p1,t}(|_d) n_s(|_d))] d\Gamma + g_{p1,t}(|_d) n_s(|_d) e_{rst}e_{rlq} D_{pq} \delta_{\partial}^+ (U_{pk}^* \delta_{pnl}^*) m dl - e_{rst}e_{rlq} \delta_{\partial}^+ (\delta_{pqk}^* \delta_{pnl}^*) g_{pl}(x) n_s(x) m_t(x) dl \int + D_{ijkl}n_j \delta_{\partial}^+ (U_{pk}^* \delta_{pnl}^*) g_{pl}(x) n_l(x) d \quad (9a)$$

而当 $|_d = x|_e$ 时

$$A_{i1;ed}^{mn} = D_{ijkl}n_j \int_{\Gamma} [e_{rst}e_{rlq} \delta_{pqk}^* (g_{p1,t}(x) n_s(x) d -$$

$$e_{rst}e_{rlq} \int_{\partial} \left(U_{pqk}^* n_j - U_{pk}^* n_j \right) g_{pl}(x) n_s(x) m_l(x) dl \Big\} + D_{ijkl} n_j \int_{\partial} \left(U_{pk}^* n_j - U_{pk}^* n_j \right) g_{pl}(x) n_l(x) d \quad (9b)$$

我们可以解析计算出 $U_{pqk}^* n_j$, $U_{pk}^* n_j$, $U_{pk}^* n_j$ [8]。对于静力、Fourier 及 Laplace 变换域问题，则前者分别代之以相应的应力和位移基本解，后者分别代以 0 , $-2 U_{pk}^*$, $s^2 U_{pk}^*$ (这里的 U_{pk}^* 表示 Fourier 域或 Laplace 域的位移基本解)。

对于有限域，将外边界也划分为单元，可得到关于未知位移和面力的线代方程组。这里不作详述。

空间形函数 $g_{il}(x)$ 应使裂纹前沿张开位移具有平方根特性，并且，对于一般三维问题，可取 $g_{il}(x) = \phi(x) \delta_{il}$ ；对于轴对称问题(裂纹面、物体外边界及外载均轴对称)，可将裂纹面及物体外边界划分为一系列环单元，这时， $u_{1;e}^n$ 为柱坐标下环单元中心线张开位移 $u_{R;e}^n$, $u_{z;e}^n$ ，它们与 z 无关，而空间形函数可取为

$$[g_{il}(x)] = \phi(R, z) \begin{bmatrix} \cos & -\sin & 0 \\ \sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中，取

$$\phi(R, z) = \sqrt{r(d_m - r)} / \sqrt{r_e(d_m - r_e)}$$

而

$$r = \sqrt{(z - z_0)^2 + (R - a)^2}, r_e = \sqrt{(z_e - z_0)^2 + (R_e - a)^2}$$

分别为积分点及单元中心线到裂纹边界线的最小距离； d_m 取裂纹面特征尺寸，对于圆裂纹，取其直径，对于球面裂纹(如图 1)，可取

$$d_m = 2 \sqrt{a^2 + h^2}$$

同时，式(9)中有关积分在柱坐标中为 (R_1, R_2 为环单元两边界圆的半径)

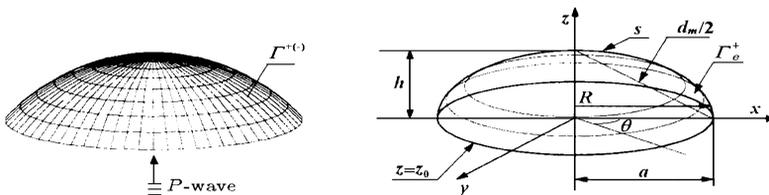


图 1 球面裂纹

Fig. 1 Spherical crack modelling

$$\int_e^+ (\cdot) d = \int_s^0 (\cdot) R d s$$

$$\partial_e^+ (\cdot) d l = \int_0^2 (\cdot) \Big|_{R=R_2} R_2 d + \int_2^0 (\cdot) \Big|_{R=R_1} R_1 d$$

