

关于自由面压力脉动与摇板造波的等价性¹⁾

缪国平 尤云祥 刘应中

(上海交通大学船舶及海洋工程系, 上海 200030)

摘要 考虑了一个逆问题, 即在浮体运动和自由面压力分布之间是否存在某种等价性? 作为这一方向努力的一部分, 从二维半无限长水槽摇板造波的特例出发考察了这个问题. 基于线性势流理论, 导出了自由面压力分布应满足的带复数核的第一类 Fredholm 积分方程, 并用正则化方法得到了这类不适定的积分方程的近似正则解. 结果表明, 自由面压力脉动与摇板造波之间的等价性可以通过解相应的逆问题来解决.

关键词 压力分布, 摇板造波, 逆问题, 正则化方法

引言

在浮体运动产生的流场计算中, 物面条件的满足往往是求解的困难所在, 尤以非线性问题为甚. 一些研究者转而研究自由面上某种分布压力运动所产生的流场响应^[1], 试图深入地揭示物体运动与流场响应之间的力学机理和本质联系. 然而, 在自由面压力分布与浮体运动之间没有明确的关系, 亦即, 给定的压力分布代表何种物形是不清楚的. 当然, 原则上说, 给定压力分布及其运动规律, 我们或可由实际物面上要求满足的物面条件, 以流线追踪法重建物体形状, 但这一做法在实践中无疑是极其困难的.

这一现状促使我们考虑这样一个逆问题, 亦即, 对于一个给定运动规律的浮体, 我们能否找到一个合适的自由面压力分布, 在浮体以外的流场中, 这一压力分布可产生与真实物体一样的流场响应. 也就是说, 试图考查浮体运动与自由面压力分布之间的某种等价关系.

在浮体的线性辐射和绕射问题中, 物面法向速度规定了场内的速度势, 这一流场是除物体占据部分外的整个流场. 我们或可在物体占据的那部分自由面上寻求适当的压力脉动, 使由它产生的速度势 (1) 与辐射和绕射问题一样满足物面条件外的所有边界条件, (2) 在虚构的物面上满足真实物面的所有法向条件, 那么, 这样的压力脉动能否与真实物体运动一样产生同样的流场? 作为这一方向努力的一部分, 我们从二维半无限长水槽摇板造波的特例出发考察这个问题. 基于线性势流理论, 我们导出了自由面压力分布应满足的带复数核的第一类 Fredholm 积分方程, 为了恢复其解的稳定性, 我们采用正则化方法, 导出了自由面压力分布的正则解应满足的正则积分微分方程, 并求出了它的近似数值解.

1 摇板造波的正问题

考虑如下水深为 h 的二维半无限长水槽的摇板造波问题. 如图 1 所示, 在 $x = a$ 处有一摇板, 以圆频率 ω 在微幅振荡下造波, 摇板上的法向速度为 $f(z)$, 这时摇板在水槽中产生一右传

¹⁾ 国家自然科学基金资助项目 (编号: 19572044).

1996 - 03 - 15 收到第一稿, 1997 - 04 - 12 收到修改稿.

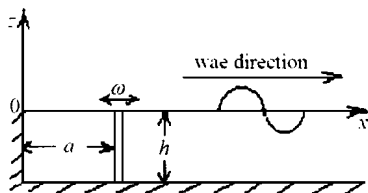


图1 摇板造波

Fig. 1 Wave-making of the flat plate

波. 这是最一般的提法, 例如, 如果 $f(z) = 1$, 则为推板造波; 如果 $f(z) = \omega \cdot (z + h)$, 则为以底部为转动轴的摇板造波. 众所周知, 这时水槽中的流场可以用速度势 $\phi_d(z, x, t)$ 来描述, 当摇板作谐和振荡时, 速度势 $\phi_d(z, x, t)$ 可记为 $\phi_d(z, x) \exp(-i\omega t)$ ($i = \sqrt{-1}$), 其中 $\phi_d(z, x)$ 由二维 Laplace 方程及相应的边界条件确定, 它们是线性自由面条件,

