

黎曼位形空间中约束 多体系统的动力学分析

水小平

(北京理工大学应用力学系, 北京 100081)

摘要 在黎曼位形空间中研究了约束多体系统的动力学问题. 通过对约束矩阵的奇异值分解和修正的 Gram-Schmidt 过程构造了系统流形的法向和切向子空间的正交归一化基, 将系统的动力学方程沿这双基进行投影, 得到了求系统动力学响应的新型公式, 给出了其数值分析的一种方法, 并举了算例.

关键词 动力学, 多体系统, 黎曼位形空间, 投影方程, 数值分析

引 言

Blajer^[1]研究指出, 若在黎曼位形空间中求解约束多体系统的动力学响应要比在欧氏位形空间中更加有效, 但他犯了一些概念错误, 并推导了形式虽然相当简单但其实是错误的动力学响应公式. 本文正确解释了在黎曼位形空间中约束多体系统的动力学问题, 建立了正确并有吸引力的新型的动力学双基投影方程, 给出了求其动力学响应的一种简便方法, 并通过算例说明本文所提方法的有效性.

1 约束多体系统动力学在黎曼位形空间中的解释

设描述多体系统的 n 个绝对坐标为 $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$, 且系统受到 m 个独立定常的完整约束

$$\Phi(q) \equiv [\Phi_1(q) \ \Phi_2(q) \ \dots \ \Phi_m(q)]^T = 0 \quad (1)$$

则系统的速度约束方程为

$$J \dot{q} = \Phi_q \dot{q} = 0 \quad (2)$$

式中, $\Phi_q = \partial \Phi / \partial q$. 系统可以看成是一个广义质点在 n 维黎曼位形空间 R 中受流形(1)的约束而运动. 取 $e = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]^T$ 为 R 的一组协变基, 使该广义质点矢量可表为 $r = q^T e$, 称 q 为 r 在 e 下的逆变分量列阵. 系统的第一类形式的拉氏方程为

$$M(q) \ddot{q} = h(q, \dot{q}, t) + J^T(q) \lambda \quad (3)$$

式中, M 是 $n \times n$ 阶对称正定的广义质量矩阵, 它可以看成是基 e 的度量矩阵. 与 e 对应的逆变基为 $e^* = M^{-1}e$, 它的度量矩阵为 $M^* = M^{-1}$, 则 $\ddot{r} = \ddot{q}^T e = \ddot{q}^{*T} e^*$, 称 $\ddot{q}^*$ 为 $\ddot{r}$ 在 e^* 下的协变分量列阵. 于是 $-M\ddot{q}$ (即 $-\ddot{q}^*$), $h, J^T \lambda$ (λ 为系统的 m 个拉氏乘子组成的列阵) 分别为系统的广义达朗伯惯性力 $f_{\text{惯}}$, 广义主动力 $f_{\text{主}}$ 和广义约束反力 $f_{\text{约}}$ 在 e 下的逆变分量列阵, 即(3)式为系统广义达朗伯原理在 e 下的逆变分量表达式.

1996-03-18 收到第一稿, 1997-01-06 收到修改稿.

设 a, b 为 R 中任意两个矢量, 则它们的点积为

$$a \circ b = a^T M b = a^T b^* = a^{*T} M^{-1} b^* = a^{*T} b \quad (4)$$

a 的范数为 $|a| = \sqrt{a \circ a}$.

2 多体系统动力学一般形式的双基投影方程

引进 $C^* = J^T$, 则(2)式变为 $C^{*T} \dot{q} = 0$, 该式说明 r 与 $c_i = c_i^T e$ (c_i 为 C 的第 i 列, $C = M^{-1} C^*$, $i = 1, 2, \dots, m$) 的点积为零, 故可称 c_i 为系统的约束矢量, 因它们线性无关, 所以这 m 个矢量可张成流形(1)的法向子空间 N . 设系统的 $k = n - m$ 个独立速度所组成的列阵为 u , 则 $\dot{q}$ 可由 u 线性表示

$$\dot{q} = B u \quad (5)$$

式中, B 为 $n \times k$ 阶满列秩矩阵, 将它代入(2)式得

$$C^{*T} B = 0 \quad (6)$$

引进矢量 $b_j = b_j^T e$ (b_j 为 B 的第 j 列, $j = 1, 2, \dots, k$), 因它们线性无关, 故这 k 个矢量可张成流形(1)的切向子空间 T . 显然 B 确定方法很多且不唯一^[2~4].

