第 30 卷 第 2 期　　力 学 学 报　　Vol. 30 ,No. 2
1998 年 3 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　Mar. , 1998

谐和与窄带随机噪声联合作用下 Duffing 系统的参数主共振[1)]

戎海武　徐 伟　方 同
(西北工业大学振动工程研究所, 西安 710072)

摘要　研究了 Duffing 振子在谐和与窄带随机噪声联合激励下的参数主共振响应和稳定性问题. 用多尺度法分离了系统的快变项, 并求出了系统的最大 Lyapunov 指数. 本文还分析了失稳及跳跃现象, 及系统的阻尼项、非线性项、随机项、确定性参激强度对系统响应的影响. 数值模拟表明本文提出的方法是有效的.

关键词　参数主共振, Duffing 系统, 多尺度法, 最大 Lyapunov 指数

引 言

非线性随机振动是当前非线性力学研究的重点之一. 而参激随机振动比研究外激随机振动更为重要, 理论上也更为不成熟[1]. 目前, 对于确定性谐和与宽带随机参激联合作用下系统的稳定性与响应分析已有一些研究[2,3], 但对谐和与窄带随机联合参激下系统的稳定性与响应分析, 尚未见研究.

1　基本公式的推导

考虑同时受谐和参激与窄带随机噪声参激的 Duffing 振子

$$\ddot{u} + \varepsilon\beta\dot{u} + \omega^2(u + \varepsilon\alpha u^3) + \varepsilon(\xi(t) + h_0\cos\Omega_0 t + k_0\sin\Omega_0 t)u = 0 \tag{1}$$

式中 $\varepsilon \ll 1$ 为小参数; β, ω 分别为系统的阻尼系数和自然频率; α 代表系统的非线性强度, h_0, k_0 是常数, Ω_0 是确定性谐和激励的频率, $\xi(t)$ 是一窄带随机噪声, 设 $\xi(t)$ 由下式表示

$$\xi(t) = h_i\cos\Omega_1 t + k_1\sin\Omega_1 t \tag{2}$$

式中 $h_1 = h_1(\varepsilon t)$, $k_1 = k_1(\varepsilon t)$ 是随时间缓慢变化的零均值平稳随机过程. 本文用多尺度法进行分析, 设系统 (1) 具有如下形式的解

$$u(t,\varepsilon) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \cdots \tag{3}$$

式中 $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$. 本文只对首次近似解 $u_0(T_0, T_1)$ 进行讨论, 经计算可得

$$u_0(T_0, T_1) = A(T_1)\exp(\mathrm{i}\omega T_0) + cc \tag{4}$$

---

1) 国家自然科学基金资助课题.

1996 - 11 - 03 收到第一稿, 1997 - 08 - 22 收到修改稿.

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = & -2\mathrm{i}\omega A' \exp(\mathrm{i}\omega T_0) - \mathrm{i}\omega\beta A\exp(\mathrm{i}\omega T_0) - \\ & \alpha\omega^2 A^3\exp(3\mathrm{i}\omega T_0) - 3\alpha\omega^2 A^2\bar{A}\exp(\mathrm{i}\omega T_0) - \\ & \frac{A}{2}(h_0 - \mathrm{i}k_0)\exp[\mathrm{i}(\Omega_0 + \omega)T_0] - \frac{\bar{A}}{2}(h_0 - \mathrm{i}k_0)\exp[\mathrm{i}(\Omega_0 - \omega)T_0] - \\ & \frac{A}{2}(h_1 - \mathrm{i}k_1)\exp[\mathrm{i}(\Omega_1 + \omega)T_0] - \frac{\bar{A}}{2}(h_1 - \mathrm{i}k_1)\exp[\mathrm{i}(\Omega_1 - \omega)T_0] + cc \end{aligned} \tag{5}$$

式中 cc 表示前述各项的共轭，A'，$\bar{A}$ 表示 A 对 T_1 的导数及共轭.

