第 30 卷 第 3 期
1998 年 5 月

力 学 学 报
ACTA MECHANICA SINICA

Vol. 30, No. 3
May 1998

基于可靠性的桁架结构拓扑优化设计[1)]

陈建军　　曹一波　　段宝岩
(西安电子科技大学电子机械学院，西安 710071)

摘要　建立了以杆截面为设计变量、结构重量极小化为目标、具有位移、应力等性态可靠性约束的桁架结构拓扑优化设计数学模型. 通过引入可靠性安全系数，并利用结构力学的三个基本方程，将结构的位移和杆件应力可靠性约束等价显示化为设计变量的线性函数，使原基于可靠性的优化模型转化为常规的序列线性规划问题，利用修正的单纯形法求解. 算例表明文中提出的方法既简单又有效.

关键词　结构可靠性，拓扑优化，位移、应力可靠性约束，线性规划，修正单纯形法

引　言

结构拓扑优化的思想可追溯于 60 年代中期 Dorn 等人[1]的工作，但由于当时结构设计理论和方法的局限，在此之后的二十年间有关研究进展缓慢. 随着结构优化设计理论和方法的逐步丰富与完善，时至 80 年代后期，结构拓扑优化设计才重新引起众多学者的关注，并取得前所未有的发展. 在此期间，对促进和发展结构拓扑优化作出突出贡献的当数 Krisch 的一系列工作[2～4]. 近年来，结构拓扑优化研究成果与日俱增，已成为结构优化设计研究领域中最活跃的内容之一. 然而，由于结构拓扑优化设计难度较大，迄今为止的大部分研究工作主要集中于桁架结构这块优化设计的"试验田". 例如，文[5]分析研究了桁架结构产生奇异拓扑解的原因. 文[6]和[7]分别应用了单纯形法和修正的单纯形法对多工况下桁架结构进行了拓扑优化设计. 文[8]和[9]将新近提出的遗传算法应用于桁架结构拓扑优化设计之中. 文[10]和[11]分别研究了具有离散变量的桁架结构拓扑优化设计问题. 文[12]则针对桁架结构提出了一种基于极大熵原理的结构拓扑优化设计方法.

尽管结构拓扑优化设计的研究已涉及了不少方面，但迄今为止尚未见到有关基于可靠性的结构拓扑优化设计方面的文献发表. 事实上在工程结构设计中考虑可靠性是一个非常具有现实意义的工作，因为许多结构不可避免地受到各种随机荷载的作用，此外设计中的结构的物理参数和几何尺寸等亦往往具有随机性，对于此类结构只有基于可靠性的优化才是最为合理的设计模型和方法. 结构可靠性优化是在常规优化基础上发展起来的一种新的现代设计方法，目前已成为结构设计领域中的又一个研究热点. 文[13, 14]分别对近年来国内和国外的结构可靠性优化研究进行了较为全面的综述. 从近期文献看，当前结构可靠性优化仍主要限于杆系结构的尺寸优化这个较低的层次.

本文针对上述结构拓扑优化研究中尚未涉足的内容，在作者前期关于结构可靠性优化研究[15]的基础上，对基于可靠性的桁架结构拓扑优化设计问题进行了初步的研究，构建了优化数学模型并提出了相应的求解策略与方法. 优化实例表明文中的方法既简单又有效.

1) 国家自然科学基金和中国科学院力学研究所 LNM 开放实验室基金资助项目.
1997-04-02 收到第一稿，1997-11-16 收到修改稿.

1 随机荷载作用下的结构分析

设所分析的空间桁架结构共有 m 个自由节点、$3m$ 个自由度和 n 个杆件,且受到随机荷载向量 $\{P\}$ 的作用. 根据结构力学可列出该结构需满足的如下三个基本方程(平衡、物理、几何方程)

$$[N]\{F\} = \{P\} \tag{1}$$

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \tag{2}$$

$$[N]^T\{\delta\} = \{\Delta\} \tag{3}$$

式中: $[N]$, $[K]$ 分别为结构的几何投影矩阵和刚度矩阵; $\{F\}$, $\{\Delta\}$ 分别为杆件内力和形变向量; $\{\delta\}$ 为节点位移向量.

