

# 发电机组转子轴系扭振模化系统的三重共振<sup>1)</sup>

邱家俊 杨志安

(天津大学力学与工程测试系, 天津 300072)

**摘要** 建立了发电机组转子轴系扭振模化系统的数学模型, 此模型具有平方非线性并受简谐激励作用. 研究了系统的固有频率存在双重内共振关系  $\omega_3 = 2\omega_2, \omega_2 = 2\omega_1$  且  $\omega_2$  时的三重共振问题. 文中应用非线性振动的改进平均法, 求得了系统三重共振的一次近似解, 对三重共振的定常解进行了理论分析和数值计算, 并进行了奇异性分析, 文中指出三重共振解具有双饱和特性, 对二种主要的理论分析和数值计算结果进行了实验验证, 实验结果与理论结果相符.

**关键词** 发电机组转子轴系扭振, 三重共振, 内共振, 奇异性理论, 改进平均法

## 引 言

在多自由度非线性振动系统中, 当对应的线性系统的固有频率  $\omega_i$  之间或固有频率  $\omega_i$  与外激励频率  $\omega$  之间满足下述关系

$$M_1^{(L)} \omega_1 + M_2^{(L)} \omega_2 + \dots + M_Q^{(L)} \omega_Q + N_1^{(L)} \omega_1 + N_2^{(L)} \omega_2 + \dots + N_P^{(L)} \omega_P = 0, \quad L = 1, 2, \dots, R$$
系统会发生多重共振<sup>[1~3]</sup>, 上式中共振关系包括  $R$  个线性代数方程. 式中  $M_1^{(L)}, M_2^{(L)}, \dots, M_Q^{(L)}, N_1^{(L)}, N_2^{(L)}, \dots, N_P^{(L)}$  均为整数.

汽轮发电机组轴系的扭转振动系统具有多个固有频率并受多个频率的电磁力(矩)的作用, 当轴系的扭振的固有频率之间或固有频率与干扰力(矩)频率之间满足多个线性组和关系时, 就会激发机组轴系的一个或几个振型的扭振响应, 发生多重共振.

随着人们对非线性理论认识的深入, 多重共振的分析方法已逐渐为人们所重视, 应用多重共振的理论方法已得到了新的振动规律, 澄清了一些重大事故的机理<sup>[5]</sup>.

国产某型号 200 MW 汽轮发电机组转子轴系扭振的前 6 阶固有频率有  $\bar{\omega}_6 = 2\bar{\omega}_4, \bar{\omega}_4 = 2\bar{\omega}_2$  的内共振关系<sup>[1]</sup>, 而  $\bar{\omega}_4$  又与工频 50 Hz 接近, 存在发生多重共振的条件, 有必要对其进行深入研究. 利用本文建立的发电机组转子轴系扭振模化系统, 按照频率类比关系, 我们研究模化系统当  $\omega_3 = 2\omega_2, \omega_2 = 2\omega_1$  且  $\omega_2$  时的三重共振问题, 为发电机组的设计及控制三重共振的发生提供依据.

## 1 数学模型与扭振方程组的解

国产 200 MW 汽轮发电机组转子轴系模化后, 由发电机转子、低压缸、中压缸、高压缸 4 部分组成, 用 4 个集中质量来代替<sup>[5]</sup>, 用  $I_i (i=1, 2, 3, 4)$  表示第  $i$  个集中质量的转动惯量,  $\phi_i (i=1, 2, 3, 4)$  表示第  $i$  个集中质量的旋转角和扭振角之和, 即  $\phi_i = \theta + \psi_i$ , 其中  $\theta$  是转子轴系转动的

<sup>1)</sup>国家自然科学基金资助项目.

1996-07-15 收到第一稿, 1997-04-21 收到修改稿.