2 参数主共振情形 Ⅰ

设 $\Omega_0 \approx 2\omega$，但 Ω_1 远离 Ω_0，此时随机激励在近似解及其稳定性分析中不起作用，引入调谐参数 σ，$\Omega_0 = 2\omega + \varepsilon\sigma$，令 (5) 式右端的奇异项为零可得

$$2\mathrm{i}\omega A' + \mathrm{i}\beta\omega A + 3\alpha\omega^2 A^2\bar{A} + \frac{1}{2}\bar{A}(h_0 - \mathrm{i}k_0)\exp(\mathrm{i}\sigma T_1) = 0 \tag{6}$$

将 A 表示为极坐标的形式

$$A(T_1) = a(T_1)\exp[\mathrm{i}\phi(T_1)] \tag{7}$$

将 (7) 式代入 (6) 式并分离实部和虚部可得

$$\left.\begin{aligned} a' &= -\frac{\beta}{2}a + \frac{a}{4\omega}(k_0\cos\eta - h_0\sin\eta) \\ a\eta' &= \sigma a - 3\alpha\omega a^3 - \frac{a}{2\omega}(h_0\cos\eta + k_0\sin\eta) \end{aligned}\right\}$$

ar i 蛮 纆 t

在本节及以后的零解的稳定性分析中，均与非线性项无关.

2.2 稳态解分叉与跳跃现象

取 σ 为分叉参数，而谐和激励强度 $h=\sqrt{h_0^2+k_1^2}>2\omega\beta$ 保持不变，当 σ 由一个小值逐渐增大时，此过程在图 1 中用 $A_1\to A_2\to A_3'$ 表示，在 A_2 处，即

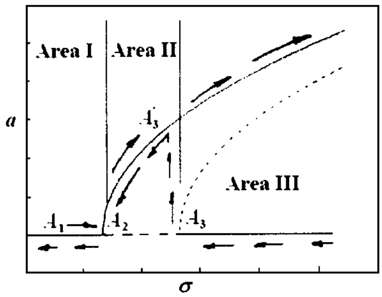
$$\sigma=\sigma_1=-\sqrt{\frac{h^2-4\omega^2\beta^2}{4\omega^2}}=-\sqrt{\frac{h_0^2+K_0^2-4\omega^2\beta^2}{4\omega^2}} \tag{11}$$

时，稳态响应将从零变为非零，故 σ_1 为系统的一个分叉点. 如果 σ 从一个大值逐渐减小时，此过程在图 1 中用 $A_3\to A_3'\to A_2\to A_1$ 表示，在 A_3 处，即

$$\sigma=\sigma_2=\sqrt{\frac{h^2-4\omega^2\beta^2}{4\omega^2}}=\sqrt{\frac{h_0^2+k_0^2-4\omega^2\beta^2}{4\omega^2}} \tag{12}$$

时，系统的稳态响应将出现 A_3 到 A_3' 的跳跃，故 σ_2 也为一个分叉点.

取 h 为分叉参数，而 $\sigma>0$ 为常数，当 h 缓慢增加时幅值 a 的变化过程见图 2，如果初始时 a 的值为零，随着 h 的增加，在 B_3 处即 $h=h_1=2\omega\sqrt{\beta^2+\sigma^2}$ 时，幅值 a 将发生从 B_3 到 B_3' 的跳跃. 而当 h 从大值逐渐减小 $D\to B_3'\to C$ 时，将在 C 处即 $h=h_2=2\omega\beta$ 处将发生 $C\to B_2$ 的跳跃，故 h_1，h_2 都是系统的分叉点.

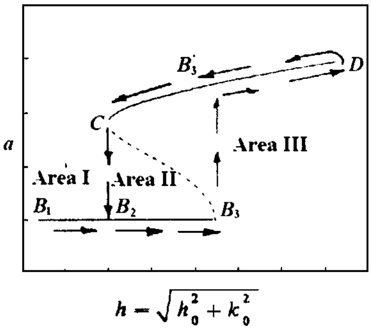


——稳定解，- - -不稳定解

——stable solution，- - -unstable solution

图 1 Duffing 系统频率响应分叉图

Fig. 1 Frequency response bifurcation of Duffing system



——稳定解，- - -不稳定解

——stable solution，- - -unstable solution

图 2 Duffing 系统响应分叉图

Fig. 2 Response bifurcation of Duffing system

2.3 数值模拟

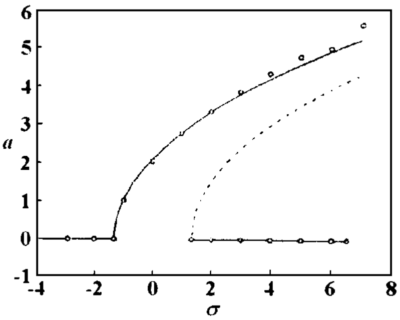
在数值模拟中，$\xi(t)$ 可取为如下形式[4]

$$\xi(t)=\sqrt{\frac{2\sigma_\xi^2}{N}}\sum_{k=1}^{N}\cos(\omega_k t+\phi_k) \tag{13}$$

