第 30 卷 第 4 期 力 学 学 报 Vol. 30, No. 4
1998 年 7 月 ACTA MECHANICA SINICA July, 1998

非半单分叉的 Normal Form 计算[1)]

吴志强 胡海岩
(南京航空航天大学振动工程研究所, 南京 210016)

摘要 在文[1]基础上, 提出一种仅知道派生线性系统零实部特征值时求解非线性系统非半单分叉 Normal Form 的方法. 通过适当的分类, 将要求解的线性代数方程组分为若干相互独立的方程组. 将所求系数向量按字典序列排列后, 各独立方程组的系数矩阵是上三角矩阵. 在非共振情形, 各系数向量可按反字典序列递推求出. 在共振情形, 根据文中的二个定理, 巧妙地由一简单的常数矩阵的最大秩子矩阵, 定位其系数矩阵的满秩子矩阵, 解决了这类方程组的降维简化. 通过消元法, 把简化后的方程化成类似于半单分叉 Normal Form 求解过程中方程的形式, 其解法也类似. 该方法非常易于在计算机代数软件平台上程序化.

关键词 Normal Form, 非半单分叉, 最大秩

前 言

受 Hassard 等[2]工作的启发, 作者在文[1]中提出了一种求解系统 Normal Form 的直接方法. 该方法仅根据派生线性系统零实部特征值, 即可在求得 Normal Form 的同时, 求得所用的变换. 与 Elphick 等的直接法[3]不同, 文[1]方法所得到的用于求解 Normal Form 及变换的偏微方程更为简洁明了. 同时, 它勿需高深的理论, 易于推广.

对于非线性函数向量的级数表达

$$g(u) = \sum_{|m| \geq 2} g_m u^m$$

文[1]方法与已有文献中通常采用的记法不同, 把系数向量 g_m 看作整体, 而不是将其元素独立对待, 从而可大大降低求解 Normal Form 的难度. 这一优点已在半单分叉问题的 Normal Form 求解中得到体现[4,5].

本文以文[1]工作为基础, 探讨非半单分叉问题 Normal Form 的求解方法. 第 1 节简述文[1]中的方法, 并通过适当的分类使得要求解的方程组最大程度地解耦. 第 2 节是本文的核心, 主要阐述同类共振的非线性项系数对应的矩阵方程组的求解方法. 首先提出并证明了两个定理. 一方面, 巧妙地将耦合方程组系数矩阵满秩子矩阵的定位问题, 转化为一常数矩阵最大秩子矩阵的确定, 另一方面, 给出了常数矩阵最大秩子矩阵的定位方法, 从而解决了利用计算机简化该方程组遇到的关键问题. 同时, 说明如何根据所给定理, 将所遇耦合方程组, 降维简化成如下形式

$$A_0^k H_m = \cdots$$

1) 国家自然科学基金资助项目(59625511).
1997-06-23 收到第一稿, 1998-01-21 收到修改稿.

这种形式的方程的解法，与求解半单分叉 Normal Form 时遇到的方程的解法[1]类似. 第 3 节举例说明本方法的求解 Normal Form 的步骤和特点. 第 4 节是总结和展望.

1 方法简介

对于一般的高维非线性常微分方程组

$$\dot{x} = Ax + f(x), \qquad x \in R^n, \ f(x): R^n \to R^n \tag{1}$$

存在变换

$$x = T_0 u + H(u) \tag{2}$$

将方程(1)化成 Normal Form 形式

$$\dot{u} = J_0 u + C(u) \tag{3}$$

其中 J_0 是由 A 的所有 n_0 个零实部特征值组成的Jordan 标准形矩阵, T_0 是由零实部特征值对应的特征向量(当特征值为非半单时,包括广义特征向量)组成的 $n \times n_0$ 子矩阵. 将式(2)和(3)代入式(1)，即得变换(2)的非线性项 H(u)及 Normal Form(3)中非线性项 C(u)满足的方程

$$DH \cdot J_0 u - AH = f(T_0 u + H(u)) - DH \cdot C - T_0 C \tag{4}$$

一般地,方程(4)不能精确求解，而只能逐次求得其级数形式的近似解

$$H(u) = \sum_{k \geq 2} H^k(u) = \sum_{|m| \geq 2} H_m u^m \tag{5a}$$

$$C(u) = \sum_{k \geq 2} C^k(u) = \sum_{|m| \geq 2} C_m u^m \tag{5b}$$

直至任意期望的阶数，其中 $u^m = u_1^{m_1} \cdot u_2^{m_2} \cdots u_n^{m_n}$.