这样，整个求解过程为半解析边界元方法，这可大大减少自由度数和计算工作量。若外载非轴对称，则可对面力、位移关于 θ 作三角级数展开，从而成为更一般的半解析法。

3 裂纹静动力分析

下面采用上述方法首先计算分析了在正向入射的 P 波作用下无限介质中的埋藏圆裂纹、球面裂纹的响应。图 2(a) 和 (b) 分别给出了其相应的动应力强度因子时程曲线，可以看出，对于圆裂纹问题，本文结果与 Achenbach 等^[9]所得结果相当吻合；对于球面裂纹，由于沿底面正向入射的应力波在裂纹面子午线方向有分量，故将产生较大的 II 型应力强度因子，属于复合型断裂问题。对于全空间曲面裂纹问题，I 型与 II 型、III 型问题是耦合的，而不像平面裂纹那样 I 型问题是独立的，这在本文结果中得到了反映。

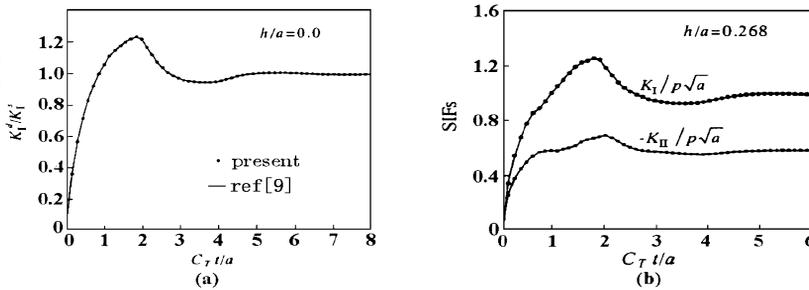


图 2 动应力强度因子时程曲线

(K_I^s 为相应静应力强度因子; C_T 为剪切波速)

Fig. 2 Dynamic SIFs curves

(K_I^s denotes the corresponding static SIF; C_T the velocity of shear wave)

本文接着分析了无限介质中同轴圆裂纹系(图 3(a))以及表面自由的半无限介质中平行于自由表面的圆裂纹(图 3(b))问题。图 4 给出了无限介质中的同轴等圆裂纹系在无穷远处沿裂纹正向均匀受拉时的应力强度因子随裂纹间距的变化情况，其中同时列出了 Isida 等^[10, 11]用体积力法求得的结果，以及 Collins^[12]求得的近似解(该近似解仅当 b/a 足够大时适用)，从图中可见本文计算结果与 Isida 等的结果吻合得较好，当 b/a 大于 1.5 时 K_I 与近似解亦已相当吻合，而当 b/a 较小时，近似解明显不合理；本文及文[10, 11]求得的 K_{II} 与近似解有较大出入，本文计算结果可以较好地反应裂纹系相互作用效应。图 5 给出了同轴等圆裂纹系 ($b/a = 1$) 在沿裂纹面正向入射 P 波作用下动应力强度因子时程曲线。与单裂纹相比，可以看到由于应力波的反射，应力强度因子将随时间产生一定的振荡。同时可以看出，波先到达的裂纹的应力强度因子的峰值较大，说明两裂纹的应力强度因子与波的入射方向有关。图 6 给出了半空间埋藏圆裂纹在上下表面作用突加均布压力时的动应力强度因子 ($h/2a = 1.5$)，与全空间问题相比，可以