角速度,  $\dot{\phi}_i (i = 1, 2, 3, 4)$  表示第  $i$  个集中质量的扭振角,  $K_{ij}, \mu_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4)$  表示第  $ij$  段之间的线性扭转刚度和机械阻尼系数, 在发电机转子与低压缸之间的联接部件是专门设计加工的非线性元件, 用  $k$  代表非线性元件的平方非线性刚度, 它表示实际机组的联轴结与电磁等非线性因素,  $F \cos t$  为外部简谐激励, 用来模拟发电机组实际运行时不平衡电磁力(矩)等对轴系的作用. 求出系统的动能  $T$ , 势能  $V$  和耗散函数  $R$ , 引入 Lagrange 函数  $L = T - V$ , 代入 Lagrange 方程, 并在阻尼力, 外部干扰力, 弹性力的非线性部分前冠以小参数  $\epsilon$ , 得

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\phi}_1 + K_{12}(\phi_1 - \phi_2) + k(\phi_1 - \phi_2)^2 + \mu_{12}(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) &= 0 \\ I_2 \ddot{\phi}_2 - K_{12}(\phi_1 - \phi_2) + K_{23}(\phi_2 - \phi_3) - k(\phi_1 - \phi_2)^2 - \\ &\quad \mu_{12}(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) + \mu_{23}(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_3) = F \cos t \\ I_3 \ddot{\phi}_3 - K_{23}(\phi_2 - \phi_3) + K_{34}(\phi_3 - \phi_4) - \mu_{23}(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_3) + \mu_{34}(\dot{\phi}_3 - \dot{\phi}_4) &= 0 \\ I_4 \ddot{\phi}_4 - K_{34}(\phi_3 - \phi_4) - \mu_{34}(\dot{\phi}_3 - \dot{\phi}_4) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

(2)

方程组(2)为发电机组转子轴系模化系统的扭振方程, 它是二阶非线性常微分方程组.

下面分析当模化系统的固有频率与外激励频率之间满足  $\omega_3 \approx 2\omega_2, \omega_2 \approx 2\omega_1$  且  $\omega_2$  时的三重共振问题, 引入内共振调谐值  $\sigma_2, \sigma_3$  和主共振调谐值  $\sigma_1$ , 则三重共振关系可表示为下式

$$\omega_2 = 2\omega_1 + \sigma_2, \quad \omega_3 = 2\omega_2 + \sigma_3, \quad \omega = \omega_2 + \sigma_1 \quad (3)$$

由非线性系统多重共振的改进平均法<sup>[5]</sup>, 得三重共振的一次近似解

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dy_1}{dt} &= -\mu_1 y_1 + y_1 y_2 \sin \alpha_1 \\
 \frac{dy_2}{dt} &= -\mu_2 y_2 - y_1^2 \sin \alpha_1 + y_2 y_3 \sin \alpha_2 + f_2 \sin \alpha_3 \\
 \frac{dy_3}{dt} &= -\mu_3 y_3 - y_2^2 \sin \alpha_2 \\
 y_1 \frac{dv_1}{dt} &= -y_1 y_2 \cos \alpha_1 \\
 y_2 \frac{dv_2}{dt} &= -y_1^2 \cos \alpha_1 - y_2 y_3 \cos \alpha_2 - f_2 \cos \alpha_3 \\
 y_3 \frac{dv_3}{dt} &= -y_2^2 \cos \alpha_2
 \end{aligned} \right\}$$

(7)

确定三重共振定常解的方程组(7)是非线性超越代数方程组,经过数学变换,消去  $v_i$ , 得到两种情况的解:

情况 1)

$$\left. \begin{aligned}
 y_3^3 + \frac{2 T_1}{3^4} (\mu_2 \mu_3 - \alpha_2 \alpha_3) y_3^2 + \frac{(\mu_2^2 + \alpha_2^2)}{3} y_3 - \frac{T_1 f_2^2}{3} &= 0 \\
 y_2 &= (y_1 / T_1)^{1/2} \\
 y_1 &= 0
 \end{aligned} \right\}$$