池底条件, $x = +\infty$ 处的辐射条件及摇板上的法向条件

$$\left. \frac{\partial \phi_d}{\partial x} \right|_{x=a} = f(z) \quad (1.1)$$

用分离变量法, 可得正问题速度势的解为^[3]

$$\phi_d(z, x) = A_0 \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \exp[ik_0(x-a)] + \sum_{j=1}^{\infty} A_j^* \cos k_j(z+h) \exp[-k_j(x-a)] \quad (1.2)$$

其中 k_0 由色散关系 $\omega^2/g = k_0 \tanh k_0 h$ 确定, k_j 则由 $\omega^2/g = -k_j \tan k_j h$ 确定, g 为重力加速度. 由(1.1)易得

$$A_0^* = -\frac{i}{k_0 p_0} \int_h^0 f(z) \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} dz, \quad A_j^* = -\frac{1}{k_j p_j} \int_h^0 f(z) \cos k_j(z+h) dz \quad (1.3)$$

其中

$$p_0 = \int_h^0 \frac{\cosh^2 k_0(z+h)}{\cosh^2 k_0 h} dz, \quad p_j = \int_h^0 \cos^2 k_j(z+h) dz \quad (1.4)$$

它们均可显式积出.

2 逆问题的提法及正则化算法

现在, 我们考虑这样一个逆问题, 即在自由面 $[0, a]$ 上寻求压力脉动 $\text{Re}\{\bar{p}(x) \exp(-i\omega t)\}$, 让它产生的速度势 ϕ_i 模拟摇板产生的势 ϕ_d , 其中 Re 表示取物理量的实部, $\bar{p}$ 为脉动压力幅值的分布形态, ω 为压力脉动频率. 如图2所示.

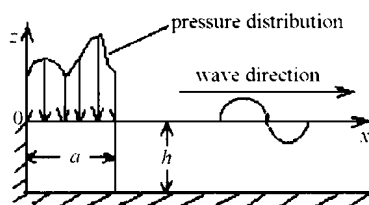


图2 压力造波

Fig. 2 Wave-making of the pressure distribution

在这一压力作用下, 场中的速度势可记为 $\phi_i(z, x, t) = \text{Re}\{\phi_i(z, x) \exp(-i\omega t)\}$, 其中 $\phi_i(z, x)$ 为 $\phi_i(z, x, t)$ 的定常部分, 它由二维 Laplace 方程, 池底条件, $x = +\infty$ 处的辐射条件, 自由面条件 $\frac{\partial \phi_i}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi_i =$

$$\begin{cases} \frac{i\omega}{\rho g} \bar{p}, & 0 \leq x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

$= \frac{i\omega}{\rho g} p(x)$, 并称之为压力分布. 后文中所说的压力分布均指 $p(x)$. 为满足池壁条件, 我们对速度势 ϕ_1 关于 $x=0$ 作偶延拓, 并让压力分布在 $[-a, a]$ 上, 则易知, 当 $p(x)$ 为偶函数时, 池壁条件自动满足.

由自由面上 $x = \xi$ 处 $\delta(x - \xi)$ 型脉动压力产生的速度势特解, 可得在 $[-a, a]$ 上有 $p(x)$ 型压力分布时的速度势为^[2]

$$\phi_1(z, x) = \int_{-a}^a B_0 \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \exp[ik_0|x-\xi|] + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \cos k_j(z+h) \exp[-k_j|x-\xi|] p(\xi) d\xi \quad (2.1)$$

其中

$$B_0 = \frac{i}{\tanh k_0 h + k_0 h \sec h^2 k_0 h}, \quad B_j = \frac{1}{\sin k_j h + k_j h / \cos k_j h}$$

