

Galerkin 边界元法用于弹塑性分析的 准高次元方法¹⁾

刘清

(北京自动测试技术研究所, 北京 100088)

岑章志 徐秉业

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘要 提出了一种适用于 Galerkin 边界元法的高次元插值方法和半解析半数值的积分方法-准高次元法,建立了有关数值模型和将该方法应用于结构弹塑性分析的算法模型.有关算例结果表明,本文建议的方法是切实可行的.

关键词 边界元法,弹塑性分析,数值模型

引 言

近几十年来, BIE-BEM 获得了很大进展,也得到了广泛的工程应用,成为有限元法的重要补充.边界元法的最大特点是它降低了求解问题的维数,同时由于它采用了基本解来描述真实状态的位移、应力和应变场,一般它的求解量有较高的精度,因而可以说边界元法有精度较高和计算量小的特点.但是,必须考虑到边界元法最后形成的求解矩阵为非对称满阵,对其矩阵分析求解的计算量是非常大的,特别是在采用高度协调的边界元时所涉及的积分运算量尤为如此.在这种背景下,一些学者进行了产生对称矩阵的边界元法的探索,最初见诸发表的是 1979 年 Sirtori 的工作^[1],加之后来 Costabile 和 Wendland 的工作^[2,3]和 Maier, Polizzoto 及 Novati 的工作^[4~6]构成了用 Galerkin 边界元法处理弹塑性分析问题的基本思路.中国学者余德浩在 80 年代进行了‘自然边界元法’方面的探索^[10],该方法对于规则边界结构分析可以产生一个二重积分的、可以进行解析计算的边界积分方程,因此降低了边界元法的求解难度,同时提高了数值结果的精度.

Galerkin 边界元法可以得出一个对称的方程系数矩阵,这对方程求解和结构力学性态分析都提供了很大方便.但是, Galerkin 边界元法需要一个二重积分才能求得系数矩阵,给单元划分和方程系数矩阵的建立带来了巨大困难, Sirtori 和 Maier 等人利用复变函数方法对位移的线性元及面力和应力的常数元找到了相关的解析积分表达式,这解决了二重积分所带来的困难,为 Galerkin 边界元法理论确立了一条成功的算法.理论分析与数值实例表明,这一算法无论从计算时间上和计算精度上,在求解大部分二维问题时都不逊于传统边界元法.但是,该算法在结构与加载方式的适应性方面也存在着很多缺陷,这给 Galerkin 边界元法的推广发展与工程应用都带来了很大困难,划分单元的工作也比较麻烦,无形中降低了这一算法的实用性.本文建议了一种二重插值的算法,又可称为‘准高次元法’,即在初始插值时采用高次元格式对结构和位移、面

¹⁾国家自然科学基金资助项目.

1996-02-14 收到第一稿, 1997-02-02 收到修改稿.

力及应力进行描述,而在进行数值积分时则要进一步对单元进行细化,然后在细化的单元中进行位移线性插值和面力、应力的常数插值,利用积分中值定理对高次插值函数取积分中值,而对核函数继续采用解析积分.本文介绍二重插值方法的一些基本公式和它在弹塑性分析问题上的应用.

1 Galerkin 边界元法中的二重插值与积分技术

对称型 Galerkin 边界元法用于求解弹塑性分析问题的基本公式是基于如下的 Betti 功互等定理

$$\int [p^*(x)]^T u(x) dx - \int [u^*(x)]^T p(x) dx + \int [\epsilon^*(x)]^T \sigma(x) dx = \int [\epsilon^*(x)]^T \sigma(x) dx \quad (1)$$

其中 u, p 表示位移和面力, ϵ, σ 表示应变和应力. Ω 表示求解问题的区域, Γ 表示这个区域的边界. 真实场和虚拟场各量分别用不带 * 和带 * 区别. 虚拟状态的位移、面力和应力可表示如下

$$\left. \begin{aligned} u^*(x) / x &= G_{uu} F^* d + G_{up} D^* d + G_u^* d \\ p^*(x) / tk &= G_{pu} F^* d + G_{pp} D^* d + G_p^* d \\ \epsilon^*(x) / x &= G_{\epsilon u} F^* d + G_{\epsilon p} D^* d + G_{\epsilon}^* d \end{aligned} \right\} \quad 36 \text{ 程应}$$