假设 $f(T_0 u + H) - DH \cdot C$ 关于 u 的展开式为

$$f(T_0 u + H) - DH \cdot C = \sum_{k \geq 2} \tilde{f}^k(u) = \sum_{|m| \geq 2} \tilde{f}_m u^m \tag{6}$$

将式(5a～5b)和(6)代入式(4)，比较方程两端同类项 u^m 的系数，即可得到关于非线性项系数向量 H_m, C_m 的线性代数方程组. 这些方程组是否耦合完全取决于 J_0. 若 J_0 是半单的，则不同的 m 对应的方程之间是解耦的. 若 J_0 为非半单的，不同的 m 对应的方程之间将出现耦合. 到底哪些方程间会出现耦合呢？

设 J_0 具有如下结构: $J_0 = \mathrm{diag}(J_{(1)}, J_{(2)}, \cdots, J_{(q)}, J_{(s)})$，其中约当块 $J_{(s)}$ 是 n_s 阶半单的矩阵，而 $J_{(i)}$ $(i = 1, 2, \cdots, q)$ 是 n_i 非半单的矩阵，其 NS 分解为 $J_{(i)} = S_i + N_i$，其中 $S_i = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda^{(i)}, \lambda^{(i)}, \cdots, \lambda^{(i)}}_{n_i})$，$N_i$ 为 n_i 阶的幂零矩阵. 相应地将指数向量 m ,特征值向量 λ 也作适当的划分，记为

$$m = (m_{(1)} \quad m_{(2)} \quad \cdots \quad m_{(q)} \quad m_{(s)})$$
$$\lambda = (\lambda_{(1)} \quad \lambda_{(2)} \quad \cdots \quad \lambda_{(q)} \quad \lambda_{(s)})$$

其中 $m_{(i)}, \lambda_{(i)}$ $(i = 1, 2, \cdots, q)$ 是 n_i 维的向量，$m_{(s)}$ 是 $n_s = n_0 - \sum_{i=1}^{q} n_i$ 维的向量.

若记 $P(i) = \sum_{l=1}^{i} n_l$ $(l = 1, 2, \cdots, q)$ 及 $P(0) = 0$，则有

$$(J_0)_{j,j+1} = \begin{cases} 1 & j \in [P(i-1), P(i)] \quad (i = 1, 2, \cdots, q) \\ 0 & j = P(i) \quad (i = 1, 2, \cdots, q) \text{ 或 } j > P(q) \end{cases}$$

于是方程(4)中 u^{m} 的系数可整理为

$$[\langle m,\lambda\rangle I - A]H_m + \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=P(i-1)}^{P(i)-1}(m_j+1)H_{m+e_j-e_{j+1}} = \widetilde{f}_m - T_0C_m \tag{8}$$

上式中角标元素均为非负整数，运算中出现负整数的情况时，表示相应的项不存在于式中．若记 $A_0=\langle m,\lambda\rangle I - A$，则式(8)可简写为

$$A_0H_m + \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=P(i-1)}^{P(i)-1}(m_j+1)H_{m+e_j-e_{j+1}} = \widetilde{f}_m - T_0C_m \tag{9}$$

若把所有指数向量满足$|m_{(i)}|$ $(i=1,2,\cdots,q)$，$m_{(s)}$分别对应相等的非线性项归为一类，则可证明只有同类项系数向量的方程间才是耦合的[1]．这种耦合的矩阵方程组，可由所有同类的 m 根据式(9)生成．

若将同类 m 按字典序列的顺序排列，则因为

$$\left.\begin{aligned} m' &= m + e_j - e_{j+1} \\ m_i' &= m_i \\ m_j' &= m_j + 1 > m_j \end{aligned}\right\}$$

不同 m 则

方程组, 在 J_0 有多个 Jordan 块的情形, 大大降低了求解系统 Normal Form 的难度.