由方程(2)和(3)式,并考虑到广义逆矩阵的定义和结构的边界条件,则结构位移向量 $\{\delta\}$ 可表为

$$\{\delta\} = [C]\{F\} \tag{4}$$

$$[C] = ([N][N]^T)^{-1}[N][K]^{-1} \tag{5}$$

其中第 j 个自由度的位移为

$$\delta_j = \sum_{l=1}^{n} c_{jl} F_l \quad (j = 1, 2, \cdots, 3m) \tag{4a}$$

式中 c_{jl} $(j = 1, 2, \cdots, 3m;\ l = 1, 2, \cdots, n)$ 为矩阵 $[C]$ 中的元素; F_l 为向量 $\{F\}$ 中第 l 个分量.

又由于方程(1)亦可表为如下形式

$$\{F\} = [B]\{P\} \tag{6}$$

式中 $[B]$ 表示外载的利用率矩阵.

从而第 i 杆的内力和应力可分别表为

$$F_i = \sum_{j}^{3m} b_{ij} P_j \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{6a}$$

$$S_i = A_i^{-1} F_i = A_i^{-1} \sum_{j}^{3m} b_{ij} P_j \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{7}$$

式中: F_i, S_i, A_i 分别是第 i 杆的内力、应力和截面积; b_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, 3m)$ 为矩阵 $[B]$ 中的元素; P_j 为向量 $\{P\}$ 中的第 j 个分量.

根据随机变量矩的性质,由式(4a)和(7)可求得在随机荷载向量 $\{P\}$ 作用下,结构中各节点位移和杆件应力反应的均值和方差分别为

$$\mu_{\delta_j} = \sum_{l}^{n} C_{jl} \mu_{Fl} \quad (j = 1, 2, \cdots, 3m) \tag{8}$$

$$\sigma^2_{\delta_j} = \sum_{l}^{3m} C_{jl}^2 \sigma_{Fl}^2 + \sum_{k}^{n} \sum_{l}^{n} C_{jk} C_{jl} \rho_{kl} \sigma_{Fk} \sigma_{Fl} \qquad (j = 1, 2, \cdots, 3m) \tag{9}$$

$$\mu_{S_i} = A_i^{-1} \sum_{j}^{3m} b_{ij} \mu_{P_j} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{10}$$

量

$$\sigma^2_{S_i} = A_i^{-2} \Big[\sum_{j}^{3m} b_{ij}^2 \sigma^2_{P_j} + \sum_{k}^{3m} \sum_{j}^{3m} b_{ik} b_{ij} \lambda_{kj} \sigma_{P_k} \sigma_{P_j} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{11}$$

式中: μ, σ 分别表示随机变量的均值和标准差; ρ_{kl} $(k = 1, 2, \cdots, n;\ l = 1, 2, \cdots, n)$ 表示第 k 杆与 l 杆内力之间的相关系数; λ_{kj} $(k = 1, 2, \cdots, 3m;\ j = 1, 2, \cdots, 3m)$ 表示第 k 个与 j 个荷载分量之间的相关系数.

2　优化数学模型与求解方法

2.1　数学模型

考虑结构设计的最一般情况,建立如下基于可靠性的桁架结构拓扑优化数学模型,即以杆截面积为设计变量,使结构重量极小化,且同时满足刚度和强度可靠性约束以及尺寸约束.

$$\text{find} \quad \mathrm{A} = (A_1, A_2, \cdots, A_n)^T \tag{12}$$

$$\min \quad W(\mathrm{A}) = \sum_{i}^{n} \gamma_i l_i A_i$$

$$\text{s.t.} \quad P_{\delta_j}^{\cdot} - \mathrm{Prob}\{\delta_j^{\cdot} - \delta_j \ge 0\} \le 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, q) \tag{13}$$

$$P_{S_i}^{\cdot} - \mathrm{Prob}\{S_i^{\cdot} - S_i \ge 0\} \le 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{14}$$

$$0 \le A_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{15}$$

式中: W 为结构重量; γ_i, l_i 分别为第 i 杆的比重和杆长; δ_j, $\delta_j^{\cdot}$ 均为随机向量,分别为第 j 个自由度的位移和允许位移; S_i, $S_i^{\cdot}$ 亦为随机变量,分别为第 i 杆的工作应力和许用应力; $P_{\sigma_j}^{\cdot}$, $P_{S_i}^{\cdot}$ 分别为第 j 个位移和第 i 个应力设计给定的可靠度; q 为位移约束个数.