于是 $e_c = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_m]^T$, $e_b = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_k]^T$ 为子空间 N 和 T 的一组协变基, 基 $e_{cb} = [e_c^T \ e_b^T]^T$ 组成了 R 的一组新的协变基, 满足 $e_{cb} = T^T e := [C \ B]^T e$, 基 e_{cb} 的度量矩阵为

$$M_{cb} = e_{cb} \circ e_{cb}^T = \begin{bmatrix} M_c & 0 \\ 0 & M_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T M C & 0 \\ 0 & B^T M B \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中, M_c , M_b 分别为 e_c 和 e_b 的度量矩阵.

将动力学方程(3)沿切向子空间 T 投影得

$$B^T M \ddot{q} = B^T h \quad (8)$$

将(5)式求一次导数后代入(8)式得

$$M_b \dot{u} = B^T (h - M \dot{B} u) \quad (9)$$

将动力学方程(3)先左乘 M^{-1} , 再沿法向子空间 N 投影得

$$M_c \lambda = C^{*T} \ddot{q} - C^{*T} M^{-1} h \quad (10)$$

对(2)式求一次导数得系统的加速度约束方程

$$C^{*T} \ddot{q} + \dot{C}^{*T} \dot{q} = 0 \quad (11)$$

将(11), (5)式代入(10)式得

$$M_c \lambda = -(\dot{C}^{*T} B u + C^T h) \quad (12)$$

(9), (12)式即为多体系统动力学一般形式的双基投影方程.

3 多体系统动力学标准形式的双基投影方程

根据奇异值分解原理^[4,5], 存在一个 $m \times m$ 阶正交矩阵 U^* 和一个 $n \times n$ 阶正交矩阵 V , 使得

$$C^{*T} = U^* S V^T \quad (13)$$

式中 $S = [\Sigma(0)_{m \times k}]$, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m > 0)$. 将 V 分块得

$$V = [(V_1)_{n \times m} (V_2)_{n \times k}] \quad (14)$$

(13) 式右乘 V , 将 (14) 式代入并由 V 的正交性得

$$C^{*T} V_2 = 0 \quad (15)$$

这说明 V_2 为约束矩阵 C 在黎曼空间中的正交补, 于是 (5) 式中的 B 可取为 V_2 .

引进 $P = [C V_2]$, 则 $p_i = p_i^T e$ (p_i 为 P 的第 i 列, $i = 1, 2, \dots, n$) 组成了 R 的一组协变基, 但一般不是 R 的正交归一化基. 现构造 W , 使 $w_i = w_i^T e$ (w_i 为 W 的第 i 列, $i = 1, 2, \dots, n$) 为 R 的一组正交归一化基 $\tilde{e}$, 其方法可对 Gram-Schmidt 过程公式^[2]进行以下修正

$$w_i = \alpha_i \left[p_i - \sum_{j=1}^{i-1} (w_j^0 p_i) w_j \right] \quad (16)$$

$$\alpha_i = 1 / \left\| p_i - \sum_{j=1}^{i-1} (w_j^0 p_i) w_j \right\| \quad (17)$$

于是基 $\tilde{e}$ 的度量矩阵为

$$\tilde{M} = \tilde{e}^0 \tilde{e}^T = W^T M W = I \quad (18)$$

式中 I 为 $n \times n$ 阶单位矩阵. 对 W 进行分块

$$W = [(W_1)_{n \times m} (W_2)_{n \times k}] \quad (19)$$

则 $\tilde{e}_c = W_1^T e$, $\tilde{e}_b = W_2^T e$ 分别为子空间 N 和 T 的一组正交归一化基, 它们的度量矩阵分别为

$$\tilde{M}_c = W_1^T M W_1 = (I)_{m \times m}, \quad \tilde{M}_b = W_2^T M W_2 = (I)_{k \times k} \quad (20)$$

