

# 按频带顺序排列的小波包新算法及应用<sup>1)</sup>

曾宇清 王卫东 贺启庸

(铁道部科学研究院机车车辆研究所, 北京 100081)

**摘要** 小波分析是一个国际研究热点. 小波包算法结果包含了 Mallat 算法结果. 小波包原算法是按小波包基顺序排列的, 本文提出按频带顺序排列的小波包新算法, 数值模拟以及实际应用都说明了它的正确性和优越性. 对小波理论的工程化具有重大意义.

**关键词** 小波包, 频带, 工程化

## 引言

小波分析是近年来发展起来的最具生命力的数学方法之一, 它可以归结到积分变换. 通过对积分核进行适当的约束, 小波分析突破了傅氏分析在应用中的平稳性假设、周期延拓等限制, 具有时-频定位的能力, 并在算法实施过程中实现了多分辨分析的功能. 这使得小波分析迅速成为数字信号处理的强大工具, 在图像处理、语音识别等领域取得令人瞩目的成绩, 成为国际研究的一个热点.

当然出于工程实际应用的考虑, 变换必须有相应的快速离散算法, 变换的结果应具有简明的物理意义. 在这一方面, Fourier 积分、级数及相应的 FFT 算法是一个成功的典范.

Mallat 算法在小波分析中的地位与 FFT 在 Fourier 分析中的地位相当. 小波包是小波的推广. Mallat 算法的结果包含在小波包算法结果中. Mallat 算法的结果在工程上可以认为是对信号的二分频, 小波包算法是否具有类似的物理意义, 是我们讨论的问题.

研究表明: 小波包原算法结果不具有简明的物理意义.

如何解决, 这是本文的核心.

## 1 小波包基本理论<sup>[1,2,5]</sup>

**定义** 设  $\{p_k\}$  是一个正交尺度函数  $\phi$  的两尺度序列,  $\{q_k = (-1)^k \overline{p_{1-k}}\}$  给出了正交

$$\text{小波, 用} \begin{cases} \mu_{2l}(t) = \sum_k p_k \mu_l(2t - k) \\ \mu_{2l+1}(t) = \sum_k q_k \mu_l(2t - k) \end{cases}$$

<sup>1)</sup>国家自然科学基金资助项目.

1996 - 10 - 31 收到第一稿, 1997 - 04 - 24 收到修改稿.

此时, 小波包  $\{\mu_n: n=0, 1, 2, \dots\}$  的傅氏交换可用下式给出

$$\mu_n(\cdot) = \sum_{k=1} P_k(e^{-i\cdot/2^k}), \quad \text{IR}$$

$$P_0(z) = P(z); \quad P_1(z) = Q(z)$$

其中

$$n = \sum_{j=1}^{\infty} j2^{j-1}, \quad j \in \{0, 1\}$$

考虑用  $\{\mu_n: n=0, 1, 2, \dots\}$  生成的子空间族,  $U_j^n = \text{CloS}_{l^2(\text{IR})} \{2^{j/2} \mu_n(2^j \cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  及  $U_{j+1}^n = U_j^{2^n} \oplus U_j^{2^{n+1}} : j \in \mathbb{Z}$ , 那么对于每个  $m=0, 1, 2, \dots, 2^k - 1, k=1, 2, \dots, j$  和  $j=1, 2, \dots$ , 族  $\{2^{(j-k)/2} \mu_{2^k+m}(2^{j-k}t-l) : l \in \mathbb{Z}\}$  是  $U_{j-k}^{2^k+m}$  的一个规范正交基.

由上可见, 使用第  $k$  个正交分解, 第  $j$  个频带  $H_j$  进一步划分为  $2^k$  个“子频带”, 即小波分解得到的高频成分可按小波包理论进一步细分.

由以上分析我们还可以得到

$$l^2(\text{IR}) = \bigoplus_k U_j^k : \forall j \in \mathbb{Z}$$

**定理** 若  $0 \leq s \leq L, 0 \leq n \leq 2^{L-s}$ , 则  $x_p^{n,s} = F_1 \dots F_{L-s} \{x^{0,L}\}(p)$

其中  $j$  是  $n$  的二进表示式中的第  $j$  个数, 算子  $F_0 = H, F_1 = G$  定义参见下文.

下面简介小波包算法及对应的理解.

$$\text{记算子 } H, G: l^2(\frac{\mathbb{R}}{h\mathbb{Z}}) \rightarrow l^2, \quad \begin{cases} H\{s_k\}(j) = \sum_k s_k p_{k-2j} \\ G\{s_k\}(j) = \sum_k s_k q_{k-2j} \end{cases}$$

鼠

当然在实际应用中,我们就希望能得到频带特性明确简单——按频带顺序排列的分解结果,这将大大明确和方便我们的分析研究.