式中 ω_k 是独立同分布随机变量序列，ω_k 概率密布函数与 $\xi(t)$ 的谱密度函数是相同的，ϕ_k 是 $(0,2\pi)$ 上独立同分布随机变量序列，本文的数值模拟中，取 ω_k 的概率密度函数为 $\left(\Omega_1-\frac{\gamma}{2},\ \Omega_1+\frac{\gamma}{2}\right.$ 上均匀分布

$$N=500,\quad \gamma=0.1,\quad \varepsilon=0.1,\quad \beta=0.5,\quad \alpha=0.1,\quad \omega=1.0$$

用四阶龙格库特方法求出系统 (1) 的稳态响应关于 σ, h 的变化曲线及与理论解的比较见图 3, 4. 跳跃现象也在数值模拟中得到了证实.



$h_0 = k_0 = 2.0$, $\Omega_1 = 10.0$, $\sigma_\xi^2 = 1.0$

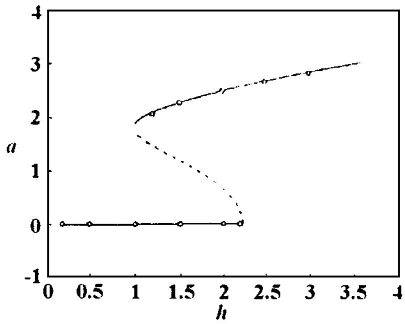
—— 稳定解, --- 不稳定解, °°° 数值解

—— stable solution, --- unstable solution

°°° numerical solution

图 3　Duffing 系统频率响应曲线

Fig. 3　Frequency response of Duffing system



$\Omega_1 = 10.0$, $\sigma_\xi^2 = 1.0$, $\sigma = 1.0$

—— 稳定解, --- 不稳定解, °°° 数值解

—— stable solution, --- unstable solution

°°° numerical solution

图 4　Duffing 系统响应曲线

Fig. 4　Response of Duffing system

3　参数主共振情形 II

设 $\Omega_1 \approx 2\omega$, 但 Ω_0 远离 Ω_1, 此时谐和激励在近似解及稳定性分析中不起作用, 设 $\Omega_1 = 2\omega + \varepsilon\sigma$, 令 (5) 式右端的奇异项为零可得

$$2\mathrm{i}\omega A' + \mathrm{i}\beta\omega A + 3\alpha\omega^2 A^2\bar{A} + \frac{1}{2}\bar{A}[h_1(T_1) - \mathrm{i}k_1(T_1)]\exp(\mathrm{i}\sigma T_1) = 0 \tag{14}$$

3.1 零解的稳定性

作变换

$$A = (x + \mathrm{i}y)\exp(\mathrm{i}\sigma T_1/2) \tag{15}$$

并忽略非线性项可将 (14) 化为如下的线性系统

$$\begin{aligned} x' &= \left(-\frac{\beta}{2} + \frac{k_1}{4\omega}\right)x + \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{h_1}{4\omega}\right)y \\ y' &= \left(-\frac{\sigma}{2} + \frac{h_1}{4\omega}\right)x + \left(-\frac{\beta}{2} - \frac{k_1}{4\omega}\right)y \end{aligned}$$

h　在　稳定　即

(18)

从而最大 Lyapunov 指数为

$$\lambda = -\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4\omega}\lim_{r\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T[k_1(T_1)\cos\eta(T_1) - h_1(T_1)\sin\eta(T_1)]\mathrm{d}T_1 \tag{19}$$