】 } }

$$= [\quad (x)]^T \quad (x) d \quad \cdot \quad (9)$$

分离边界未知量和已知量并重组方程,可以得到代数方程,其后将有成熟的算法加以处理. 所以关键是如何通过插值格式与积分建立这一方程,迄今为止,只有位移线性元和面力及应力的常数元可以在令人满意的计算速度和精度前提下解析进行上述积分. 高次元单元由于无法进行解析积分,因而在 Galerkin 边界元法中无法应用. 寻找一种积分方案以使 Galerkin 边界元法在高次元意义下得以应用,这一工作具有重要的理论意义和实用价值. 我们注意到, (3), (4) 式没有对插值函数的具体格式提出任何特殊要求,只要满足 (6) 式对 (3), (4) 式中的插值函数采用相同的公式的要求和其它离散插值的一般要求就可以了,在后面的讨论中本文只涉及 (3) 式和 (5) 式的插值问题. 如果采用高次元单元进行离散插值,我们将得到一个高次元单元的边界元方程. 如果边界高次元单元共有 I 个节点,其中在 J 个节点上面力不连续;在区域内部共有 K 个节点,此时, (3), (5) 两式中各列向量可表示为

$$U^T = \{ U_1, \dots, U_m, \dots, U_I \}, \quad P^T = \{ P_1, \dots, P_m, \dots, P_{I+J} \} \quad (10a, b)$$

$${}^T = \{ \quad 1, \dots, \quad m, \dots, \quad K \}, \quad {}^T = \{ \quad 1, \dots, \quad m, \dots, \quad K \} \quad (11a, b)$$

插值函数可表示为

$$u(x) = \{ \quad u_1(x) \dots \quad u_m(x) \dots \quad u_I(x) \} \quad (12)$$

$$p(x) = \{ \quad p_1(x) \dots \quad p_m(x) \dots \quad p_{(I+J)}(x) \} \quad (13)$$

$$(x) = \{ \quad 1(x) \dots \quad m(x) \dots, \quad K(x) \} \quad (14)$$

$$(x) = \{ \quad 1(x) \dots \quad m(x) \dots \quad K(x) \} \quad (15)$$

其中

$${}_{hm}(x) = \begin{bmatrix} {}^1_{hm}(x) & 0 \\ 0 & {}^2_{hm}(x) \end{bmatrix}, \quad h = u, p \quad (16a)$$

或

$${}_{hm}(x) = \begin{bmatrix} {}^1_{hm}(x) & 0 & 0 \\ 0 & {}^2_{hm}(x) & 0 \\ 0 & 0 & {}^3_{hm}(x) \end{bmatrix}, \quad h = \quad, \quad (16b)$$

由于我们采用的是高次元单元插值, (8), (9) 两式的积分是很难计算的,必须进一步进行离散,从而使该积分变为便于计算的形式. 现将前面划分的高次元单元进一步划分成一些子单元,这些子单元采用低次元格式(常数元和线性元),这样 (12) ~ (15) 式中连续的插值函数被离散化了,为了能够进行解析积分,这里位移的初次插值函数采用线性单元插值. 面力、应力和应变的初次插值函数采用常数元插值,并设各二重插值函数分别具有 N_h ($h = u, p, \dots$) 个插值点. (16) 式左边的插值函数可以写成

$${}_{hm}(\quad) = \Phi_{hm}(\quad) \quad {}_{hm}, \quad h = u, p, \dots, \quad (17)$$

$\phi_{hm}(\cdot)$ 和 ϕ_h 分别为二重插值函数和初次插值函数在子节点上的值. 根据积分中值定理, (8), (9) 两式积分的近似表达式为

$$G_{hk} = \int_{\Omega} [\phi_h(\cdot)]^T [\phi_h(x)]^T G_{hk}(x, \cdot) \phi_k(\cdot) \mathbf{d}x \mathbf{d} \cdot \quad h, k = u, p, ; \quad h, k = p, u, \quad (18)$$

$$= \int_{\Omega} [J]^T [\phi(x)]^T \phi(x) \mathbf{d} \cdot \quad (19)$$

其中

$$h = \{ h_1, \dots, h_m, \dots, h_{N_h} \} \quad (20)$$

$$\phi_h(x) = \{ \phi_{h_1}(x), \dots, \phi_{h_m}(x), \dots, \phi_{h_{N_h}}(x) \} \quad (21)$$

将积分代入(7)式并经过整理, 我们可以得到一组求解方程, 经过处理将它们写成增量形式

$$[(B^T A^{-1} q + \bar{q}) + (C + B^T A^{-1} B)] J = \quad (22)$$

其中 J 为载荷增量因子. 这是一组非线性方程, 需要依据本构关系来求解. 此后, 就可以进行迭代求解了.

