第 29 卷 第 6 期 力 学 学 报 Vol. 29, No. 6
1997 年 11 月 ACTA MECHANICA SINICA Sept., 1997

利用松质骨理想化模型对骨小梁刚度的研究[1)]

张 宁 樊学军
(太原工业大学应用力学研究所, 太原 030024)

摘要 利用结构张量的概念建立了考虑松质骨结构各向异性的理想模型, 将杆型与板型两种传统模型统一起来. 采用均匀化理论, 通过有限单元的数值计算建立了松质骨弹性常数与结构张量、固体体积比之间的数值关系, 并预测了骨小梁的弹性模量. 结果表明, 本文模型较好地体现了松质骨的各向异性力学性质. 对骨小梁的计算结果表明, 骨小梁的弹性模量在 6.76 GPa～10.9 GPa 范围内, 平均意义上的结果是 9.21 GPa.

关键词 骨小梁, 结构张量, 各向异性, 均匀化理论

引 言

松质骨是一种多孔材料, 结构具有非均匀性和各向异性. 这给其形态学及力学性质的研究带来很大困难. 一方面, 通过实验得到的松质骨试件的刚度和强度的数据相当分散; 另一方面, 传统的骨力学理论主要集中于骨的宏观尺度, 将松质骨近似看做连续介质. 仅用表观密度作为参数, 虽能得出对松质骨力学性质的合理预测[1], 但这种方法不能解释松质骨的各向异性性质, 也不能考虑微结构的影响.

为了了解骨组织的生理功能, 分析骨组织在力学环境下的自适应现象, 全面地掌握松质骨的力学性质是必须的. 因此, 以细观力学的方法研究松质骨微结构的影响成为目前的热点. 特征胞元 (RVE) 方法常被用来描述松质骨组织的结构[2～4]. 这种方法以材料的特征胞元为研究对象, 并在胞元层次上人为地假设简单的力或位移边界条件, 得出的结果是实际刚度的上界或下界. 均匀化理论 (homogenization theory) 吸收了特征胞元法的思想, 以渐近分析方法推导出微结构与宏观力学量间的关系[5,6], 不必对胞元预先假设边界条件, 从而避免了人为加入的边界条件对所求问题的影响, 可得到独立于载荷和位移边界条件的理论解.

在松质骨中, 结构的各向异性即不同方向上骨小梁的排列数量将影响松质骨的宏观力学性质. 描述松质骨各向异性性质的方法首先由 Whitehouse[7]提出, 随后 Harrigan 和 Mann[8]引入了立体估量法, 并且定义了平均截断长度 (mean intercept length, 缩写 MIL) 张量. 现在平均截断长度的概念已被用来预测松质骨的力学性质, 这其中既有 Cowin[9]提出的高度理论化的方法, 又有纯粹实验意义上的方法[10].

另外, 骨小梁的力学性质也是影响松质骨力学性质的一个因素. 由于骨小梁试件的几何尺寸微小, 使实验方法和微试件的加工工艺对结果产生很大影响, 实验数据相当分散. Wolff[11]最早提出了骨小梁与密质骨力学性质相同的假设, Carter 和 Hayes[1]间接地支持这一观点, 他们认为密质骨的弹性模量可以由松质骨弹性模量与表观密度的关系外插而得到. 但最近的研究

1) 国家自然科学基金资助项目.
1996-06-17 收到第一稿, 1997-01-20 收到修改稿.
本文系编委杨桂通先生推荐.

并不支持这一假设[12,13]. 从理论上分析骨小梁的方法主要有两种: 其一是由已知的松质骨力学性质的实验数据和松质骨的微结构模型反算出微观骨小梁的弹性模量[14], 这种方法可避免实验中由于加工微试件带来的表面缺陷对力学性质的影响; 其二是从更加微观的层次研究骨小梁, 为其建立微结构模型, 这种模型的优点是可考虑骨小梁的非均匀性和各向异性的性质[16].

本文主要目的是建立考虑松质骨结构各向异性的理想模型, 并通过所建立的模型预测骨小梁的弹性模量. 首先讨论了平均截断长度的概念和测量方法, 然后根据 Cowin[9]提出的结构张量的概念, 构造了理想胞元模型. 利用均匀化理论的方法, 计算了胞元的宏观弹性常数, 并采用 Turner[10]的实验数据对骨小梁的弹性模量作出了预测. 最后对得到的结果进行了讨论.