由上一节可见  $\mu_n(\omega) = \sum_{k=1}^n P_k(e^{-i\omega/2^k})$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ , 由于生成正交尺度函数及对应正交小波的任一  $P_0(z) = P(z)$ ;  $P_1(z) = Q(z)$ , 在  $|z|=1$  上有相似的分布,为说明问题起见,我们可以研究某组  $P(z)$ ,  $Q(z)$  作为代表,再者由  $l^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_k U_j^k: \forall j \in \mathbb{Z}$  及  $U_j^k, U_0^k$  间的关系,我们可知序列  $\{U_j^k\}$  在频域的相对关系是一致的,与  $j$  的数值无关. 这样我们就可以通过研究特殊  $P(z), Q(z)$  组对应的  $\{U_0^k\}$  来研究  $\{U_j^k\}$ , 进而推广得到一般  $P(z), Q(z)$  对应的小波包分解的结论,这是本节的思路. 以下以由 Shannon 正交小波导出的小波包作为考察的对象.

取  $\phi = \frac{\sin t}{t}$ , 则  $\phi$  是一个标准正交尺度函数,此时

$$P_0(e^{-i\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |\omega| < \pi \end{cases}$$

且相对于  $\omega$  周期为  $2\pi$ .

$|P_0|, |P_1|$  如图 1 所示. (由于仅考虑分布故仅取其模值表示)

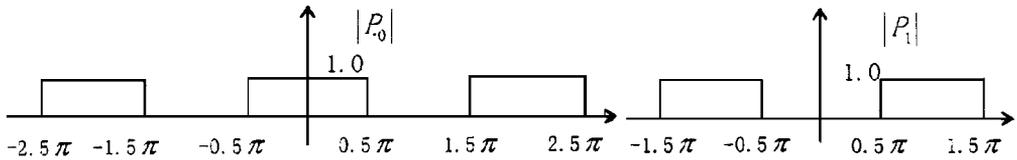


图 1  
Fig. 1

由  $\phi$  易得

$$\begin{cases} V_j = \{u \in l^2(\mathbb{R}) \mid \text{Supp}(u) \subset [0, 2^j]\} \\ W_j = \{u \in l^2(\mathbb{R}) \mid \text{Supp}(u) \subset [2^j, 2^{j+1}]\} \end{cases}$$

以及  $U_0^n, \mu_n(\omega)$  具有相同的频域范围. 根据上述递推关系易得  $U_0^n$  频域分布如图 2.

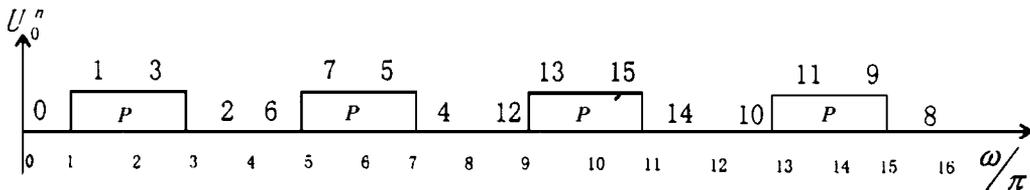


图 2  
Fig. 2

图 2 横轴下方表示频率,上方所标数字为下方频带对应的  $U_0^n$ , 可见  $U_0^n$  的顺序排列并不对应频带的顺序排列. 结合上图对  $U_0^n$  的范围进行进一步的研究,  $U_0^n$  在频域的排列次序显然是由

$P_0, P_1$  决定的. 由于  $P_0, P_1$  的频域范围的限制使  $U_0^n$  在频域的排列是按  $P_0, P_1, P_1, P_0, P_0, P_1, P_1, P_0, \dots$  依次进行的, 这使我们可以改进现有的算法, 以达到分解结果按频带顺序递增的效果.

将上述分析所得规律与定理相结合, 则按频带顺序排列的小波包算法可以表述如下:

- 1) 原始数据  $s(N)$ ,  $N = 2^n$ , 不足时在前后加零对结果无不良影响;
- 2) 对  $s(N)$  作用  $H, G$  得到  $s_{-1}(N)$ ;
- 3) 对  $s_{-1}(0, N/2)$  作用  $H, G$ , 对  $s_{-1}(N/2, N)$  作用  $G, H$  得到  $s_{-2}(N)$ ;
- 4) 将  $s_{-i}(N)$  分成  $2^i$  组, 按  $H, G, G, H, H, G, G, H, \dots$  的顺序, 作用  $H, G$  算子, 得到  $s_{-(i+1)}(N)$ .