因为 $u = u^T e_b = \tilde{u}^T \tilde{e}_b$, 于是 (5), (9) 式可写为

$$\dot{q} = W_2 \tilde{u} \quad (21)$$

$$\ddot{u} = W_2^T (h - M \ddot{W}_2 \tilde{u}) \quad (22)$$

由 (21) 式知 $\tilde{u} = W_2^T M \dot{q}$, 若初始时 $q_0, \dot{q}_0$ 满足约束方程 (1), (2), 则微分方程 (21), (22) 的初值条件为

$$q(0) = q_0, \quad \tilde{u}(0) = W_2^T M \dot{q}_0 \quad (23)$$

为求约束反力, 引进新的拉氏乘子列阵 $\tilde{\lambda}$, 使

$$W_1^* \tilde{\lambda} = C^* \lambda = J^T \lambda \quad (24)$$

则(12)式可写为

$$\lambda = -(\dot{W}_1^{*T} W_2 \tilde{u} + W_1^T h) \quad (25)$$

显然 $W_2^T W_1^* = 0$ 对它求一次导数后代入(25)式得

$$\lambda = -W_1^T (h - M \dot{W}_2 \tilde{u}) \quad (26)$$

(22), (26)式即为多体系统动力学标准形式的双基投影方程. 其中项 $h - M \dot{W}_2 \tilde{u}$ 可看成是系统的一种广义力, 将它沿切向子空间 T 的正交归一化基投影, 即得独立加速度(注意: 在正交归一化基时的度量矩阵, 即广义质量矩阵为单位矩阵); 将它沿法向子空间 N 的正交归一化基的反向投影, 即得反映约束反力的新的拉氏乘子. 方程的这种结构是欧氏位形空间中多体系统的双基投影方程^[6]所不具备的, 同时也证明 Blajer^[1]所推导的形式极其简单的动力学响应公式是错误的.

$\dot{W}_2$ 可由分析法求出^[11], 但运算非常繁琐, 下面给出求(22), (26)式中项 $\dot{W}_2 \tilde{u}$ 的一种简易方法.

对(21)式求一次导数得

$$\ddot{q} = \dot{W}_2 \tilde{u} + W_2 \dot{u} \quad (27)$$

显然当独立加速度 $\dot{u} = 0$ 时的 $\ddot{q}$ 即为 $\dot{W}_2 \tilde{u}$.

由于 C^{*T} 在运动过程中是变化的, 为减少奇异值分解次数, 节省运算时间, 可采取保持 V_2 不变, 直至 P 不满秩为止.

根据 V 的正交性, 由(5)式知 $u = V_2^T \dot{q}$, 对它求一次导数(注意 $\dot{V}_2 = 0$), 再联立(11)式, 并将 $\dot{u} = 0$ 和(21)式代入得

$$\begin{bmatrix} V_2^T \\ C^{*T} \end{bmatrix} \ddot{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{C}^T W_2 \tilde{u} \end{bmatrix} \quad (28)$$

对(28)式进行克劳特 LU 分解可求出 $\ddot{q}$, 即 $\dot{W}_2 \tilde{u}$.

4 算 例

图1表示一个铅垂平面内受理想约束的急回机构, 每个构件都为刚体, 其质量和对质心转动惯量见表1. 一个大小为 1 000.0 N·m 的力偶作用于杆3, 并使系统由图示位置从静止进入运动. 图2, 图3为其中一些计算结果(计算时取时间步长为 0.01 s), 并与文献[3]的算法算得结果符合很好, 且效率更高.

5 结 论

约束多体系统动力学在黎曼位形空间中标准形式的双基投影方程与欧氏位形空间中的相比, 不仅结构更规则, 而且物理含义更清晰. 文中所给的数值分析过程也比较简单. 由于在求解过程中只用到了速度和加速度约束方程, 为避免因坐标违约而造成数值分析的不必要中断, 需采用合适方法, 如改进形式的牛顿-拉福森迭代对违约进行修正^[6,7]. 实践证明, 本文所提出的算法是求解约束多体系统动力学问题的一种新型而且有效的方法.