2) 还可把每组耦合方程用很简洁的形式表示. 如在简化时方程中的 A_0, E 可视为常数而不是 $n\times n$ 矩阵来处理. 这样, 我们考虑的方程组的维数仅相当于经典方法的 $1/n$. 这种形式上的降维, 也减少了求解系统 Normal Form 的难度.

此处 $\det(A_0)=0$, 因而方程(9)只能用来解出 $H_{m+e_j-e_{j+1}}$. 这里 A_0 虽不是零阵, 但在简化过程中, 它又与 0 起的作用相同(如 $0\cdot x+3y+4c=0$, 只能用来求出 y, 而不能用来求解 x), 我们称之为"软 0", 而 0 本身称为"硬 0".

将 B 中的 A_0, 零阵, E 分别视为常数 0, 0, 1, 可得方阵 C, 其阶数仅为 B 的阶数的 $1/n$, 且 C 的每个元素都对应 B 中的一 $n\times n$ 子块. 对于常数矩阵, 其零空间可由 MAPLE 平台上的 kernel 命令很容易地求得. 那么, 能否用 C 来确定 B 的满秩矩阵呢? 下面的定理 1 解决了符号矩阵向常数矩阵的转化问题; 定理 2 解决了如何由矩阵的零空间确定其最大秩子矩阵的问题.

定理 1 设 C 为用 0, 0, 1 分别替换 B 中的零阵, A_0, E 得到的矩阵, 则 B 中与 C 的最大秩子矩阵位置相对应的子矩阵是满秩的.

定理 2 设 C 为余秩为 d 的 n 阶方阵, Ψ 和 Φ 分别为 C 的左右零空间, 即有

$$\Psi=(\Psi_1,\Psi_2,\cdots,\Psi_d),\qquad \Phi=(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_d)$$
$$\Psi C=\mathbf{0}_{d\times n},\qquad C\Phi=\mathbf{0}_{n\times d}$$

记 $q_i(i=1,2,\cdots,d)$ 为 ψ_i 中任一非零元素所在的列号, $p_i(i=1,2,\cdots,d)$ 为 ϕ_i 中任一非零元素所在的行号, 则

1) 至少存在一组互不相同的 $p_i(i=1,2,\cdots,d)$ 及一组互不相同的 $q_i(i=1,2,\cdots,d)$;

2) 若 p_i 之间、q_i 之间互不相等, 则去掉 C 中对应的 $q_i(i=1,2,\cdots,d)$ 行、$p_i(i=1,2,\cdots,d)$ 对应的列, 即得 $(n-d)\times(n-d)$ 满秩矩阵.

值得一提的是, 根据定理 2 确定的矩阵并非 B 的最大秩子矩阵, 我们称之为 B 的次最大秩子矩阵, 以便行文.

由次最大秩子矩阵所在的方程, 可完全解出与该矩阵对应的系数向量 H_m, 带入其余的方程, 即得到降维后的方程组. 并且有

定理 3 在降维得到的方程组中, 未知的系数向量以 $A_0^l H_m(l\geq 1)$ 的形式出现.

尽管我们不能通过新的方程组完全解出未知的系数向量, 但是, 若记 $l(m)$ 为未知 H_m 的系数 A_0 的最小指数, 则可通过消元法, 解出

$$A_0^{l(m)}H_m=\cdots+T_0\sum_{m'}C_{m'} \tag{14}$$

其中 $\sum C_{m'}$ 表示 Normal Form 中与 u^m 同类的项的系数向量的线性组合. 这种方程, 与半单分叉 Normal Form 求解中出现的方程的形式类似, 其解法如下: 根据定理 2, 可确定出 $A_0^{l(m)}$ 的一个满秩的子矩阵, 若记 H_m 中与该矩阵对应的元素为 $\hat{H}_m$, $\sum C_m$ 的所有元素中与 T_0 中张成 $A_0^{l(m)}$ 补空间的各向量对应的元素组成的向量为 D_m, 则作为 $\hat{H}_m$ 与 D_m 的方程(14)是可解的. 因为,

定理 4 设 $A_0^{l(m)}$ 的零空间是 d 维的, 则用 $A_0^{l(m)}$ 的补空间, 替换 $A_0^{l(m)}$ 中适当的 d 列, 即可得到满秩的矩阵. (证明参见文[1])

注: D_m 的每个元素, 实际上都是 Normal Form 中某些系数的线性组合, 这也是 Normal Form 形

式不唯一的一种表现.