经过以上各步可得按频带顺序排列的小波包分解, 如图 3.

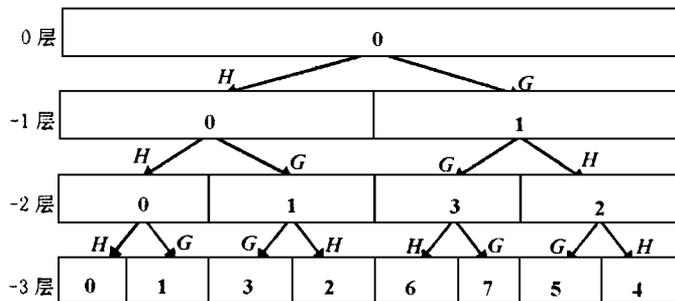


图 3

Fig. 3

### 3 数值模拟<sup>[4]</sup>

为验证按频带顺序排列的小波包新算法, 对正弦信号进行新旧小波包算法分解对比, 采样频率为信号频率的四倍, 图中由下至上分别对应 0, -1, -2, -3, ... 各层, 其中每层数据按变换结果顺序 (参见相应的算法示例) 排列.

由图 4 可见, 原算法图 4(a) 有二个频带点, 且相距较远; 同时新算法图 4(b) 恰恰有一个四分之一采样频率的频带点 (Nyquist 频率之半).

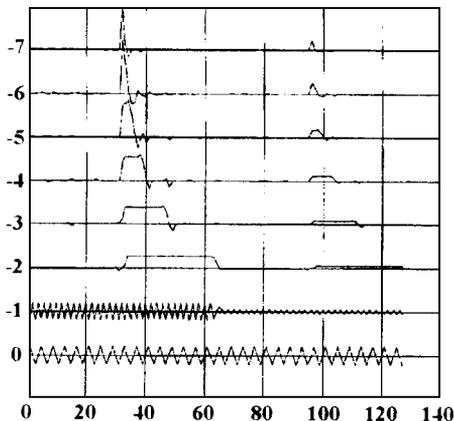


图 4(a) 小波包原算法作用下的  $\sin$  函数

Fig. 4(a)  $\sin(n/2)$  under old algorithm

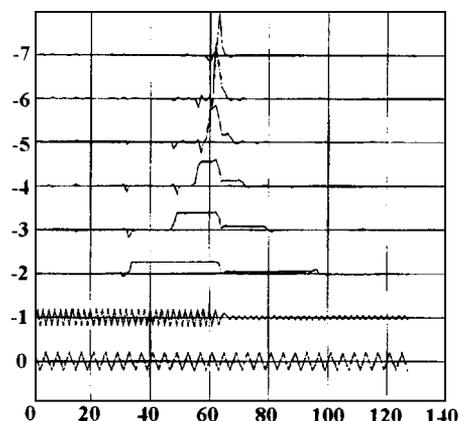


图 4(b) 小波包新算法作用下的  $\sin$  函数

(采样频率为信号频率四倍)

Fig. 4(b)  $\sin(n/2)$  under new wavelet packet algorithm

### 4 工程实例对比<sup>[3,4]</sup>

小波分析能很好地处理非平稳信号,小波包相对小波能提供信号更加详细的信息.图 5 是 MX-4 车床的实测颤振信号的小波包未改进算法分析结果,原始数据出自文[3].图中最上层为原始信号(0 层),以下各层排列按小波包基顺序排列.由图中可见,在第二层的四个窗口中,第三个窗口 C 曲线能量相对很弱,可以看作为一部分随机噪声,以下各层窗口能量分布看不出明显规律.最下层能量最强的有三个窗口 E, F, G.若这三个窗口能充分描述颤振过程,那么就可舍弃其它 29 个窗口从而将数据压缩十余倍.