3.2 非零稳态解

对于小强度的噪声，由于 h_1，k_1 较小，由 (19) 可知系统 (16) 的最大 Lyapunov 指数 $\lambda < 0$，即零解稳定. 当 σ_ξ^2 变大时，$\lambda > 0$，此时系统 (14) 的零解已不稳定，系统将会有一个非零的稳态解. 作变换 (7) 可将 (14) 化为

$$\left.\begin{aligned} a' &= -\frac{\beta}{2}a + \frac{a}{4\omega}(k_1\cos\eta - h_1\sin\eta) \\ \eta' &= \sigma - 3\alpha\omega a^2 - \frac{1}{2\omega}(h_1\cos\eta + k_1\sin\eta) \end{aligned}\right\}$$

i

作用

(21)

式中

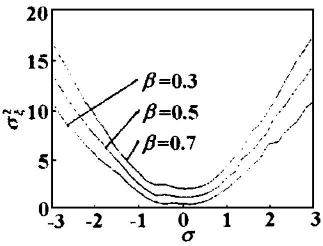
$$\theta = \mathrm{arctg}\frac{k_1}{h_1} + \eta, \qquad h = \sqrt{h_1^2 + k_1^2}$$

从 (20) 到 (21) 的变换中忽略了快变项. 结合矩方法和高斯截断法[1]可求解系统 (21) 稳态响应的一、二阶矩 Ea，Ea^2 的数值解.

3.3 数值模拟

对不同的 σ, σ_ξ^2, 可由 (19) 式计算 λ - (σ, σ_ξ^2) 曲面. 当 $\lambda = 0$ 时相应的 σ_ξ^2-σ 曲线见图 5，此曲线为系统 (16) 零解几乎必然稳定的边界曲线，即在曲线上方的 (σ, σ_ξ^2) 值，系统零解不稳定，在曲线下方则稳定.

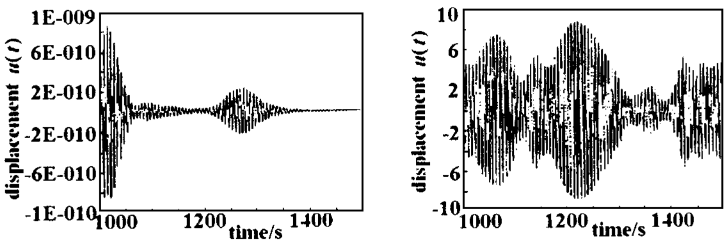
当噪声强度 σ_ξ^2 达到一定值后，零解变得不稳定，此时系统有一非零的稳态解. 取 $\sigma = -1$，对于不同的 σ_ξ^2，由 (1) 得到的 $u(t)$ 的时间历程见图 6.



$h_0 = k_0 = 2.0$, $\Omega_0 = 10.0$

图 5 Duffing 系统的稳定性区域

Fig. 5 Stability area of Duffing system



(a) $\sigma_\xi^2 = 1.0$ (b) $\sigma_\xi^2 = 25.0$

图 6 Duffing 系统的响应 $h_0 = k_0 = 2.0$，$\Omega = 10.0$

Fig. 6 Response of Duffing system

当 σ_ξ^2 较大，在某 σ 范围时，系统将发生随机跳跃 (见图 6 中的 (b))，即从大的幅值跳跃到小的幅值或从小的幅值跳跃到大的幅值，类似于 Duffing 振子在窄带随机外激下的跳跃[6]，此时系统响应的一、二阶矩不能完全描述系统响应的统计特性，而需用系统响应的联合稳态概率密度函数来描述.

4 参数主共振情形 Ⅲ

设 $\Omega_0 = \Omega_1 \approx 2\omega$，$\Omega_0 = \Omega_1 = 2\omega + \varepsilon\sigma$，令 (5) 式右端的奇异项为零可得

$$2\mathrm{i}\omega A' + \mathrm{i}\beta\omega A + 3\alpha\omega^2 A^2 \bar{A} + \frac{1}{2}\bar{A}[h_0 + h_1 - \mathrm{i}(k_0 + k_1)]\exp(\mathrm{i}\sigma T_1) = 0 \tag{22}$$