当 $x = a$ 时, 摇板边界条件等价于

$$\int_{-a}^a [ik_0 B_0 \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \exp[ik_0(x-a)] z - \sum_{j=1}^{\infty} k_j B_j \cos k_j(z+h) \exp[-k_j(x-a)] p(\xi) d\xi = f(z) \quad (2.2)$$

当 $p(x)$ 是偶函数时, 上式还可记为

$$\int_{-a}^a K(z, \xi) p(\xi) d\xi = f(z) \quad (2.3)$$

其中

$$K(z, \xi) = 2ik_0 B_0 \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \exp(ik_0 a) \cos k_0 \xi - \sum_{j=1}^{\infty} 2k_j B_j \cos k_j(z+h) \exp(-k_j a) \cosh k_j \xi$$

这是一个第一类 Fredholm 积分方程, $p(x)$ 即为逆问题的解. 为简便计, 将它记为

$$Ap = f \quad (2.4)$$

众所周知, 第一类 Fredholm 积分方程在 Hadamard 意义下通常是不适定的. 在这类不适定问题的解法中, 目前应用最广, 理论上最完善的方法, 是正则化算法. 带实数核的这类方程的正则化算法已有过广泛的研究和应用. 这里, 我们首先将这一方法推广到带复数核的第一类 Fredholm 积分方程. 为此, 设 $L^2[0, a]$ 和 $H^1[0, a]$ 分别为由模平方可积和导数模的平方可积的复函数构成的 Hilbert 空间和 Sobolev 空间. 让 $p \in H^1[0, a]$, $f \in L^2[0, a]$. 光滑泛函取为 $M^\alpha(p, f) = \|Af - g\|_{L^2}^2 + \alpha \Omega(f)$, 其中 $\Omega(f) = \int_0^a \{q_0(s) |dp/ds|^2 + q_1(s) |p(s)|^2\} ds$ 为稳定泛函, 积分号中的 $q_0(s) (> 0) \in C^1[0, a]$, $q_1(s) (\geq 0) \in C[0, a]$ 是两个已知的函数, 而 $\alpha (> 0)$ 即为熟知的正则参数. 我们称使光滑泛函 $M^\alpha(p, f)$ 最小的函数 p_α 为方程 (2.4) 的正则解. 可以证明, 对任意 $f \in L^2[0, a]$, 存在唯一的 $p_\alpha \in H^1[0, a]$, 使 $M^\alpha[p_\alpha, f] = \inf_{p \in H^1[0, a]} M^\alpha[p, f]$ ^[4].

为简便计, 本文仅考虑 $q_0 = 1, q_1 = 0$ 的情形. 此时, 稳定泛函为 $\Omega(p) = \int_0^a |dp/ds|^2 ds$. 虽然该稳定泛函仅是一个特例, 但其形式简单, 而且同样可得到很好的结果. 为导出 p_α 满足的显式方程, 对任意的 $v \in H^1[0, a]$, 作 λ 的二次多项式 $G(\lambda) = M^\alpha(p + \lambda v, f) = M^\alpha(p, f) + \lambda H(p, f) + \lambda^2 M^\alpha(v, f)$, 其中

$$\begin{aligned}
 H(p) = & \int_h^0 \left[x \int_h^a \overline{K(y, x)} p(x) dx - f(y) \int_h^a \overline{K(y, s)} v(s) ds \right] dy + \\
 & \int_h^0 \left[\int_h^a \overline{K(y, x)} p(x) dx - f(y) \int_h^a \overline{K(y, s)} v(s) ds \right] dy + \\
 & \alpha \int_h^a \frac{dp}{ds} \frac{d\bar{v}}{ds} ds + \alpha \int_h^a \frac{d\bar{p}}{ds} \frac{dv}{ds} ds = \int_h^a \int_h^a \overline{K^*(s, x)} p(x) dx - b(s) - \alpha \frac{d^2 p(s)}{ds^2} \overline{v(s)} ds + \\
 & \int_h^a \int_h^a \overline{K^*(s, x)} p(x) dx - b(s) - \alpha \frac{d^2 p(s)}{ds^2} \overline{v(s)} ds + \alpha p'(s) \overline{v(s)} \Big|_0^a + \alpha p'(s) \overline{v(s)} \Big|_0^a
 \end{aligned}$$

其中, $K^*(s, x) = \int_h^0 \overline{K(z, s)} K(z, x) dz$, $b(s) = \int_h^0 \overline{K(z, s)} f(z) dz$ 上面的横线表示取复共扼.