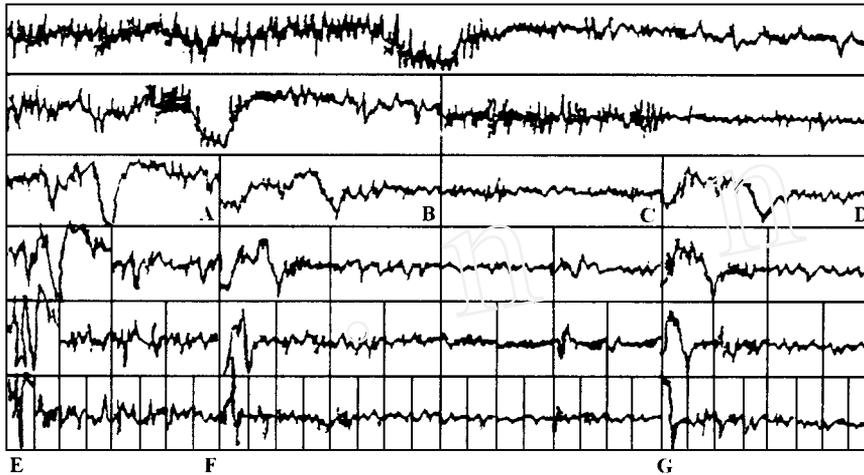


图 5 小波包原算法作用下的颤振信号

Fig.5 Tremble signal under old wavelet packet algorithm

图 6(a~g)是图 5 中标记窗口 A, B, C, D, E, F, G 的恢复结果.(e)是一条光滑曲线,反映了刀架在主切削力方向上的走向.也就是说,要观察刀架在主切削力方向上的大体走向,只要观察窗口 E. (f), (g)的叠加为图 6(i),显然(i)很好地描述了颤振从稳定到消失的全过程,可以视为纯的颤振.很明显图 6(f), (g)所显示的运动具有一定的互补性频率成分是接近的.窗口 E, F, G 合成结果见图 6(h),它集中体现了刀架的走向和颤振过程.

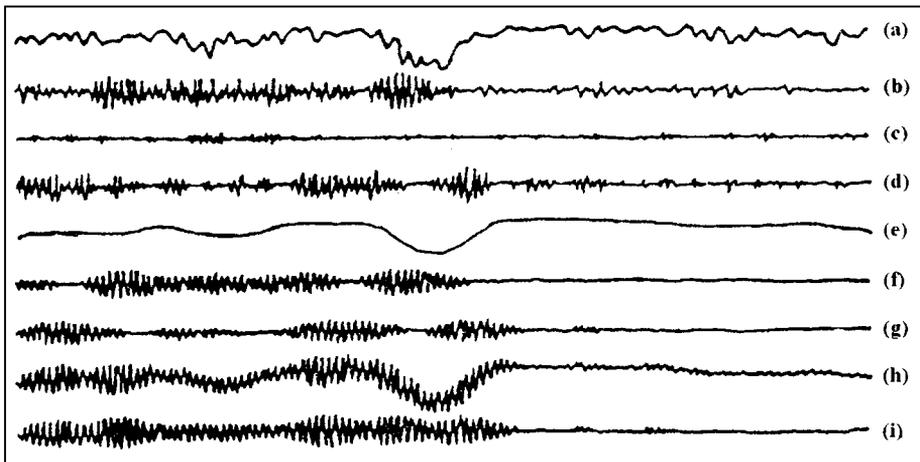


图 6 颤振信号的小波包分解部分恢复

Fig.6 Partial reconstruction of tremble signal

以上的结果是令人振奋的,小波包算法能将信号的信息有层次地展现在我们面前,使我们能对信号有较全面的了解,通过小波局部恢复我们能较好地研究过程的方方面面,提取较纯的特征,对信号的处理、传递、识别具有重要意义。

然而在图 5 中还存在以下几个疑点:(1) 看作随机噪声的  $C$  不是高频的;(2) 较强的信号成分频率很分散,各层没有较一致的规律,注意这对应于同一信号的正交分解;(3) 频率范围接近的  $F$ ,  $G$  相距较远。这是小波包原算法一般理解所无法解释的。

经过我们的分析研究发现:原有的小波包算法结果是按小波包基顺序排列的,而小波包基的顺序排列并不等价于频带的顺序排列,虽然从信号分解与恢复的角度而言这是可以接受的,但对信号的分析研究是极不方便的。很难相信如果在 FFT 的库利-图恩算法没有倒序这一步,FFT 能产生如今这样重大的影响。在深刻研究原算法的基础上我们推出:按频带顺序排列的小波包新算法。它的作用相当给没有倒序的库利-图恩算法加上了倒序这一步。对小波包理论推向实用具有重大意义。