4.1 零解的稳定性

类似 3.1 的方法，可求得系统 (22) 零解的最大 Lyapunov 指数为

$$\lambda = -\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4\omega}\lim_{r\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T[(k_0 + k_1)\cos\eta(T_1) - (h_0 + h_1)\sin\eta(T_1)]\mathrm{d}T_1 \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} \eta' &= \sigma - \frac{1}{2\omega}[(h_0 + h_1)\cos\eta + (k_0 + k_1)\sin\eta] \\ \rho' &= -\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4\omega}[(k_0 + k_1)\cos\eta - (h_0 + h_1)\sin\eta] \end{aligned}\right\}$$

4.4 分叉与跳跃现象的讨论

考虑系统(22)的稳定性分叉,由(23)定义的最大 Lyapunov 指数可作为分叉参数,即当 $\lambda < 0$ 时系统稳定,而当 $\lambda > 0$ 时则不稳定. 类似地 σ_ξ^2, $|\sigma|$ 和 h 均可作为系统(22)的稳定性分叉参数.

当 (σ, h) 在区域 III 时,如果 $\sigma_\xi^2 = 0$, 由第 2 节的讨论可知系统对不同的初始扰动有两个可能的稳态解,对小强度的 σ_ξ^2, 它们也都是稳定的,数值模拟证实了这一点. 在参数共振情形 I 讨论的跳跃现象对小强度的 σ_ξ^2 也是存在的.

5 参数主共振情形 IV

设 $\Omega_0 \approx 2\omega$, $\Omega_1 \approx 2\omega$, $\Omega_0 \neq \Omega_1$, 在此情形下,系统(11)理论分析较为困难,故本文对系统(1)进行了数值模拟. 计算表明,窄带噪声对系统的零解稳定性和非零稳态解的影响类似于参数共振情形 III,即随着 σ_ξ^2 的增大,系统的零解可从稳定变为不稳定,系统的非零稳态解逐渐变为一扩散的极限环,扩散的程度与 σ_ξ^2 有关. 对一定强度的 σ_ξ^2,当 (σ, h) 在区域 III 时,系统有两个不同的稳态解,跳跃现象仍存在.

参 考 文 献

1 朱位秋. 随机振动,北京:科学出版社,1992 (Zhu WQ. Random Vibration,Beijing: Science Press, 1992 (in Chinese))

2 Namachchivaya NS. Almost sure stability of dynamical systems under combined harmonic and stochastic excitations. *J Sound and Vib*, 1991, 151(1): 77～91

3 Ariaratnam ST, Tam DSF. Parametric random excitation of a damped Mathieu oscillator. *ZAMM*, 1976, 56: 449～452

4 Shinozuka M. Simulation of multivariate and multidimensional random processes. *J Sound and Vib*, 1971, 49: 357～367

5 Oseledec VI. A multiplicative ergodic theorem, Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Transaction of the Moscow Mathematical Society*, 1968, 19: 197～231

6 Zhu WQ. Stochastic Jump and Bifurcation of A Duffing Oscillator Under Narrow-Band Excitation. *J Sound and Vib*, 1993, 165(2): 285～304

PRINCIPAL RESPONSE OF DUFFING OSCILLATOR TO COMBINED DETERMINISTIC AND NARROW-BAND RANDOM PARAMETERIC EXCITATION[1)]

Rong Haiwu Xu Wei Fang Tong

(*Institute of Vibration Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710072, , China)

Abstract The principal resonance of a Duffing oscillator to combined deterministic and narrow-band random parametric excitations is investigated.

In particular, the case in which the parametric terms sharing close frequencies is examined. For the first time, the method of multiple scales is used to determine the equations of modulation of amplitude and phase. The behavior, stability and bifurcation of steady state response are studied by means of qualitative analyses. Jumps are shown to occur if the random excitation is small. The effects of damping, detuning, and magnitudes of deterministic and narrow-band parametric excitations are analyzed. The theoretical analyses are verified by numerical results. Theoretical analyses and numerical simulations show that:

1. When the intensity of the random excitation increases, the trivial steady state solution may lose its stability and then the system may have a nontrivial steady state solution.

2. When the intensity of the random excitation increases, the nontrivial steady state solution may change from a limit cycle to a diffused limit cycle.

3. Under some conditions the systems may have two steady state solutions.

4. Under some conditions the jumps may exist.

Key words principal resonance, Duffing oscillator, multiple scales method, largest Lyapunov exponent

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China.

Received 3 November 1996, revised 22 August 1997.