3　应用举例

若 $J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,有 $m_{(1)} = (m_1, m_2)$, $m_{(2)} = (m_3, m_4)$, $m = (m_{(1)}, m_{(2)})$. 这,当 $|m| = 3$ 时,用经典的矩阵法,需求解 $35 \times 5 = 175$ 个代数方程,而本方法得到的是 35 个 n 维的矩阵方程. 根据本文的分类法则,可把所有的 m 分为 4 类,$|m_{(2)}|$ 为 3,2,1,0 时,分别得到 10,12,9,4 个矩阵方程的方程组. 不同类的 m 对应的方程组之间是解耦的. 下面以其中最复杂的情形为例,分析本文方法的特点.

此时,$|m_{(2)}| = 2$,相应的方程组为

$$A_0 h_{01002} + h_{10002} + h_{01011} = \widetilde{f}_{01002} - T_0 C_{01002} \tag{15.1}$$

$$A_0 h_{01011} + h_{10011} + h_{01101} + 2 h_{01020} = \widetilde{f}_{01011} - T_0 C_{01011} \tag{15.2}$$

$$A_0 h_{01020} + h_{10020} + h_{01110} = \widetilde{f}_{01020} - T_0 C_{01020} \tag{15.3}$$

$$A_0 h_{01101} + h_{10101} + h_{01110} = \widetilde{f}_{01101} - T_0 C_{01101} \tag{15.4}$$

$$A_0 h_{01110} + h_{10110} + 2 h_{01200} = \widetilde{f}_{01110} - T_0 C_{01110} \tag{15.5}$$

$$A_0 h_{01200} + h_{10200} = \widetilde{f}_{01200} - T_0 C_{01200} \tag{15.6}$$

$$A_0 h_{10002} + h_{10011} = \widetilde{f}_{10002} - T_0 C_{10002} \tag{15.7}$$

$$A_0 h_{10011} + h_{10101} + 2 h_{10020} = \widetilde{f}_{10011} - T_0 C_{10011} \tag{15.8}$$

$$A_0 h_{10020} + h_{10110} = \widetilde{f}_{10020} - T_0 C_{10020} \tag{15.9}$$

$$A_0 h_{10101} + h_{10110} = \widetilde{f}_{10101} - T_0 C_{10101} \tag{15.10}$$

$$A_0 h_{10110} + 2 h_{10200} = \widetilde{f}_{10110} - T_0 C_{10110} \tag{15.11}$$

$$A_0 h_{10200} = \widetilde{f}_{10200} - T_0 C_{10200} \tag{15.12}$$

其系数矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ \mathbf{0} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$
B_{11} = \begin{bmatrix} A_0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & 2E & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_0 & 2E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_0 \end{bmatrix} = B_{22} \tag{16}
$$

$$
B_{12} = \mathrm{diag}(E,\ E,\ E,\ E,\ E,\ E)
$$

3.1 系数矩阵的结构

容易验证，$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 时，3 次非线性项的系数向量的方程组的系数矩阵即为 B_{11}，而 J_0 情形 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 时，1 次项的系数向量的方程组的系数矩阵为 $\begin{bmatrix} A_0 & E \\ \mathbf{0} & A_0 \end{bmatrix}$. 用 B_{11} 替代其中的 A_0，并将 E 相应增维，即得 B. 此即文[1]所称的系数矩阵的嵌套结构，属于 J_0 有多个 Jordan 块的情形.

J_0 有一个 Jordan 块的情形，同样有嵌套结构. 若沿 B_{11} 的对角线依序分别取 3，2，1 阶的方阵，则分别得到 J_0 为 2 阶幂零矩阵时 2，1，0 次项系数向量方程组的系数矩阵. 在分析系数矩阵的嵌套结构时，我们约定 0 次项系数向量方程组的系数矩阵指 A_0 本身.

3.2 方程组的求解

不难发现，利用上述方程组解出某些系数向量后，代入其余的方程，即可降维上述方程组. 但是，不论从方程组本身，还是从其系数矩阵，都难以看出到底有哪些系数向量可利用哪几个矩阵方程解出. 该问题的实质就是要找 B 的满秩子矩阵.