在上述规划问题中,关于结构强度要求最为合理的提法应以结构体系的可靠性作为约束条件,但考虑到:(1) 精确地求解结构体系的可靠度,其难度与工作量甚大;(2) 在结构设计阶段无需精确计算结构体系的可靠度,而只需根据可靠度的初步预测结果以判别所给出的设计方案是否可行并比较各种设计方案间的优劣;(3) 桁架结构拓扑优化的总趋势将使结构逐渐从高次冗余体系蜕化为静定体系. 由结构可靠性理论可知,静定结构体系可靠度 P_S 的上下限为 $\prod_{i}^{n} P_{S_i} \le P_S \le \min_{i=1,n}\{P_{S_i}\}$,其中 P_{S_i} 为第 i 构件的可靠度. 若各构件失效彼此独立,则 $P_S \to$ 下限,若各构件失效完全相关,则 $P_S \to$ 上限. 显见静定体系的可靠度在很大程度上取决于各单元的可靠度. 鉴于此,这里以各杆的可靠度作为结构强度的约束条件是可行合理的.

注意到上述优化数学模型中的所有可靠性约束均为设计变量的隐式复合函数,且以概率形式给出,这使得常规的优化方法不宜直接应用. 为此我们将对可靠性约束进行如下等价化和显示化处理.

2.2 可靠性约束的等价化和显示化

由于可靠性约束(13)与(14)式在表达形式上是一致的,不仿统一表为

$$P^* - \mathrm{Prob}\{R - S \geq 0\} \leq 0 \tag{16}$$

式中:P^*为给定的可靠度;R, S 均为随机变量,分别表示结构抗力或强度和荷载或荷载效应.

利用结构可靠性中的二阶矩方法,(16)式可改写为

$$\beta^* - \beta \leq 0 \tag{17}$$

$$\beta^* = \Phi^{-1}(P^*) \tag{18}$$

$$\beta = (\mu_R - \mu_S)(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)^{-1/2} \tag{19}$$

式中:β,β^*分别为计算可靠性指标和给定的可靠性指标;$\Phi^{-1}(\cdot)$表示标准正态分布函数的反函数.

将(19)式代入(17)式的临界表达式中,并引入变量 R 和 S 的变异系数 $\upsilon_R = \sigma_R/\mu_S$ 和 $\upsilon_s = \sigma_S/\mu_S$,从中可解得与传统的安全系数相对应的可靠性安全系数 $K\beta$ 为

$$K\beta = \frac{1 + \beta^*(\upsilon_R^2 + \upsilon_S^2 - \beta^{*2}\upsilon_R^2\upsilon_S^2)^{1/2}}{1 - \beta^{*2}\upsilon_R^2} \tag{20}$$

由上式显见,$K\beta$为无量纲量,其值是由变量 R 和 S 的变异系数和给定的可靠性指标β^*三者共同确定的,其力学意义相当于依据作用荷载和材料强度两随机变量取值的分散性以及设计给定的可靠度对由确定性荷载和强度所定义的传统的安全系数进行修正,故可靠性安全系数 $K\beta$ 的含义已不同于传统的安全系数.然而仿照传统安全系数的设计准则,则可靠性约束(16)式可以由 $K\beta$ 表为如下等价的常规形式

$$K\beta\mu_S \leq \mu_R \tag{21}$$

按上式从而原可靠性约束(13)和(14)式可分别等价化为

$$K\beta(\delta_j)\mu_{\delta_j} \leq \mu_{\delta_j}^* \quad (j = 1,2,\cdots,q) \tag{22}$$

$$K\beta(S_i)\mu_{S_I} \leq \mu_{S_I}^* \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{23}$$

式中:$K\beta(\delta_j)$,$K\beta(S_i)$ 分别为第 j 个位移约束和第 i 个杆的应力约束对应的可靠性安全系数,它们均由式(20)求得.

再分别将式(8)代入(22),式(10)代入(23),并利用杆件内力与应力之关系 $\mu_{F_l} = A_l\mu_{S_l}$,则原位移、应力可靠性约束又可进一步以设计变量的显示函数表为

$$K\beta(\delta_j)\Big(\quad i \quad \leq \mu_{\delta_j}^* \quad (j = 1,2,\cdots,q) \tag{24}$$

各 种 $K\beta(S_i)A_i^{-1}\Big(\quad \leq \mu_{S_i}^*$ (度i 与= 1,2,…,n) (25)

显然 ,用等价化和显示化的可靠性约束(24)和(25)式分别取代可靠性约束(13)和(14)式 ,则原基于可靠性的优化数学模型将转化为一常规的线性规划问题.

2.3　求解方法

为简单起见 ,对上述等价的常规线性规划问题本文应用了修正的单纯形方法求解. 该方法的原理和求解过程这里从略. 需要说明的是 ,仅在每一步迭代过程中 ,将各杆件的内力和应力均值 μ_{F_i} , μ_{S_i} ($i = 1, 2, \cdots, n$) 分别作为常量 ,其值由前一步迭代之后的设计向量和随机荷载均值两者共同确定.