表 1 构件的质量和对质心的转动惯量

Table 1 Masses and centroid moments of inertia for the components

rigid - body number	1	2	3	4	5	6
mass (kg)	1.0	1000.0	500.0	20.0	25.0	50.0
centroid moment of inertia (kg · m ²)	1.0	100.0	1000.0	5.0	8.0	10.0

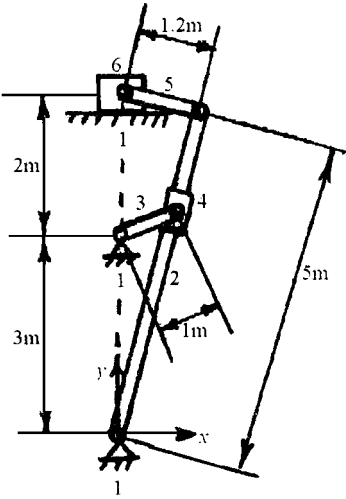


图 1 急回机构

Fig. 1 Quick - return mechanism

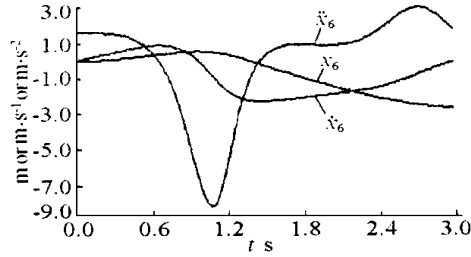


图 2 滑块 6 的位置、速度、加速度 - 时间曲线图

Fig. 2 Position , velocity and acceleration of the slider 6 versus time

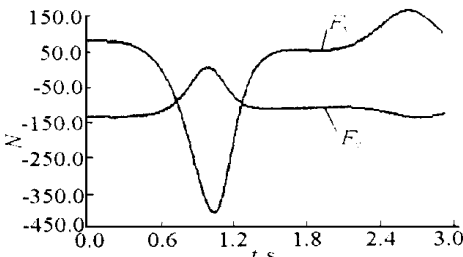


图 3 杆 5 对滑块 6 的约束反力 - 时间曲线图

Fig. 3 Constraint reaction forces of the rod 5 to the slider 6 versus time

参 考 文 献

1 Blajer W. An orthonormal tangent space method for constrained multibody systems. *Comput Methods Appl Mech Eng.* 1995, 121: 45 ~ 57

2 Liang CG, Lance GM. A differentiable null space method for constrained dynamic analysis. *J Mech Trans Auto Des*, 1987, 109: 405 ~ 411

3 水小平. 零空间在多体系统动力学中的应用. *北京理工大学学报*, 1991, 11 (3) : 12 ~ 17

4 水小平. 奇异值分解对非定常约束多体系统的动力学分析. *兵工学报*, 1994 (2) : 88 ~ 92

5 水小平. 多体系统动力学逆问题的一种处理方法. *应用力学学报*, 1995, 12 (2) : 83 ~ 86

6 水小平. 加速度分解对定常约束多体系统的动力学分析. *北京理工大学学报*, 1996, 16 (3) : 239 ~ 244

7 水小平, 张永发. 求解非定常非完整约束多体系统动力学的一种方法. *应用数学和力学*, 1996, 17 (6) : 551 ~ 557

DYNAMIC ANALYSIS OF CONSTRAINED MULTIBODY SYSTEMS IN RIEMANNIAN CONFIGURATION SPACE

Shui Xiaoping

(Department of Applied Mechanics , Beijing Institute of Technology , Beijing 100081 , China)

Abstract The dynamic problem of constrained multibody systems in Riemannian configuration space is researched. The orthonormal bases of normal subspace and tangent subspace of the system manifold are constructed adopting the singular value decomposition of the constraint matrix and a modified Gram - Schmidt process. The dynamic equations of the system are projected along the dual bases , and new formulas of the system dynamic response are obtained. A numerical analysis method is also given. A numerical example is presented.

Key words dynamics , multibody system , Riemannian configuration space , projection equation , numerical analysis

www.cnki.net