一般而言，要寻找一符号矩阵的满秩子矩阵，并不是件容易的事情. 注意到，由本方法生成的矩阵方程组的系数矩阵的特殊性，定理 1 可巧妙地将这一问题转化为元素为整数的上三角稀疏矩阵最大秩子矩阵的定位；而定理 2 则给出了如何利用不可逆矩阵的零空间非零元素的位置，定位其最大秩子矩阵的方法. 通过求解发现，去掉矩阵 B 的第 1，2，3 行及第 6，9，12 列即可得到一满秩的子矩阵 B_2.

$$
B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ A_0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & 2E & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_0 & 2E & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_0 & 2E \end{bmatrix}^{T} \tag{17}
$$

因而相应的系数向量

$$
h_{01101},\ h_{01110},\ h_{01200},\ h_{10002},\ h_{10011},\ h_{10020},\ h_{10101},\ h_{10110},\ h_{10200}
$$

可以解出.

$$\left.\begin{aligned}
h_{10002} &= - A_0 h_{01002} - h_{01011} + \widetilde{f}_{01002} - T_0 C_{01002} \\
h_{01200} &= A_0^2 h_{01002} + A_0 h_{01011} - A\widetilde{f}_{01002} + A_0 T_0 C_{01002} + \widetilde{f}_{10002} - T_0 C_{10002} \\
&\cdots\cdots \\
h_{10200} &= -\frac{1}{6} A_0^4 h_{01002} + \frac{1}{6} A_0^3 (\widetilde{f}_{01002} - T_0 C_{01002}) + \\
&\frac{1}{6} A_0^2 (- \widetilde{f}_{01011} + T_0 C_{01011} - \widetilde{f}_{01002} + T_0 C_{01002} + 6 h_{01020}) + \\
&A_0 \Big[\frac{1}{6} (\widetilde{f}_{01101} - T_0 C_{01101}) - \frac{2}{3} (\widetilde{f}_{01020} - T_0 C_{01020}) + \frac{1}{3} (\widetilde{f}_{10011} \\
&\text{子矩} \qquad - \frac{1}{2} (\widetilde{f}_{10101} - T_0 C_{10101}) + \frac{1}{2} (\widetilde{f}_{01110} - T_0 C_{01110})
\end{aligned}\right\}$$

程组 方

上面的三个矩阵方程的形式，已完全等同于式(14)，根据上节的解法即可求解.

因此，Normal Form 中满足指数$|m_{(2)}|=2$的3次非线性项共有$5+5+4=14$项，一种简单的选择是

$$C_{01200}u_2u_3^2+C_{10020}u_1u_4^2+C_{10200}u_1u_3^2 \tag{22}$$

其中C_{10020}的第3个元素$C_{10020,3}=0$. 当$A_0=J_0$时，T_0是单位矩阵，Normal Form 系数简化为

$$C_{10200}=\tilde{f}_{10200}-\frac{1}{5}J_0(2\tilde{f}_{10110}-\tilde{f}_{01200})+\frac{1}{10}J_0^2(\tilde{f}_{10101}+\tilde{f}_{01110}+2\tilde{f}_{10020})$$

$$=\begin{bmatrix}\tilde{f}_{10200,1}-\frac{1}{5}(2\tilde{f}_{10110,2}-\tilde{f}_{01200,2})\\ \tilde{f}_{10200,2}\\ \tilde{f}_{10200,3}-\frac{1}{5}(2\tilde{f}_{10110,4}-\tilde{f}_{01200,4})+\frac{1}{10}(\tilde{f}_{10101,5}+\tilde{f}_{01110,5}+2\tilde{f}_{10020,5})\\ \tilde{f}_{10200,4}-\frac{1}{5}(2\tilde{f}_{10110,5}-\tilde{f}_{01200,5})\\ \tilde{f}_{10200,5}\end{bmatrix} \tag{23}$$

$$C_{01200,1}=\tilde{f}_{01200,1}-\frac{1}{2}\tilde{f}_{10110,1}+\frac{1}{6}(4\tilde{f}_{10020,2}+2\tilde{f}_{01110,2}+\tilde{f}_{10101,2}) \tag{24.1}$$