2 数值迭代方案

首先, 应力增量、位移增量和塑性应变增量应该满足(22)式及

$$f(\cdot) \leq Y(\cdot) \quad (23)$$

其中 f 为塑性应变内变量. 塑性应变增量还应该满足正交流动法则

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{\partial \phi(\cdot)}{\partial \cdot} \cdot \quad (24)$$

这是一组非线性方程, 必须通过迭代求解. 关于加载面外法线方向求解的描述, 请参阅文献[11, 12].

由此可以归纳求解步骤如下:

- 1) 一次生成全部求解矩阵并处理成(22)式的形式.
- 2) 按加载控制方案进行变量置换.
- 3) 在当前加载步上计算外载引起的应力增量, 并计算应变增量和它超出加载面的部分.
- 4) 计算弹性和塑性应变增量.
- 5) 视 (ϵ_p) 为初始预应变, 修正(22)式的应力增量.
- 6) 收敛判定, 如果 $\max(|\epsilon_p - \epsilon_{p-1}|) / \max(\epsilon_p) \leq \text{lerance}$ 转到 7), 否则转到 4) 重复迭代.
- 7) 开始一个新的加载步 3), 或者结束运算, 输出结果.

3 数值实例与结论

基于以上算法, 作者编制了用于 Galerkin 边界元法计算的“准高次元”计算程序, 并计算了两个经典算例以验证该程序的实用性. 现分别描述如下:

- 1) 纯弯曲方板的弹塑性分析. $E = 2000\text{MPa}$, $\nu = 0.001$, 方板边长 $A = 10\text{cm}$, $\sigma_s = 10\text{MPa}$. 分别用准高次元和低次元进行离散插值, 准高次元共划分 8 个单元 23 个节点, 低次元共划分 72 个单元 49 个节点, 两种网格下的弹塑性分析均采用位移加载, 载荷增量步长为弹性极



限的 10%。图 1 给出了位移达到屈服极限状态的 190%时的两种结果比较。

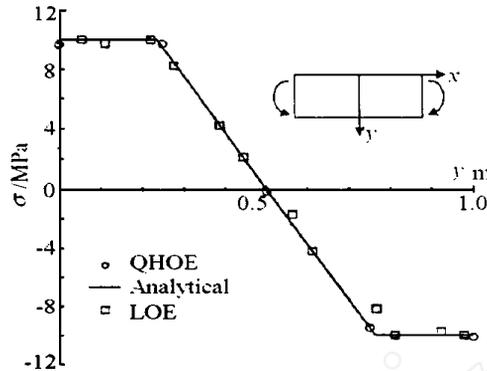


图 1 纯弯曲方板计算结果比较

Fig. 1 Numerical results for pure bending problem

2) 厚壁筒弹塑性分析. 内径 $a = 10\text{cm}$, 外径 $b = 20\text{cm}$, $E = 10\text{GPa}$, $\nu = 0.3$, $\sigma_s = 20\text{MPa}$. 我们分别使用准高次元和低次元法进行了两组计算, 并分别同解析解进行了比较. 对于准高次元, 内压 $q = 10.951\text{MPa}$, 共划分 24 个单元 63 个节点. 计算结果见图 2. 对于低次元, 内压 $q = 9.5\text{MPa}$, 共划分 128 个单元 81 个节点, 计算结果见图 3. 结果表明, 准高次元法在处理结构弹塑性分析方面的效率和精度都优于低次元法.