1 骨微结构的形态学研究

确定松质骨微结构的特性一直被认为是一个困难的问题, 而且直到最近才被人们逐渐认识. 由于骨小梁排列的复杂性, 使骨-骨髓界面的空间分布十分复杂. 开始, 人们借用材料学中的立体估量法 (stereology) 测量界面与体积之间的比例关系. 立体估量法的思路是: 通过测量试件的一组二维切片, 然后用数学方法推导出试件结构的三维参数. 表面体积比的测量最终归结于交点密度的测量,交点密度的测量方法是先在截面上画一组平行等距的测量线, 然后测出测量线与骨小梁轮廓线的交点总数, 交点总数与测量线总长的比值就是交点密度. 交点密度的倒数表示平均意义下的截断线段的长度, 称为平均截断长度[8] (如图 1 所示). 若骨小梁的分布是各向同性的, 沿任意方向测出的平均截断长度都应相等. 但实际的骨小梁排列是各向异性的, 所以平均截断长度 L 是测量线倾角 θ 的函数. Whitehouse[7]指出, 下列方程可以很好地满足测量结果

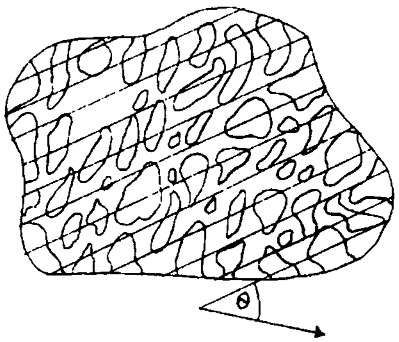


图 1 平均截断长度测量示意图

Fig. 1 Measurement of MIL on a trabecular bone specimen

$$\frac{1}{L^2(\theta)} = M_{11}\cos^2\theta + M_{22}\sin^2\theta + 2M_{12}\sin\theta\cos\theta \tag{1}$$

其中 M_{11}, M_{12}和 M_{22}是常数, Harrigan[8]将这一结果推广至三维情形, 并引入二阶张量 M, 满足方程

$$\frac{1}{L^2(\mathbf{n})} = M_{ij}n_in_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2}$$

其中 n是沿测量线方向的单位向量. 这样, 松质骨结构的各向异性性质就被平均截断长度张量数值表出了. Harrigan[8]测量了人体五种骨组织的平均截断长度张量, 并求出各自的特征向量和特征值.

因为张量 M是正定对称的, Cowin[9]定义了骨的结构张量 $H = M^{-1/2}$, 结构张量 (fabric tensor) 保持正定和对称的性质, 其主轴方向与骨小梁的主方向重合, 并且它的特征值与骨小梁在主方向上的分部数量成比例. 把松质骨看作正交各向异性材料, 假设骨组织的各向异性完全由骨小梁结构的各向异性引起 (即认为骨小梁是各向同性的). 这样, 弹性张量 C_{ijkl}将只是固体体积比 V_f 和结构张量H的函数

$$C_{ijkl} = C_{ijkl}(V_f, \mathrm{H}) \tag{3}$$

能证明，当 H的特征值增大时，对应方向上的弹性模量随之增大.

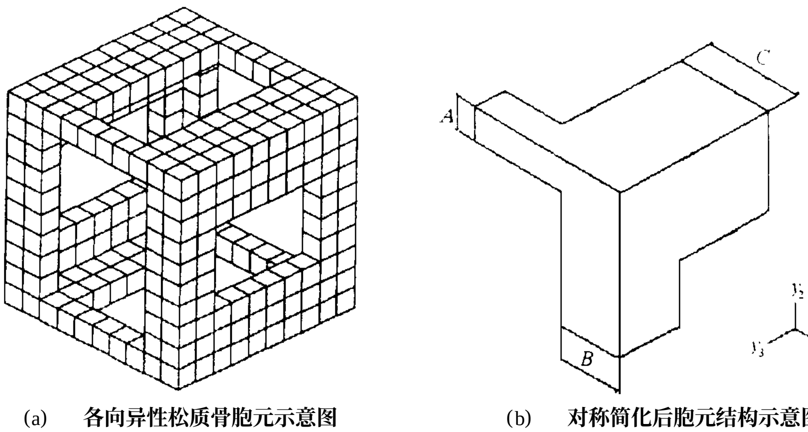
Cowin[9]利用本构关系的普遍原理得到（3）式的一般关系．但式中的待定常数相当多，难以用实验确定．为了近一步简化方程，Cowin 基于松质骨的力学性质与微结构的绝对几何尺寸无关的假设，将结构张量单位化，令

$$\mathrm{trace\ H} = 1 \tag{4}$$

随之本构关系也得到简化，Turner 等[10]用实验的方法得到这一数量关系中的待定常数.