情况 2)

三重

常解

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= (\mu_1^2 + \frac{2}{1})^{1/2} / 1 \\ y_3 &= \left( \frac{\frac{2}{4} \frac{4}{2}}{\mu_3^2 - \frac{2}{3}} \right)^{1/2} = \frac{4}{1} \frac{\mu_1^2 + \frac{2}{1}}{(\mu_3^2 + \frac{2}{3})^{1/2}} \end{aligned} \right\}$$

www.cnki.net

}

d) 转迁集

$$\sum(Z_2) = B_0(Z_2) \quad B_1(Z_2) \quad H_0(Z_2) \quad H_1(Z_2) \quad D(Z_2)$$

图 1 为方程  $y_1^5 + {}^2y_1 + {}_1y_1 + {}_2y_1^3 = 0$  的转迁集和分岔图. 转迁集将  $\beta$  -  $\alpha$  平面分成 4 个区域, 在每个区域上的分岔图称为保持的, 在转迁集上的分岔图称为非保持的, 通过调解系统的力学参数  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda$ , 可以得到开折平面上的 4 种分岔模式, 对于区域 (1), 分岔响应方程只有零解, 此区域为控制三重共振的发生提供了理论依据.

由(10a)式可知, 对于三重共振解, 直接受激的  $y_2$  和未直接受激的  $y_3$  与外激励的幅值无关, 称其为具有双饱和特性. 当  $y_2$  和  $y_3$  饱和时, 对应的外部输入能量通过内共振途径传给  $y_1$ , 使  $y_1$  增大.

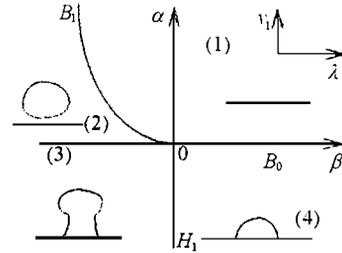


图 1 方程  $y_1^5 + {}^2y_1 + {}_1y_1 + {}_2y_1^3 = 0$  的转迁集和分岔图

Fig. 1 Transition variety and bifurcation diagram of equation  $y_1^5 + {}^2y_1 + {}_1y_1 + {}_2y_1^3 = 0$

## 2 结果对比分析

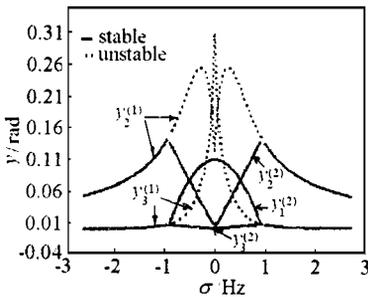


图 2 频响曲线  $f_2 = 3n \cdot m$ ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Fig. 2 Frequency-response curves,

$$f_2 = 3n \cdot m, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

上只有稳定的  $y_2^{(1)}$ ,  $y_3^{(1)}$ , 图中, 实线表示稳定解, 虚线表示不稳定解.

为了便于与实验结果比较, 应用  $\alpha_i$  与  $\beta_i$  的关系式, 可求得关于  $\alpha_i$  的响应曲线. 图 3 是关于  $\alpha_i$  的频响应曲线, 图中只画出稳定的部分, 在 12.8 Hz ~ 14.8 Hz 区间上对应三重共振第(2)种情况的解, 在其余区间上对应三重共振第(1)种情况的解. 图 4 激励频率  $\alpha = 14.2$  Hz, 幅响曲线对应三重共振第(2)种情况的解.

发电机组转子轴系扭振模化系统实验测试装置简图参见文献[5], 实验时, 首先保持小的激励力幅, 应用共振法检测系统的固有频率, 调节集中质量间联结弹簧的刚度, 测得系统的三阶固有频率为  $\alpha_1 = 6.9$  Hz,  $\alpha_2 = 13.8$  Hz,  $\alpha_3 = 27.6$  Hz, 满足  $\alpha_3 \approx 2\alpha_2$ ,  $\alpha_2 \approx 2\alpha_1$  的双重内共振关系, 便可以进行响应曲线的实验. 下面是针对二种主要参数响应曲线的实验结果.