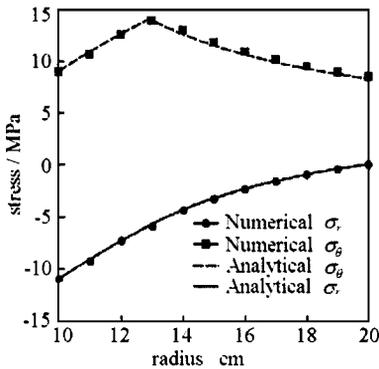


图 2 准高次元厚壁筒弹塑性分析
Fig. 2 Numerical results for pure bending problem by QHOE

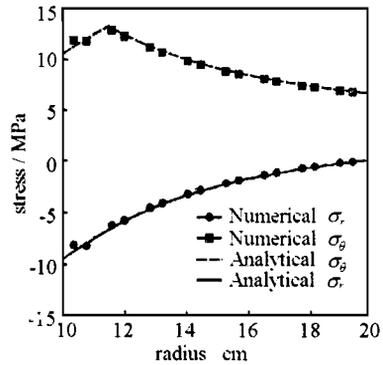


图 3 低次元厚壁筒弹塑性分析
Fig. 3 Numerical results for pure bending problem by LOE

由以上分析和数值实例, 我们可以得出下列结论: (1) 本文建议的准高次元法解决了现有 Galerkin 边界元法只能使用低次元的问题, 因此大大增加了该方法的应用范围. (2) 由于在使用准高次元法时所采用的二重插值在本质上是使用低次元进行解析积分, 因而从积分工作量角度看, 准高次元法同低次元法的差别很小; 但是在数据准备工作量及方程求解的非线性迭代工作量方面看, 准高次元法远远优于低次元法. (3) 由于准高次元法对结构边界的插值也使用高次元插值, 因而该算法对结构的适应性大大提高, 对于一些很难用低次元法求解的复杂结构或复杂载荷形式, 都可以用准高次元法求解. (4) 准高次元法在本质上是一种半解析半数值的积分处理技术, 在除插值函数处理和数值积分以外的其它基本公式方面与低元次的 Galerkin 边界元法相同.

参 考 文 献

- 1 Sirtori S. General stress analysis method by means of integral equations and boundary elements, *Meccanica*, 1979, (14): 210 ~ 218
- 2 Costable M. Symmetric methods for the coupling of finite elements and boundary elements. in: Brebbia CA, Wendland WL and Kuhn G. eds. *Boundary Elements IX*, Vol. 1. Berlin: Springer - Verlag, 1987, 411 ~ 420
- 3 Wendland WL. Strongly elliptic boundary integral equations. in: Iserles A. and Powel M. eds. *The State of the Art in Numerical Analysis*. Oxford: Oxford University Press, 1987, 511 ~ 562
- 4 Maier G, Polizzotto C. A Galerkin approach to boundary element elastoplastic analysis. *Comp Meth Appl Mech Engng*, 1987, 60: 175 ~ 194
- 5 Polizzotto C. An energy approach to the boundary element method, Part I: Elastic Solids, Part II: Elastoplastic Solids. *Comp Meth Appl Mech Engng*, 1988, 69: 167 ~ 184, 263 ~ 267
- 6 Maier G, Novati G, Sirtori S. Symmetric formulation of indirect boundary element method for elastic - plastic analysis and relevant extremum properties. in: Tanaka M, Cruse TA, eds. *Boundary Element Methods in Applied Mechanics*, Japan - USA Symp on Boundary Element Methods. Oxford: Pergamon Press, 1989, 215 ~ 224
- 7 Maier G, Novati G, Cen Z. Symmetric Galerkin boundary element method for frictional contact and brittle fracture problems. *Computational Mechanics*, 1993, 13: 74 ~ 89
- 8 Sirtori S, Maier G, Novati G, Miccoli S. A Galerkin symmetric boundary - element method in elasticity: Formulation and implementation. *Int J Num Meth Engng*, 1992, 35: 255 ~ 282
- 9 Maier G, Novati G, Sirtori S. On symmetrization in boundary element elastic and elastic - plastic analysis. in: Kuhn G. and Mang H. eds. *Discretization Method in Structural Mechanics*, IU TAM/ IACM Symposium, Vienna, Austria, 1989
- 10 余德浩. 自然边界元法的数学理论. 北京: 科学出版社, 1992
- 11 刘清, 岑章志. Galerkin 对称型边界元法及其在软化分析中的应用. *工程力学*, 1994(增刊): 283 ~ 286
- 12 刘清, 岑章志. 软化分析中的 Galerkin 边界元法, 第四届全国工程中的边界元法会议论文集. 杜庆华主编, 南京: 河海大学出版社, 1994. 22 ~ 26

QUASI - HIGH ORDER GALERKIN BEM FOR ELASTO - PLASTIC ANALYSIS

Liu Qingjun Cen Zhangzhi* Xu Bingye*

(Beijing Institute of Automatic Test, Beijing 100088, China)

* (Dept. of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract A two - stage interpolation Galerkin boundary element method called the Quasi - High Order Element Method (QHOEM) is proposed for solving elastoplastic problems. In the initial stage, it uses high order elements to interpolate the coordinates and the variables. For the numerical integration involved, it further uses interpolation to decompose the high order elements into low order elements so that the existing analytical integration formulas can be applied. By doing this, the proposed method yields good adaptability and reduces the computational cost. Numerical examples are given to demonstrate the efficiency of the method.

Key words boundary element method, softening analysis, quasi - high order element method