2　胞元模型和计算方法

本文选用几何性质简单的理想模型作为代表松质骨结构的特征胞元（如图 2 所示）．假设骨小梁为长方体形杆，长度取为单位 1，排列方向沿着三个相互垂直的坐标轴，并且坐标轴的方向被认为与结构张量的主方向重合．根据骨小梁的排列数量与结构张量主值成正比的假设[9]，骨小梁沿各方向的排列数量由结构张量的三个主值 H_1，H_2 和 H_3 决定（设 $H_1 \le H_2 \le H_3$，对应的主方向为 y_1，y_2 和 y_3）．根据与较小的结构张量主值相对应的骨小梁的形状接近杆状，而与较大的结构张量主值相对应的骨小梁的形状接近板状的假设[15]，令 y_1 方向的骨小梁截面为正方形，其它两个方向的骨小梁截面为角钢形．为了使三个方向的骨小梁在节点处相交并吻合，角钢形截面的厚度被认为与 y_1 方向正方形截面的边长相等，宽度由对应结构张量主值确定．这样由松质骨的固体体积比和结构张量的主值就能唯一的确定胞元的几何结构（见附录）.



(a)　各向异性松质骨胞元示意图　　(b)　对称简化后胞元结构示意图

(a)　Base cell of anisotropic trabecular bone　　(b)　Base cell simplified by symmetry

图 2

Fig. 2

构成骨小梁的物质被假设成匀质的，密度恒等于 1.764 g/cm^3[13]．材料性质被假设为线弹性各向同性的．在空洞中不存在任何实体性物质，这样松质骨的表观密度（apparent density）就能由骨小梁的密度 ρ_s 与固体体积比 V_f 的乘积决定

$$\rho = \rho_s V_f \tag{5}$$

本文计算分成两部分：计算的第一部分假设结构是各向同性的，即 $H_1 = H_2 = H_3$，三个方向的骨小梁的截面成为相等的正方形．这种模型曾被 Gibson[3]和 Hollister[15]所使用，为了与

Hollister[15]的结果比较，采用 Hollister 在计算时使用的数据：骨小梁的弹性模量 $E_s = 5$ GPa，泊松比为 0.3，松质骨的固体体积比范围取 0.1～0.6. 计算的第二部分采用 Turner[10]的实验结果，Turner 测量了十块牛股骨试件的表观密度、结构张量的主值和对应主方向上的弹性常数，这里利用表观密度和结构张量主值的数据分别构造十个松质骨胞元进行计算.

对胞元的计算采用均匀化理论[6]. 这种理论假设材料的微结构在微观尺度上周期重复，也就是说所有物理量在微观场上都是周期函数. 这样在微观尺度上就可只在一个典型周期域（称胞元）上进行分析求解. 在胞元上需求解的场方程为

$$\int_Y E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} \mathrm{d}Y = \int_Y E_{ijkl} \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} \mathrm{d}Y \tag{6}$$

其中 E_{ijkl}是胞元上的弹性张量函数，v_i 是虚位移，未知量 χ_p^{kl} 是一个具有 Y-周期性的三阶张量，且 $\chi_p^{kl} = \chi_p^{lk}$. 由于复合材料的弹性张量函数在胞元上不连续，方程 (6) 没有解析解，需用有限单元法求解. 均匀化后的弹性张量形式是

$$D_{ijkl} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(E_{ijkl} - E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} \right) \mathrm{d}Y \tag{7}$$

其中|Y|表示胞元的体积. 由于本文选用的胞元具有对称性，可对问题做简化求解[19]. 文中的松质骨胞元具有正交对称性，可在 [0，1/2] × [0，1/2] × [0，1/2] 域上求解，胞元如图 2 (b) 所示. 对于各向同性的松质骨立方胞元，具有立方对称性，只需求解 χ^{11}和 χ^{12}，独立的弹性常数只有 D_{1111}，D_{1122}，D_{1212}三个，类似于各向同性材料. 对于各向异性的松质骨胞元，需求解所有 χ^{ij}，独立的弹性常数将有九个，类似于正交各向异性材料.

由于整个均匀化计算过程都是线性的，当骨小梁的泊松比恒定不变时，均匀化计算所采用的骨小梁弹性模量将与计算得出的松质骨的弹性常数成正比. 因此可先假设骨小梁弹性模量为单位 1，泊松比为 0.3. 这样，将计算出的松质骨弹性常数与 Turner[10]的实验值相比较，就能预测出骨小梁的弹性模量. 具体的方法是利用最小二乘法求出使下式成立的骨小梁的弹性模量 E_s

$$\min \left[\sum_{i=1}^{10} \left(E_k^i - E_s \cdot D_k^i \right)^2 \right] \quad (k = 1,2,3,12,13,23) \tag{8}$$

式中 D_k^i 表示均匀化计算后的松质骨弹性模量或剪切模量值，E_k^i 表示松质骨弹性模量或剪切模量的实验值，为了考虑各向异性的影响，在最小二乘法求解时采用不同组的数据.