关于结构拓扑构造的变更文中应用了蜕化策略 ,即在迭代过程中当设计变量 $A_i \leq \varepsilon$ (ε 为极小的正数) 时 ,则将第 i 杆件作为拟删除对象 ,但能否删除则由结构几何机动性分析结果判别. 当 i 杆删除时将此杆对应的应力约束亦一并删除. 由于在结构分析中已求得结构的几何投影矩阵 $[N]$,故这里采用了一种只涉及到矩阵 $[N]$ 行秩计算的机动性分析方法 ,将它穿插于拓扑优化设计过程中 ,以防止不稳定结构的出现 ,该方法的基本过程可见文[7].

3　算　例

为了验证前述优化模型和求解方法的合理性和有效性 ,现对两个通用考题进行基于可靠性的拓扑优化设计. 为了对比 ,我们对两考题亦进行常规拓扑优化 ,其中的作用荷载和许用位移、应力等值分别取为对应随机变量的均值.

例 1　平面五杆桁架结构(图 1(a))

结构参数为 $E_i = 2 \times 10^5$, (N/cm^2) , $\gamma_i = 1.0$, (kg/cm^3) ($i = 1 \sim 5$) . 两作用荷载 P_1 和 P_2 为完全相关的正态随机变量 ,它们的均值和变异系数为 $\mu_{P_1} = \mu_{P_2} = 100$, (kN) , $\upsilon_{P_1} = \upsilon_{P_2} = 0.1$;各杆的许用拉、压应力均为相同的随机变量 ,其均值和变异系数为 : $\mu_{S_i}^{\cdot} = 200$, (kPa) , $\upsilon_{S_p}^{\cdot} = 0.1$ ($i = 1 \sim 5$) ;各杆给定的强度可靠度为 $P_{Si}^{*} = 0.9999$ ($i = 1 \sim 5$) ;节点 2 的 y 方向和节点 3 的 x 方向的允许位移均为 ± 0.4 cm ,相应的给定的可靠度为 $P_{\delta_{2y}}^{*} = \delta_{\delta_{3x}}^{*} = 0.9986$.

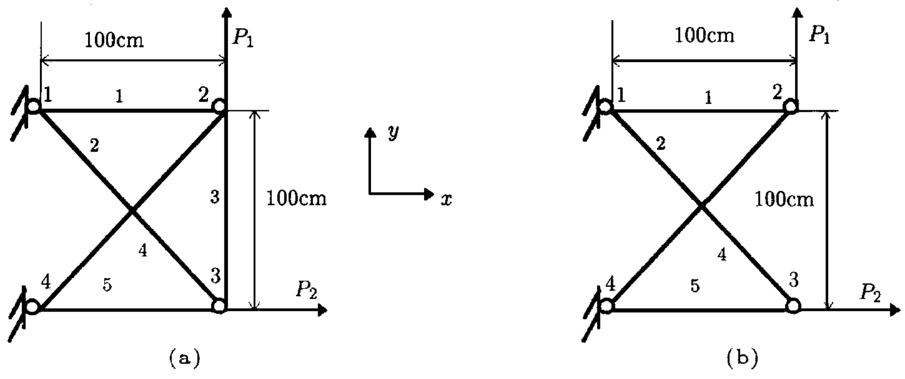

图 1

Fig. 1

以各杆截面积 A_i ($i = 1 \sim 5$) 为设计变量. 取初始值为 $A_i^{(0)} = 1.0$ (cm^2) ,常规和可靠性优化结果均列于表 1 ,最终拓扑优化结构见图 1(b) . 其中杆件 3 被删除 ,杆件 2 从受力角度可以删除 ,但为了保持结构的稳定性不能删除. 有趣的是最终拓扑结构是由传力路径彼此无关的

两个静定子结构组成.