$$C_{01200,2}=\tilde{f}_{01200,2}-\frac{1}{2}\tilde{f}_{10110,2} \tag{24.2}$$

$$C_{01200,3}=\tilde{f}_{01200,3}-\frac{1}{2}\tilde{f}_{10110,3}+\frac{1}{6}(4\tilde{f}_{10020,4}+2\tilde{f}_{01110,4}+\tilde{f}_{10101,4})-\frac{1}{6}(3\tilde{f}_{10011,5}+\tilde{f}_{01020,5}+2\tilde{f}_{01101,5}) \tag{24.3}$$

$$C_{01200,4}=\tilde{f}_{01200,4}-\frac{1}{2}\tilde{f}_{10110,4}+\frac{1}{6}(4\tilde{f}_{10020,5}+2\tilde{f}_{01110,5}+\tilde{f}_{10101,5}) \tag{24.4}$$

$$C_{01200,5}=\tilde{f}_{01200,5}-\frac{1}{2}\tilde{f}_{10110,5} \tag{24.5}$$

$$C_{10020,1}=\tilde{f}_{10020,1}-\tilde{f}_{10101,1}+\tilde{f}_{01101,2}-\tilde{f}_{01020,2} \tag{25.1}$$

$$C_{10020,2}=\tilde{f}_{10020,2}-\tilde{f}_{10101,2} \tag{25.2}$$

$$C_{10020,4}=\tilde{f}_{10020,4}-\tilde{f}_{10101,4}+\tilde{f}_{01101,5}-\tilde{f}_{01020,5} \tag{25.3}$$

$$C_{10020,5}=\tilde{f}_{10020,5}-\tilde{f}_{10101,5} \tag{25.4}$$

4 结论与展望

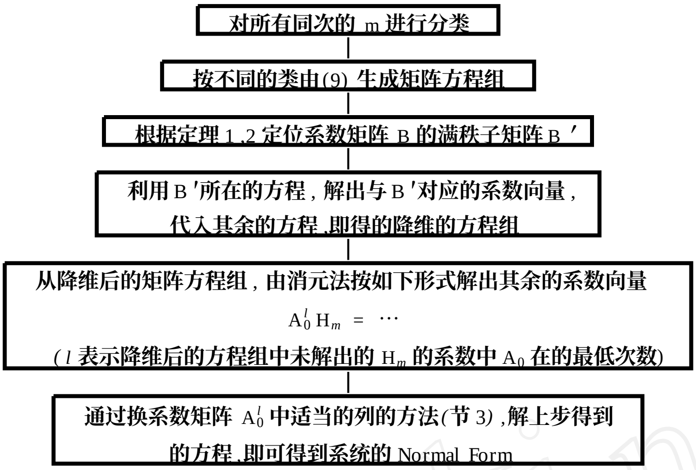
综上所述，求解系统非半单分叉 Normal Form 的步骤，可由表 1 的框图来表示.

由于本方法对非线性函数向量的级数表达采用了适当的形式，需求解的方程数目仅是经典矩阵法的$1/n$;而由此导出的非线性项的分类,则使我们把这些方程分为若干相互独立的矩阵方程组，因而在J_0有多个Jordan 块的情形，需求解的耦合方程组的最大维数进一步降低，要远远

小于 1/ n. 从而降低了求解 Normal Form 的困难.

表 1　非半单分叉 **Normal Form** 的求解步骤

Table 1　Scheme for determining the Normal form of a nonsemi-simple bifurcation



而每类方程组的简化与求解的关键, 则归结为确定系数矩阵的满秩子矩阵的问题. 由于定理 1 ,2 ,巧将求解符号矩阵的满秩子矩阵归结为常数矩阵最大秩子矩阵的定位, 并给出了详细的定位方法, 从而从根本上解决了借助于计算机代数软件求解 Normal Form 的问题. 本文的方法已经程序化, 限于篇幅我们将另文给出.

需要指出的是, 尽管我们早在文[1]中, 即指出耦合方程组的系数矩阵具有嵌套结构. 但到底能否、若能的话又如何利用这一特点, 简化系统 Normal Form 的求解, 现在仍然不清楚. 这或许要借助于李代数、或共轭算子理论.

如果只需求得 Normal Form 的形式, 用这里的方法可能并不用求解代数方程组, 而只需利用定理 2 , 确定一组常整数矩阵的最大秩子矩阵即可.

致谢　感谢清华大学王铎教授对本研究给予的支持和鼓励.