3 计算结果

对各向同性结构的计算结果如图 3 所示. 当松质骨的固体体积比在 0.1～0.6 范围内时，松质骨的弹性模量在 0.21 GPa～1.92 GPa 范围内. Hollister 利用板形松质骨胞元计算出的弹性模量在 0.3 GPa～2.5 GPa 范围内，略高于本文的计算结果. 两者间的差异可从模型的差异上得到解释. 利用 (5) 式，把固体体积比转化成表观密度后，可回归出表观密度与弹性模量的关系（见图 3）. 将结果与 Hodgkinson 和 Curry[20]通过人胫骨试件实验值得出的松质骨弹性模量的上界 $E_{\mathrm{high}}^a = 10^{(-1.46 + 1.66 \log\rho)}$ 和下界 $E_{\mathrm{low}}^a = 10^{(-4.10 + 2.47 \log\rho)}$ (E^a 的单位取 MPa，ρ 取 kg/m^3) 比较 (如图 4 所示)，当表观密度小于 0.8 g/cm^3 时，结果落在上下界之间，这时模型很好地预测了松质骨的弹性模量.

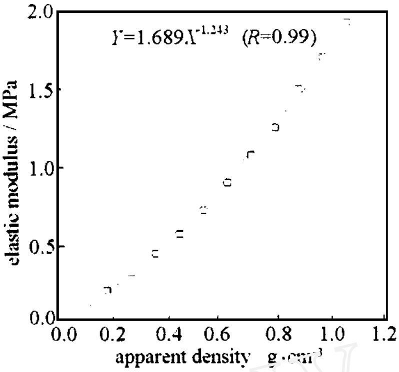


图 3　各向同性骨小梁模型结果回归曲线

Fig. 3　Regression curve of results of isotropic model of trabecular bone

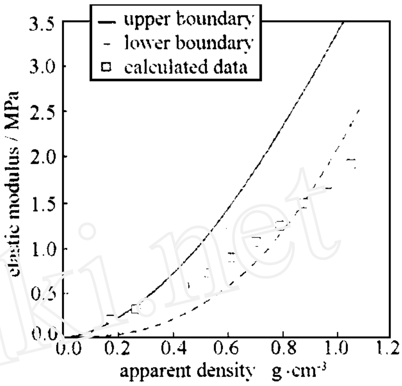


图 4　各向同性松质骨模型结果与实验值上下界比较

Fig. 4　Comparison between results of isotropic model and upper and lower boundaries of experimental data

对各向异性结构模型的计算结果如表 1 所示, 表中已将均匀化后的弹性张量转化为工程常数. 对骨小梁弹性模量的预测结果见表 2, 在求解 (8) 式时, 将实验值分组输入: 先分别用 E_1, E_2 和 E_3 的实验值, 再同时使用 E_1, E_2 和 E_3 的值; 剪切模量也采用相同的步骤, 先分别用 G_{12}, G_{13}和 G_{23}的实验值, 再同时使用 G_{12}, G_{13}和 G_{23}的值; 最后将全部实验值输入, 求得平均意义下的骨小梁弹性模量. 从表中看出, 骨小梁弹性模量在 6.76 GPa～10.9 GPa 这一范围内, 使用全部实验数据得到的结果为 9.21 GPa, 这个值将被用于下一步的计算中.

表 1　各向异性模型弹性模量计算结果

Table 1　Results of elastic modulus by the anisotropic model

density (g/cm^3)	H_1	H_2	H_3	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{13}	G_{23}
0.479	0.219	0.298	0.483	0.074 19	0.115 0	0.195 3	0.005 072	0.009 804	0.017 45
0.417	0.270	0.331	0.339	0.087 50	0.119 7	0.143 9	0.006 655	0.006 953	0.010 18
0.484	0.247	0.356	0.398	0.086 22	0.146 6	0.177 0	0.007 642	0.008 953	0.017 90
0.565	0.267	0.338	0.395	0.116 9	0.165 2	0.212 6	0.012 04	0.015 33	0.023 84
0.805	0.246	0.334	0.419	0.174 1	0.262 2	0.325 0	0.027 78	0.040 14	0.065 01
0.515	0.234	0.335	0.431	0.087 50	0.145 8	0.198 6	0.007 581	0.010 89	0.021 35
0.668	0.242	0.336	0.442	0.129 8	0.204 5	0.262 7	0.016 12	0.023 03	0.040 58
0.672	0.243	0.341	0.416	0.131 3	0.210 1	0.262 0	0.016 82	0.022 97	0.041 36
0.677	0.243	0.309	0.449	0.132 8	0.185 1	0.279 3	0.014 89	0.026 77	0.039 67
0.683	0.217	0.330	0.453	0.119 1	0.208 0	0.275 6	0.014 67	0.024 05	0.047 34