表 1

Table 1

Variables(cm^2)	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$P\delta_{2y}$	$P\delta_{2y}$	W (kg)	Interation number
initial	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0			582.8427	0
design	1.0000 *	1.0000 *	1.0000 *	1.0000 *	1.0000 *	1.0000 *	1.0000 *		
conventional	0.5000	0.1	deleted	0.7071	0.5000			199.9849	5
design	0.5000 *	1.0000 *	\	0.5000 *	0.5000 *	0.9082 *	1.0000 *		
reliability	0.8748	0.1	deteled	1.2372	0.8748			349.9116	7
design	0.9999 *	1.0000 *	\	0.9999 *	0.9999 *	1.0000 *	1.0000 *		

* corresponding reliability

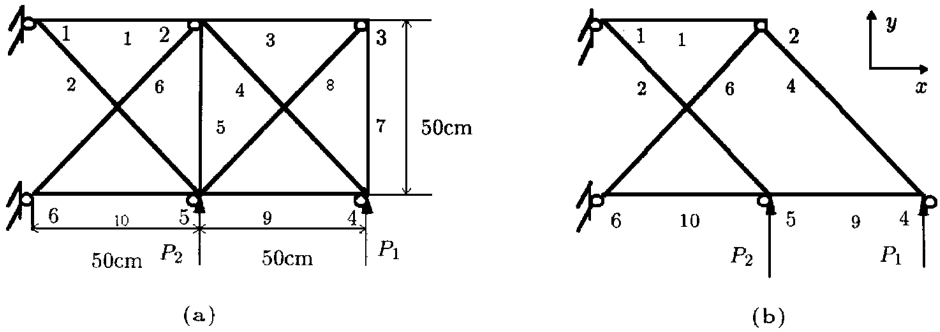

图 2

Fig. 2

表 2

Table 2

Variables(cm^2)	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
initial	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
design	1.0000 *	1.0000 *	1.0000 *	1.0000 *	1.0000 *	1.0000 *	1.0000 *	1.0000 *	1.0000 *	1.0000 *
conventional	1.0000	1.4142	deleted	0.7071	deleted	0.7071	deleted	deleted	0.5000	1.5000
design	0.5 *	0.5 *	\	0.5 *	\	0.5 *	\	\	0.5 *	0.5 *
reliability	1.7497	2.4744	deleted	1.2372	deleted	1.2372	deleted	deleted	0.8748	2.5284
design	0.9999 *	0.9999 *	\	0.9999 *	\	0.9999 *	\	\	0.9999 *	0.9999 *

design results	$P\delta_{4y}$	$P\delta_{5y}$	W (kg)	iterationnumber
initial design	1.0000 *	1.0000 *	2914.2136	0
conventional design	0.9192 *	1.0000 *	349.9698	5
reliability design	1.0000 *	1.0000 *	607.5331	7

* corresponding reliability

例 2　平面十杆桁架(图 2(a))

已知作用荷载和材料强度为相互独立的正态随机变量,其余各量均为确定性量.给出的设计数据: E_i, γ_i, $\mu_{S_i^\cdot}$, $\upsilon_{S_i^\cdot}$, $P_{S_i^\cdot}$ $(i = 1 \sim 10)$ 均同前例.两荷载 P_1 和 P_2 的均值和变异系数分别为: $\mu_{P_1} = 100$ (kN), $\mu_{P_2} = 200$ (kN), $\upsilon_{P_1} = \upsilon_{P_2} = 0.1$;节点 4 和 5 的 y 方向允许位移值均为 ± 0.4 cm,相应的可靠度为 $P_{\dot{\delta}_{4y}} = P_{\dot{\delta}_{5y}} = 0.9986$.

以各杆截面积 A_i $(i = 1 \sim 10)$ 为设计变量,取其初始值为 $A_i^{(0)} = 5.0$ (cm²),常规和可靠性优化结果均列于表 2,最终拓扑优化结构见图 2(b),其中 3,5,7,8 四杆均先后被删除.

4　结　论

1) 文中通过将可靠性约束函数这一概率表达式经等价显示化处理,使之转变为常规形式,从而使基于可靠性的结构拓扑优化问题可应用常规优化方法求解,但并未改变原问题可靠性约束的实质.

2) 由算例结果可知常规结构拓扑优化的最优解是基于可靠性拓扑优化中的不可行解.因此对于作用荷载和结构参数具有随机性的结构,常规的优化方法不再适用,只能依赖于可靠性优化设计.

3) 算例表明,静不定结构经拓扑优化后均变为静定结构,因此在桁架结构的拓扑优化中本文以各单元的强度可靠性约束替代结构体系强度可靠性约束,既可使结构可靠度计算大为简化,又有其一定的合理性.