对同一信号按频带顺序排列的小波包新算法分解结果如图 7。

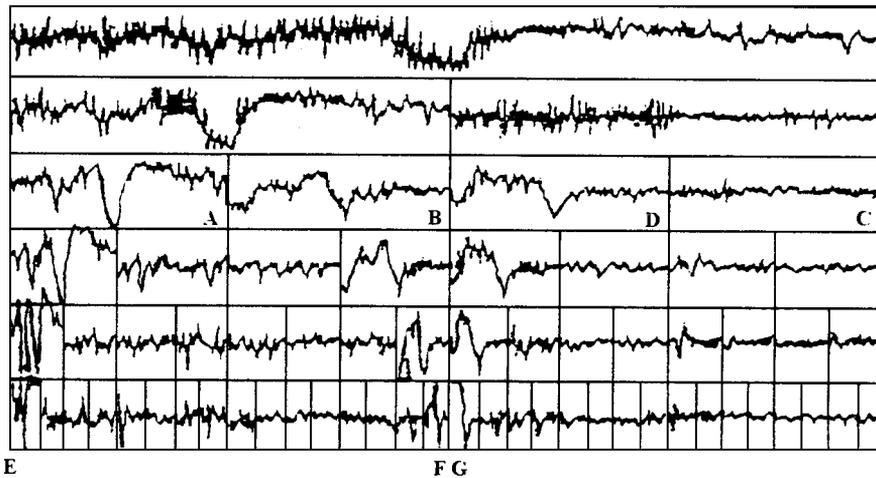


图 7 小波包新算法作用下的震颤信号

Fig. 7 Tremble signal under new wavelet packet algorithm

由新算法结果可见:(1) 噪声  $C$  具有高频成分;(2) 第二层以下能量分布规律非常明确,能量集中在反映刀架走向的低频区和反映刀架颤振的中频区;(3) 具有互补特性的成分  $F$ ,  $G$  是相邻的。当然也可见采样频率是合适的,这与实际工作情况相符。

对比图 5, 图 7 以及上述分析,显然按频带顺序排列的小波包新算法不仅具有小波包的一切优点,而且结果具有简明的意义,有相当的优越性,很好地满足了工程需要。为小波理论的实用化创造了必要条件。

## 5 总 结

小波分析是一门新兴的学科,具有许多优良特性和广泛的应用前景,同时小波分析本身以及小波分析与工程的结合方面还有许多工作需要我们去完善去探讨。这对我们而言,一方面是机遇,一方面是挑战。本文提出并论证了按频带顺序排列的小波包新算法,是小波包传统算法的理论突破,对小波理论的工程化具有重大意义。

## 参 考 文 献

- 1 崔锦泰著,程正兴译.小波分析导论.西安:西安交通大学出版社,1995 (Charles K. Chui. An Introduction to Wavelets, Academic Press, 1992)
- 2 秦前清等编著.实用小波分析.西安:西安电子科技大学出版社,1994 (QinQianqing, Yang Zongkai. Application of Wavelet Analysis, Xi'an: Xi'an Electronic University Press, 1994 (in Chinese))
- 3 吴雅等.工程中的小波分析及其应用.机械科技的未来——国家自然科学基金机械科技青年科学家论坛.北京:机械工业出版社,1994 (Wu Ya et al. Application of Wavelet Analysis in Engineering, Beijing: Mechanical Industry Press, 1994 (in Chinese))
- 4 曾宇清.小波分析与重构技术研究及其在车辆动力学中的应用.铁道部科学研究院研究生学位论文,1996 (Zeng Yuqing. Research of Wavelet Analysis and Application in Vehicle System Dynamics, China Academy of Railway Sciences, 1996 (in Chinese))
- 5 Coifman RR. Entropy-based algorithms for best basis selection. *IEEE Trans Inform Theory*, 1992, 38

**THEORY AND APPLICATION OF NEW WAVELET  
PACKETS ALGORITHM WITH RESULTS  
IN THE ORDER OF FREQUENCY-BANDS<sup>1)</sup>**

Zeng Yuqing Wang Weidong He Qiyong

( China Academy of Railway Sciences, Beijing 100081, China)

**Abstract** Wavelet analysis is a focus of international research. The result of Mallat algorithm is included in the result of wavelet packet algorithm. Old algorithm of wavelet packet put the results in the order of wavelet packet. It is good for mathematics, but not good enough for engineering. In many applications, we wish the result of algorithm can correspond to simple physics. As an example the Shannon wavelet Packets are discussed in detail, and Wavelet packets algorithm which put result in the order of frequency-bands is advanced order. Correctness and advantage of the new algorithm are proved by simulation and practice. it is very important to the application of Wavelet analysis.

**Key words** wavelet packet, frequency-band, application

<sup>1)</sup> The project supported by the National Natural Science Foundation of China.

Received 31 October 1996, revised 24 April 1997.