注: 表观密度, H_1, H_2 和 H_3 取自 Turner[10]的实验结果.

表 2　骨小梁弹性模量的计算结果

Table 2　Results of elastic modulus of trabeculae

	E_1	E_2	E_3	E_1, E_2, E_3	G_{12}	G_{13}	G_{23}	G_{12}, G_{23}, G_{13}	all
E_0	6.757	7.291	10.92	9.217	10.11	8.628	8.862	8.940	9.212
R^2	0.922 3	0.968 8	0.925 5	0.895 5	0.973 2	0.944 2	0.920 6	0.930 0	0.896

最终松质骨的弹性常数由预测出的骨小梁弹性模量乘以表 1 中的计算数据得到. 计算值与实验值的比较见图 5,可见两者间吻合较好. 为考察模型是否很好地体现松质骨各向异性性质, 分别用结构张量的主值比 H_1/H_3 和结构张量的第二不变量作为衡量松质骨结构各向异性的量[10],而以计算出的弹性模量 E_1 与 E_3 的比值作为衡量模型各向异性性质的量,拟合出两者间的函数关系,如图 6 和图 7 所示. 可见变量间有较显著的正比关系,说明随着松质骨结构各向异性程度的增加,模型预测出的松质骨力学性质的各向异性也随之增加.

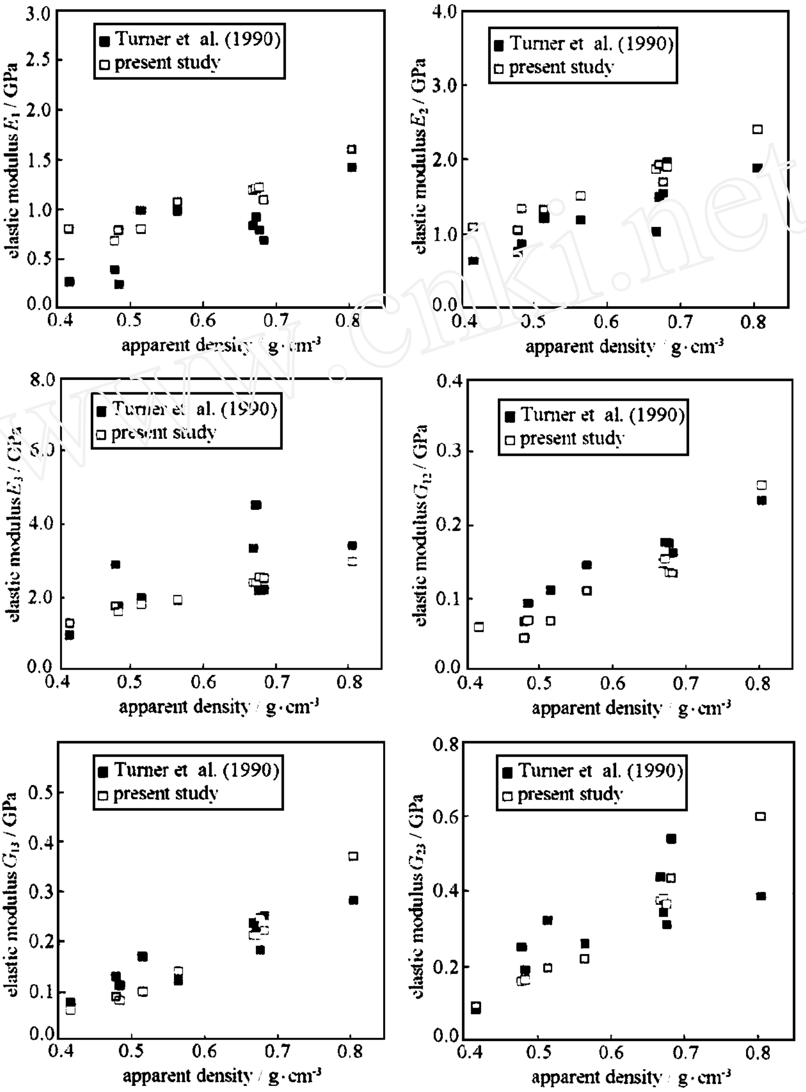


图 5 松质骨弹性模量计算值与实验值的比较

Fig. 5 Comparison between calculated and experimental elastic modulus of trabecular bone