看到当应力波从自由表面反射回到裂纹面时，应力强度因子将产生一定的跳跃。

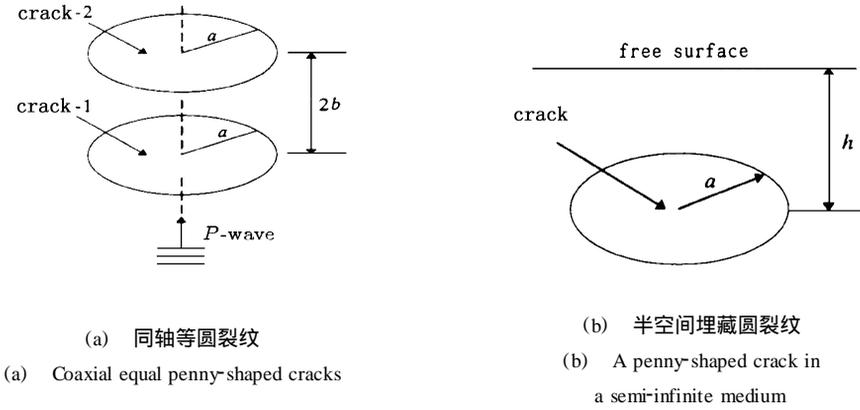


图 3

Fig. 3

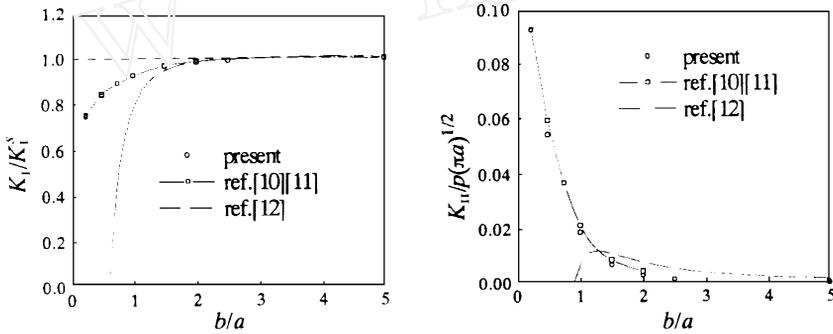


图 4 同轴等圆裂纹系在无穷远处沿裂纹正向均匀受拉时的应力强度因子

Fig. 4 SIFs of coaxial cracks under tension loading at infinity

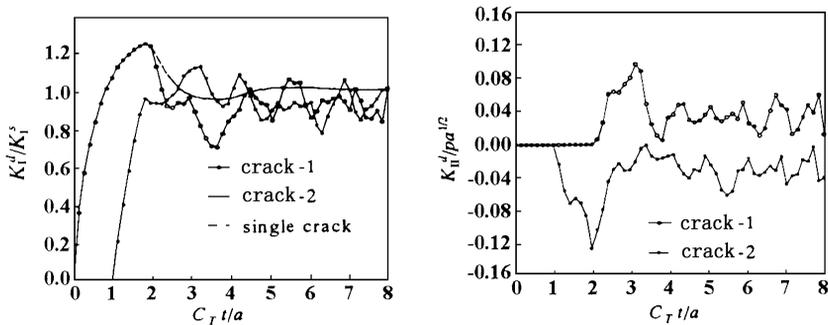


图 5 同轴等圆裂纹系在正向入射 P 波作用下动应力强度因子

Fig. 5 Dynamic SIFs of coaxial cracks under normal incident P-wave

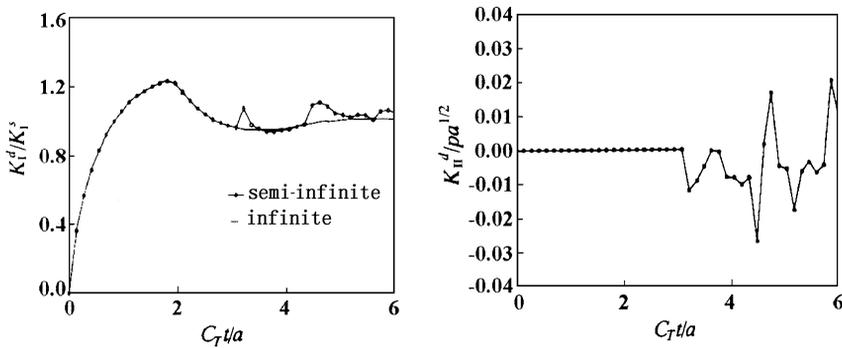


图 6 半空间埋藏圆裂纹在上下表面作用突加均布压力时的动态应力强度因子

Fig.6 Dynamic SIFs of penny-shaped crack embedded in a semi-infinite medium under sudden loading acted on the faces

4 结 论

本文给出的主值型面力边界积分方程结合半解析数值方法形成的轴对称裂纹问题的一种新的半解析边界积分方程法,数值计算简单方便,计算量小,同时避免了强奇异积分的计算.从算例可看出,本文方法具有较高的精度,是计算三维动态裂纹(系)问题,探讨裂纹间相互干扰的较理想的一种途径.对于外载非轴对称及圆裂纹在空间任意布置等更复杂的问题,可通过在柱坐标下对物理量关于极角作三角级数展开来建立更一般的半解析化方法,以减少计算工作量,适应三维动力奇异问题的求解.这里不再讨论.