参　考　文　献

1 Dorn W S, Gormory R E, Greenberg H J. Automatic design of optimal structures. *J Mechanics*, 1964, 3: 25～52

2 Kirsch U. Optimal topology of structures. *Comp Methods Apple Meth Eng*, 1988, 71: 15～28

3 Kirsch U. Optimal topologies of structures. *Appl Mech Rew*, 1989, 42: 233

4 Kirsch U, Topping B H V. Minimum weight design of structural topologies. *J Structural Eng*, 1992, 8: 1770～1785

5 Cheng G D, Jing Z. Study on topology optimization with stress constrains. *Eng Opt*, 1992, 20: 129～148

6 段宝岩,叶尚辉.考虑性态约束时多工况桁架结构拓扑优化设计.力学学报,1992, 24(2): 59～64 (Duan B Y, Ye S H. On topology optimization of trusses with multiple loading condition and behavior constraints, *Acta Mechanica Sinica*, 1992, 24(2): 59～64 (in Chinese))

7 谭中富,孙焕纯.多工况作用下空间桁架结构拓扑优化的修正单纯形方法.力学学报, 1994, 26(1): 90～97 (Tan Z F, Sun H C. The modified simplex method for topology optimization of space truss structure with multiple loading conditions, *Acta Mechanica Sinica*, 1994, 26(1): 90～97 (in Chinese))

8 许素强,夏人伟.桁架结构拓扑优化设计与遗传算法.计算结构力学及其应用,1994, 11: 436～445 (Xu S Q, Xia R W. Topological optimization of truss structure via the genetic algorithm, *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1994, 11(4): 436～445 (in Chinese))

9 Ohsaki M. Genetic algorithm for topology optimization of trusses, *Comput & Struct*, 1995, 57: 219～226

10 Wu S J. Integrated discrete and configuration optimization of trusses using genetic algorithms. *Comput & Struct*, 1995, 55: 695～702

11 王跃方,孙焕纯.多工况多约束下离散变量桁架结构的拓扑优化设计.力学学报, 1995, 27: 365～369 (Wang Y F, Sun H C. Optimal topology designs of trusses with discrete size variables subjected to multiple constraints and loadingcases. *Acta Mechanica Sinica*, 1995, 27(3): 365～369 (inChinese))

12 段宝岩,陈建军.基于极大熵原理的杆系结构拓扑优化设计研究.固体力学学报, 1997, (4) (Duan B Y, Chen J J. Study

on entropy - based topological optimization for truss structures. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1997, 18(4) (in Chinese))

13 Frangopl D M. The concept and method of structure optimization based on reliability, *Structural Safety Studies ASCE*, 1985, 1:53～66

14 **陈建军,段宝岩,王德满,王芳林. 我国结构可靠性优化研究的综述. 计算力学学报**, 1997(**增刊**): 477～482 (Chen J J, Duan B Y, Wang D M, Wang F L. A review on research of structural optimization based on reliability in China. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 1997, Spe Iss: 477～482 (in Chinese))

15 Chen J J, Duan B Y. Structural optimization by displaying the reliability constraints. *Comput & Struct*, 1994, 50:777～783

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF TRUSS STRUCTURES BASED ON RELIABILITY[1)]

Chen Jianjun Cao Yibo Duan Baoyan

(Electron - Mechanics School, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract The problem of topology optimization of truss structures based on reliability is studied in this paper. First of all, the structural analysis under the action of random loads is carried out and the mean value and variance of all joint's displacement and bar's stress in the structure are obtained by means of three fundamental equations (equilibrium, physical and geometric) in structural mechanics, as well as the property of moment of random variable. According to this, the mathematical model of topology optimization based on reliability for truss structures is developed, in which the cross sectional areas of bar are taken as design variables, the structure weight is taken as objective function, both the reliability of structural displacement and bar stress are taken as constraint functions.

Since the reliability constraints in the preceding optimization model are implicit and complex functions of design variables and they are expressed in form of probability, this leads to the conventional optimization algorithm being difficult to be applied directly. So a treatment method that the reliability constraints are equalized and displayed to the conventional constraints is proposed. By drawing into the reliability safety factor and using the relationship between the internal force and stress, all the reliability constraints of structure's displacement and bar's stress are equivalently displayed as the linear function of design variables. Therefore, the original optimization model based on reliability is transformed into the problem of conventional sequence linear programming and solved with the improved simplex method. For the variation of structural topology, the strategy of degenerate is employed. In addition, a corresponding analysis method for the structure geometric kinematics is used and inserted in the process of structural optimization to avoid insta bility structure. Finally, two examples show that the approach proposed in this paper is simple and efficient.

Key words structural reliability, topology optimization, reliability constraints of displacement and stress, linear programming, improved simplex method

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China.

Received 2 April 1997, revised 16 November 1997.