4 讨 论

理想化模型能否足够精确地描述松质骨的微结构一直是人们争论的问题. Hollister[21]将其早先用均匀化理论计算松质骨的结果与实验值不符归因于理想化模型的使用，于是放弃理想化模型而使用松质骨的数值 CT 扫描数据. Rietbergen[14]也对理想化模型的精度提出疑问，而采用图像扫描的松质骨结构进行有限元分析. 但这种取舍的代价是很大的：首先，精确的图像扫描模型使用的数据量巨大，势必导致需要更加复杂的算法和更多的机时；其次，精确结构模型只能表示一块特殊解剖位置的松质骨的性质，它的计算结果并不具有普遍性. 所以要想从整体上把握松质骨的力学性质，构造考虑更多因素影响的理想化模型，在一定精度意义下将不失为一种方便且有效的手段.

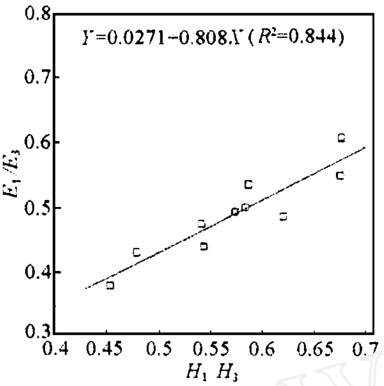


图 6　结构张量主值比 H_1/H_3 同计算出的弹性模量比 E_1/E_3 的线性回归曲线

Fig. 6　Linear regression curve of the ratio of eigenvalue of fabric tensor H_1/H_3 and the ratio of calculated elastic modulus E_1/E_3

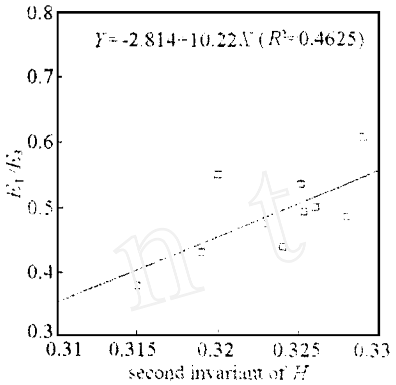


图 7　结构张量第二不变量同计算出的弹性模量比 E_1/E_3 的线性回归曲线

Fig. 7　Linear regression curve of second invariant of fabric tensor and the ratio of calculated elastic modulus E_1/E_3

本文利用结构张量的概念设计了考虑结构各向异性的松质骨理想模型，模型中对松质骨结构张量的考虑只限于主轴意义下．这主要是因为结构张量仅代表了骨小梁沿空间各方向的分布情况，而并未指出每个骨小梁的绝对位置，所以并不能完全决定松质骨结构的几何形状．Hollister[15]曾用改变各向同性杆状胞元每个方向上的长度，使三个方向上的长度比等于结构张量主值比的胞元模型表示松质骨．这一模型的缺点是只能表示一种杆状的松质骨结构，所以只能代表某一解剖学位置的骨组织，而不具普遍性．本文模型克服了上述缺点，将杆状胞元与板状胞元两种模型用结构张量主值统一起来，避免了以往将两种胞元人为割裂开来的缺点．

对骨小梁弹性模量的范围尚未有统一的认识（见表 3）．骨小梁弹性模量的实验值随着实验方法的不同而不同．一般来说，使用弯曲的方法测出的弹性模量较低，大约在 3.2 GPa～7.8 GPa 范围内．拉伸方法得到的结果是相矛盾的，Ryan 和 Williams[17]的结果相当低，为 0.4 GPa～3.6 GPa，而 Rho[13]用干骨作出的结果却远高于前者的值，为 10.8 GPa．用超声波法得到的结果最高[13]，为 14.8 GPa，这个值仅低于密质骨弹性模量的 20 %～30 %左右．用理论方法分析骨小梁的刚度的结果间也存在一定差异．Williams 和 Lewis[2]将松质骨假设成二维模型，得到骨小梁的弹性模量为 1.3 GPa，而 Rietbergen[14]用精确松质骨有限元模型得到的结果为 2.23 GPa～10.1 GPa．本文的结果为 6.76 GPa～10.9 GPa，落在各结果构成域的中间范围．但需要指出的是：对于骨小梁的微试件实验来说，如果将微试件的表面积与体积的比值同密质骨标准试件相比，微试件的结果是标准试件的 160 倍，这就意味着微试件将更多地受到表面缺陷的影响，所