参 考 文 献

- 1 Cruse TA. Two dimensional BIE fracture mechanics analysis. *Appl Math Modelling*, 1978(2) :287
- 2 Cruse TA. Fracture Mechanics. In :DE Beskos. Boundary Element Methods in Mechanics. Netherland:Elsevier Science Publishers, 1987. 333 ~ 336
- 3 Atkinson C. Stress Analysis in Fracture Mechanics. In :CA Brebbia. Progress in Boundary Element Method (Vol. 2). London: Pentech Press, 1983. 53 ~ 100
- 4 余德浩. 自然边界元法的数学理论. 北京: 科学出版社, 1993 (Yu DH. Mathematical theory of natural boundary element method. Peking: Science Press, 1993, (in Chinese))
- 5 Sladek J, Sladek V. Dynamic stress intensity factors studied by boundary integro-differential equations. *Int J Numer Methods Eng*, 1986, 23:919
- 6 胡海昌. 弹性力学中一类新的边界积分方程. 中国科学 A 辑, 1986(11) : 1170 (Hu HC. A new type of boundary integral equation in elasticity. *Scientia Sinica*(series A), 1986, (11) (in Chinese))
- 7 Zhang Ch, Achenbach JD. A new boundary integral equation formulation for elastodynamic and elastostatic crack analysis. *J Appl Mech*, 1989, 56:284
- 8 Zhang Ch, Gross D. A non-hypersingular time-domain BIEM for 3-D transient elastodynamic crack analysis. *Int J Numer Methods Eng*, 1993, 36:2997
- 9 Hirose S, Achenbach JD. Time-domain boundary element analysis of elastic wave interaction with a crack. *Int J Num Methods Eng*, 1989, 28:629
- 10 Isida M et al. Two parallel elliptical cracks in an infinite solid subjected to tension. *Int J Frac*, 1985, 27:31
- 11 中国航空研究院. 应力强度因子手册. 北京: 科学出版社, 1993 (China Institute of Aeronautics. A Handbook of Stress Inten-

sity Factors. Beijing :Science Press , 1993 (in Chinese))

12 Collins WD. Proceedings of the Royal Society of London , 1962 ,A-266 :359

A PRINCIPAL-TYPED TRACTION BIEM FOR 3D CRACK PROBLEMS¹⁾

Tao Weiming Guo Yimu Cao Zhiyuan* Ji Xing*

(Dept. of Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

* (Dept. of Engineering Mechanics and Technology, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract This paper presents a principal-typed traction boundary integral equation method for three-dimensional static and dynamic crack problems. Based on a set of traction boundary integral equations for elasto-statics/dynamics derived from conservation laws of elasticity, which contain no hyper-singular integral, corresponding equations for crack(s) embedded in an infinite medium and in a free-surfaced finite body are formulated. Because no hyper-singular integral encountered, there are no distinct difficulties to integrate the kernel functions by numerical methods. Furthermore, by subdividing the boundaries(including the crack's upper face and the body's surfaces) and the total time concerned into time-space elements and by choosing suitable trial functions for displacements and tractions in each element, we can reduce the principal integrals into weak singular or regular ones by integrating by parts, which simplifies the integrals even more, we obtain linear algebra equations relevant to unknown displacements, CODs and tractions. In addition, for axis-symmetric problems, we can subdivide the boundaries along their meridians into ring elements. The corresponding trial functions and integral formulae are presented in the paper. Thus, a semi-analytical scheme is set up for the analysis of complicated elasto-dynamic 3D crack problems. It can greatly reduce the number of elements, that of DOFs and the computational work. Test examples about the interaction between a single penny-shaped crack or spherical crack embedded in an infinite body and stress waves are analyzed, which shows good agreement with the results in literature. Then the static and dynamic interaction between two axial penny-shaped cracks and the problem about a penny-shaped crack embedded in a free-surfaced half-space under impact are analyzed and discussed. These examples demonstrate the effectiveness and accuracy of the present method as well as offering useful results to theoretical research and engineering practice.

Key words principal integral, traction boundary integral equation method, crack, stress intensity factor, dynamics

1) The project supported by the Research Laboratory of Solid Mechanics of The National Education Commission of China.

Received 20 March 1997, revised 29 October 1997.