利用(8), (10a), (10b)式可以确定三重共振定常解. 图 2 是三重共振的频响曲线. 图中  $y_i^{(1)}$  ( $i = 2, 3$ ) 的上角标‘(1)’代表三重共振第(1)种情况的解,  $y_j^{(2)}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) 的上角标‘(2)’代表三重共振第(2)种情况的解. 由图可知, 三重共振的频响曲线由两种形式的解组成, 其中  $y_1^{(2)}$ ,  $y_2^{(2)}$ ,  $y_3^{(2)}$  的拓扑结构各不相同,  $y_1^{(2)}$  的拓扑结构与图 1 中区域(4)上的分岔曲线结构相同; 当  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$  时, 频响曲线左右对称. 由图 2 可知, 三重共振定常解在 -1.0 Hz ~ 1.0 Hz 区间上由稳定的  $y_1^{(2)}$ ,  $y_2^{(2)}$ ,  $y_3^{(2)}$  和不稳定  $y_2^{(1)}$ ,  $y_3^{(1)}$  组成, 在其余区间

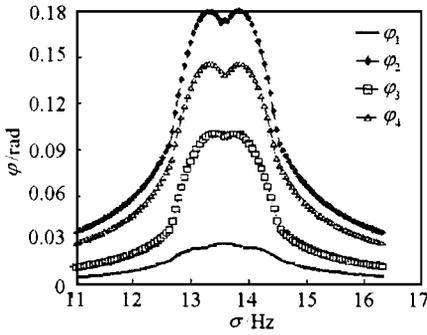


图3 关于  $\phi_i$  频响曲线  
 $f_2 = 3n \cdot m, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0$   
 Fig.3 Frequency - response curves of  $\phi_i$ ,  
 $f_2 = 3n \cdot m, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

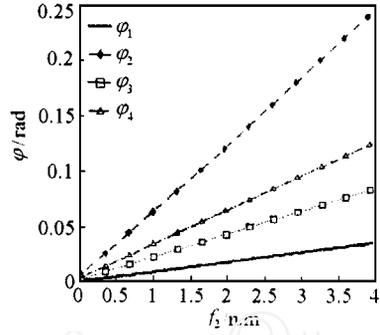


图4 关于  $\phi_i$  频响曲线  
 $f_2 = 14.2 \text{ Hz}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0$   
 Fig.4 Force - response curves, of  $\phi_i$ ,  
 $f_2 = 14.2 \text{ Hz}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

图5为激励频率由11.0 Hz~17.0 Hz实验测得的四条频响曲线,所取参数与图3对应,比较两图可见,理论结果和实验结果在定性和定量上均吻合得较好.在12.8 Hz~14.8 Hz区间上对应三重共振第(2)种情况的解,在其余区间上对应三重共振第(1)种情况的解.通过对振动信号的FFT分析发现,在11.0 Hz~12.8 Hz及14.8 Hz~17.0 Hz区间上,均存在与二,三阶固有频率对应的明显峰值,这两个区间上的频响曲线对应三重共振第(1)种情况的解,在12.8 Hz~14.8 Hz之间,FFT分析结果表明,在靠近第一,二,三阶固有频率处有三个明显的峰值,此区间上的频响曲线对应三重共振第(2)种情况的解.

图6为实验测得的响应做为激励力幅函数三重共振的幅响曲线,所取参数与理论曲线图4相同.图6中,激励频率  $f_2 = 14.2 \text{ Hz}$ ,测得的幅响曲线对应三重共振第(2)种情况的解.实验结果与理论结果一致.