表 3　骨小梁弹性模量的估测值

Table 3　Estimates　of elastic modulus of trabeculae

Source	Type of bone	Method	Modulus of trabeculae / GPa
Wolff[11]	Human	Hypothesis	17～20
Williams and Lewis[2]	Human, proximal tibia	Experiment with 2DFEM	1.30
Ryan and Williams[17]	Bovine femur	Tensile testing	0.4～3.6
Choi et al.[18]	Human tibia	Four-point bending	3.2～7.8
Rho et al.[13]	Human tibia	Micro-tensile testing	10.4 (dry)
		Ultrasonic	14.8 (wet)
Rietbergen et al.[14]	Human tibia	FEM	2.23～10.1
The present paper	Bovine femur	Homogenization with 3D FEM	6.76～10.9

以微试件的方法得到的结果可以认为是偏低的[12]；另一方面，对于理论方法来说，由于松质骨的实验方法受到松质骨空洞结构的影响，往往低估松质骨的弹性模量，所以用松质骨的实验值反算出的骨小梁的弹性模量必定也是偏低的[22]．综合上面两方面的原因，可以说骨小梁的实际弹性模量应高于现在已知的实验和理论结果，但应低于密质骨的弹性模量．因为骨小梁的密度不是恒定的，大约在 1.6 g/cm^3～2.0 g/cm^3 的范围内变动，对于不同密度的骨小梁，其中的矿物质成分将不同，所以实际的骨小梁力学性质并不是处处相同的，且骨小梁中胶原纤维的有向排列将使骨小梁成为各向异性．所以说，以一个确定的值来代表骨小梁的弹性模量是不可能的，而只能用一个大致的范围来描述骨小梁．本文得到的 9.21 GPa 可以作为平均意义上的骨小梁的弹性模量，弹性模量的下限可认为接近弯曲实验的结果，总的来说，认为骨小梁的弹性模量在 3 GPa～15 GPa 的范围内是合理的．本文中，当假设骨小梁是均匀各向同性材料，作为松质骨有限元模型的材料输入值时，选取模量为 9.21 GPa 是较合理的．

以往用均匀化理论分析骨组织力学性质时，大都局限于一种预先假设微结构各组分的力学性质，再由胞元模型计算出宏观骨力学性质的思路[15,16,21]．本文由骨宏观力学性质的实验值反算出构成微观胞元材料的力学性质，为均匀化理论在生物力学中的应用提供了新的途径．因为生物材料的复合情况复杂，常常具有多级嵌套的微结构，各微观组分的几何尺寸微小，在宏观程度范围又难以找到对应的材料，所以用实验方法来确定微观组分的力学性质是非常困难的．利用本文的思路，使用均匀化理论研究构成生物材料的各组分的性质将不失为一种有效途径．

由于骨小梁与密质骨有几乎相同的密度和矿物质含量，所以密质骨刚度优于骨小梁的原因只能从更低一级的微结构上得到解释，利用多级嵌套的微结构模型考虑骨小梁的微结构对其力学性质的影响将是今后工作的方向．

致谢　杨桂通教授审阅了全文，谨致感谢．

参 考 文 献

1 Carter DR and Hayes WC. The compressive behaviour of bone as a two-phase porous structure. *J Bone Jiont Surg*, 1977, 59: 954～962

2 Williams JL and Lewis JL. Properties and an anisotropic model of cancellous bone from the proximal tibia epiphysis. *J Biomech Engng*, 1982, 104: 50～56

3 Gibson LJ. The mechanical behavior of cancellous bone. *J Biomechanics*, 1985, 18: 317～328

4 Beaupre GS and Hayes WC. Finite element analysis of a three-dimensional open-celled model for trabecular bone. *J Biomech Engng*, 1985, 107: 249～256

5 Sanchez-Palencia E. Non-homogeneous Media and Vibration Theory. Berlin: Springer, 1980

6 樊学军. 均匀化理论及其在生物力学中的应用. 力学进展, 1996, 26: 187～197

7 Whitehouse WJ and Dyson ED. Scanning electron microscope studies of trabecular bone in the proximal end of the human femur. *J Ana*, 1974, 118: 417～444

8 Harrigan TP and Mann RW. Characterization of microstructural anisotropy in orthotropic materials using a second rank tensor. *J Mater Science*, 1984, 19: 761～767