参　考　文　献

1　吴志强. 多自由度非线性系统的非线性模态及 Normal Form 直接方法. 天津大学博士学位论文. 1996.（Wu Zhiqiang , Nonlinear modes and a direct approach of Normal Form for nonlinear dynamic systems of multiple degrees of freedom , Ph. D. Thesis , Tianjin University , 1996 (in Chinese))

2　Hassard B D , Kazarinoff N D , Y.-H. Wan. Theory and Applications of Hopf Bifurcation. Cambridge University Press , 1981 : 1～50

3　Elphick C , Tirapegui E , Brachet M E , Coullet P , and Iooss G. A simple global characterization for normal forms of singular vector fields. *Physica D* , 1991 , 48 : 147～168

4　吴志强 ,陈予恕 ,毕勤胜. 非线性模态的分类和新的求解方法. 力学学报 ,1996 ,28(3) :298～307 (Wu Zhiqiang , Chen Yushu , Bi Qinsheng , Classification and determination of nonlinear modes , *Acta Mechanica Sinica* , 1996 ,28 (3) : 298～307 (in Chinese))

5　陈予恕 ,吴志强. 多重非内共振 Hopf 交叉的正规形. 力学学报 ,1997 ,29(6) :669～675.（Chen Yushu , Wu Zhiqiang , Normal form of Hopf bifurcations under multiple non-resonance, *Acta Mechanica Sinica*, 1997, 29(6): 669～675 (in Chinese))

CALCULATING NORMAL FORMS FOR NONSEMI-SIMPLE BIFURCATIONS[1)]

Wu Zhiqiang Hu Haiyan

(Institute of Vibration Engineering Research, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, *China)*

Abstract This paper presents a new scheme of calculating the Normal forms of a set of nonlinear ordinary differential equations when a nonsemi-simple bifurcation occurs, with only the eigenvalues of zero real parts of the linearized differential equations given. It is well known that the classical matrix method enables one to establish the algebraic equations that govern the coefficients in the Normal form of a set of ordinary differential equations. However, it offers neither general technique of reducing the maximal dimension of the algebraic equations to be solved, nor practical algorithm of solving the linear algebraic symbolic equations with singular coefficient matrix. The matrix method, hence, is far from solving the Normal form of nonsemi-simple bifurcations of a nonlinear system. The primary aim of this paper is to solve the problem of determining the Normal forms by the matrix method.

The analysis in the paper begins with the series expression of the nonlinear vector-valued function and treats every coefficient vector as a whole from a new point of view, rather than individuals considered in previous publications. The first advantage of the expression is that one can readily classify all the nonlinear terms so that the coefficient vectors corresponding to different kinds of nonlinear terms are uncoupled with each other. As a result, one can reduce greatly the maximal dimension of the coupled equations in reducing the Normal form by classifying the nonlinear terms appropriately. The second advantage is that the coefficient matrix of each set of coupled equations consists of two kinds of sub-matrices, i.e., the linearized matrix of the original system and the identity matrix of the same dimension, following a rule found in the previous study of the first author. This feature enables one to get the key idea of this paper. i.e., the sub-matrices of full rank in the coefficient matrix can be located by using the constant matrix with the same structure.

These advantages are made use of to study a new scheme and its theoretical background for computing the Normal forms of the Nonsemi-simple bifurcation. In section 1, a suitable classification of the nonlinear terms according to their exponent vectors is presented and the recursive formulae for solving the coefficient vector of the nonresonant terms is derived. Section 2, as the kernel of the paper, deals with how to find the form of the Normal form and the solution of the coefficient

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 59625511).

Received 23 June 1997, revised 21 January 1998.

vector of the resonant terms. Because a full rank sub-matrix can be found in the coefficient matrix of the set of matrix equations from the maximal rank full sub-matrix of a simple constant matrix through Theorem 1 and 2 proposed and proved in this paper, some of their coefficient vectors corresponding to a kind of resonant terms can be solved out, while the others remain unchanged in a new set of fewer matrix equations. Through elimination, the new set of matrix equations can be casted into the similar matrix equations solved in the case of semi-simple bifurcations. In section 3, the scheme efficacy is demonstrated through an example. The scheme can be easily programmed on any platforms of computer algebra according to the flow chart given at the end of the paper.

Key words　Normal form, nonsemi-simple bifurcation, maximum rank