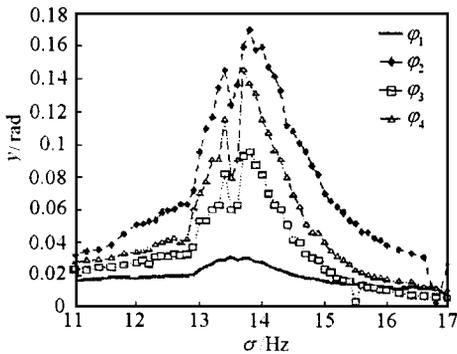


图5 实测频响曲线,  $f_2 = 3n \cdot m, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0$   
 Fig.5 Frequency - response curves obtained experimentally,  $f_2 = 3n \cdot m, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

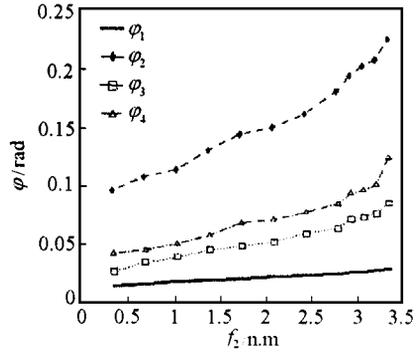


图6 实测幅响曲线,  $f_2 = 14.2 \text{ Hz}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0$   
 Fig.6 Force - response curves obtained experimentally,  $f_2 = 14.2 \text{ Hz}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

### 3 结论

- 1) 模化系统三重共振的响应曲线由两种形式的解组成,三重共振解具有双饱和特性.
- 2) 应用奇异性理论,求得了三重共振响应曲线方程的转迁集和分岔图,上述结论对控制三重

共振具有理论意义.

3) 对二种主要的响应曲线进行了实验研究,证明了文中三重共振的定常响应由两种形式的解组成.

4) 发电机组轴系在进行动态设计时,除需考虑各阶临界转速要避开工作转速外,还要避免各阶临界转速之间以及各阶临界转速与工作转速之间发生共振.

本文的模型具有实际工程背景,所得结论对旋转机械特别是大型发电机组具有应用价值.

### 参 考 文 献

- 1 邱家俊,杨志安. 发电机并网不对称运行转子轴系扭振的双重共振. 全国第四次转子动力学会议论文集,西安, 1995 - 09: 40 ~ 45
- 2 Nayfeh AH, Mook DT. Nonlinear Oscillation. Wiley - interscience, New York, 1979
- 3 邱家俊. 弹性体非线性振动多重共振的能量法. 力学学报, 1990, 22(6): 753 ~ 758
- 4 Golubisky M, Schaeffer DG. Singularities and groups in bifurcation theory. Vol. 1, Springer - velag, New York, 1985
- 5 杨志安. 发电机组轴系扭振多重共振及电磁激发横扭耦合振动研究. 天津大学博士学位论文, 1997 - 01

## TRIPLE RESONANCES OF TORSIONAL VIBRATION OF A SHAFTING SYSTEM SIMULATING A GENERATOR SET ROTOR

Qiu Jiajun Yang Zhian

( Dept. of Mechanics & Engineering Measurements, Tianjin University, Tianjin 300072, China )

**Abstract** A mathematical model of torsional vibration of the shafting system which has quadratic nonlinearities and harmonic excitation is established. By using of the improved averaging method for nonlinear oscillation, under the conditions  $\sigma_3 = 2\sigma_2$ ,  $\sigma_2 = 2\sigma_1$ , and  $\sigma_2$ , the first approximation solution and its corresponding steady - state solution of the triple resonances are obtained. The steady - state response curves are obtained and the singularity analysis is carried out. It is pointed out that the triple resonances has abundant dynamic phenomena including the double saturation phenomenon. Two kinds of main response curves are confirmed experimentally. The results of theoretical analysis are shown to be in good agreement with experimental results.

**Key words** torsional vibration of a generator set rotor; triple resonances, internal resonance, singularity theory, improved averaging method