9 Cowin SC. Wolff's law of trabecular architecture at remodeling equilibrium. *J Biomech Engng*, 1986, 108: 83～88

10 Turner CH, Cowin SC, Rho JY, Ashman RB, Rice JC. The fabric dependence of the orthotropic elastic constants of cancellous bone. *J Biomechanics*, 1990, 23: 549～561

11 Wolff J. The Law of Bone Remodeling. Berlin: Springer, 1986

12 Rice JC, Cowin SC, Bowman JA. On the dependence of the elasticity and strength of cancellous bone on apparent density. *J Biome-*

chanics, 1988, 21: 155～168

13 Rho J Y, Ashman RB, Turner CH. Young's modulus of trabecular and cortical bone material: ultrasonic and microtensile measurements. *J Biomechanics*, 1993, 26: 111～119

14 Rietbergen B' van Weinans H, Huiskes R, Odgaard A. A new method to determine trabecular bone elastic properties and loading using micromechanical finite-element models. *J Biomechanics*, 1995, 28: 69～81

15 Hollister SJ, Fyhrie DP, Jepsen KJ, Goldstein SA. Application of Homogenization theory to the study of trabecular bone mechanics. *J Biomechanics*, 1991, 24: 825～839

16 张宁, 樊学军. 松质骨表观密度和弹性模量间关系的均匀化理论模型. 见: 柳兆荣, 陈君楷, 吴望一. 生物力学新进展. 成都: 成都科技大学出版社. 1996. 326～332

17 Ryan SD, Williams JL. Tensile testing of rodlike trabeculae excised from bovine femoral bone. *J Biomechanics*, 1989, 22: 351～355

18 Choi K, Kuhn JL, Ciarelli MJ, Goldstein SA. The elastic moduliof human subchondral trabecular and cortical bine tissue and the size-dependency of cortical bone modulus. *J Biomechanics*, 1990, 23: 1103～1113

19 Bakhvalov NS, Panasenko GP. Honogenisation: Averaging Processesin Periodic Media. Kluwer academic publishers. 212～222

20 Hodgkinson R, Curry JD. Young's modulus, density and material properties in cancellous bone over a large density range. *J Mater Sci Mater Med*, 1992, 3: 377～381

21 Hollister SJ, Brennan JM, Kikuchi N. A homogenization sampling procedure for calculating trabecular bone effective stiffness and tissue level stress. *J Biomechanics*, 1994, 27: 433～444

22 Keaveny TM, Borchers RE, Gibson LJ, Hayes WC. Theoretical analysis of experimental artifact in trabecalar bone compressive modulus. *J Biomechanics*, 1993, 26: 599～607

附　录

设 y_1 方向的骨小梁截面边长为 A, y_2 方向和 y_3 方向的骨小梁截面宽度为 B 和 C（见图 2（b））, 假设下列关系成立

$$B/A = H_2/H_1, \quad C/A = H_3/H_1 \tag{A1}$$

令 $k_1 = H_2/H_1$, $k_2 = H_3/H_1$, 则松质骨固体体积比为

$$V_f = 4(2k_1 + 2k_2 - 1)A^2 - 8(k_1 + k_2 + k_1k_2 - 1)A^3 \tag{A2}$$

解这样一个超越方程就可求出胞元几何参数 A, 继而求出 B 和 C.

INVESTIGATION OF THE STIFFNESS OF TRABECULAE BY REPRESENTATIVE VOLUME ELEMENT (RVE) APPROACH

Zhang Ning Fan Xuejun
(*Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan* 030024, China)

Abstract Based on the concept of the fabric tensor to represent the microstructure of the cancellous bone, a more sophisticated idealized representative volume element (RVE) model is introduced for cancellous bone. It is assumed that the trabeculae distribution in the principal direction of the fabric tensor is proportional to the associated eigenvalue of the tensor. With this understanding, the present model provides a consistent and quantitative way to describe various kinds of microstructures from rod-like trabeculae (corresponding to smaller eigenvalue) to platelike trabeculae (corresponding to larger eigenvalues). Homogenization theory is applied here to establish the relation between the properties of continuum-level bone and the trabecuale. Unlike former studies that used the homogenization theory to predict the macro-mechanical property from the assumed microstructure and mechanical property of the constituents of the composite, the present study focuses on the investigation of the stiffness of the trabeculae, by the comparison of the calculated results with the continuum-level experimental data by Turner et al. The results show that the modulus of the trabeculae is in the range 6.76～10.9 GPa, and the mean value is 9.21 GPa. These values are in good agreement with the experimentally established modulus for the trabeculae.

Key words trabeculae, fabric tensor, anisotropy, homogenization theory