由于 $M^\alpha(p, f)$ 在 $p_\alpha(x)$ 处取极小等价于 G 在 $\lambda=0$ 处取极小, 即 $\left. \frac{dG(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = 0$. 从而由 $v(s)$ 的任意性, 应有

$$\int_h^a \overline{K^*(s, x)} p(x) dx - \alpha \frac{d^2 p(s)}{ds^2} = b(s) \quad (2.5)$$

及

$$p'(s) \overline{v(s)} \Big|_0^a = 0 \quad (2.6)$$

如果已知积分方程的解在区间 $[0, a]$ 端点的值, 比如 $p(0) = 0$, $p(a) = 0$, 则让 $H^1[0, a]$ 为满足相应边界条件的复函数组成的 Sobolev 空间. 在这种情况下, 必有 $v(0) = 0$, $v(a) = 0$, 从而条件(2.6)自动满足. 于是寻找正则解 $p_\alpha(x)$ 的问题, 可归结为求解如下积分微分方程的边值问题

$$\int_h^a \overline{K^*(s, x)} p_\alpha(x) dx - \alpha \frac{d^2 p_\alpha(s)}{ds^2} = b(s) \quad (2.7)$$

及

$$p_\alpha(0) = 0, \quad p_\alpha(a) = 0 \quad (2.8)$$

一般地, 如果 $p(0) = \eta_1$, $p(a) = \eta_2$, 则我们令 $p(x) = p^*(x) + g(x)$, 其中 $g(x) = \frac{1}{a} [(\eta_2 - \eta_1)x + a\eta_1]$, 于是 $p^*(0) = 0$, $p^*(a) = 0$. 这时可以先计算对应于 $p^*(x)$ 的正则解 $p_\alpha^*(x)$, 然后原问题的正则解可取为 $p_\alpha^*(x) + g(x)$.

如果我们对积分方程的解在区间 $[0, a]$ 端点的值一无所知, 则条件(2.6)等价于 $p'(0) = 0$, $p'(a) = 0$, 这时边界条件(2.8)应变为

$$p'_\alpha(0) = 0, \quad p'_\alpha(a) = 0 \quad (2.9)$$

如果所求的解不满足边界条件(2.9), 则可用与上述同样的方法处理.

积分微分方程(2.7)可以用通常的差分方法求解, 将方程中的积分及二阶导数离散可得

$$\sum_{i=0}^{N+1} W_j K^*(s_j, x_i) p_\alpha^i - \alpha \frac{p_\alpha^{j-1} - 2p_\alpha^j + p_\alpha^{j+1}}{(\Delta h)^2} = b(s_j) \quad (2.10)$$

其中, $\Delta h = \frac{a}{N+1}$; $x_i = \Delta h \times i$; $s_j = \Delta h \times j$; $W_j = \Delta h$; $i = 0, 1, \dots, N+1$; $j = 1, \dots, N$, $W_0 = W_{N+1} = (1/2) \Delta h$. p_α^j 即为 $p_\alpha(x)$ 在 $x = x_j$ 处的近似解, 记 $p_\alpha^N = (p_\alpha^j)_N^T$, 并称之为近似正则解. 此外, $p_\alpha^0 = p_\alpha(0)$, $p_\alpha^{N+1} = p_\alpha(a)$ 可由边界条件确定.

应该指出, 这里关于逆问题的提法本身是精确的, 而第一类 Fredholm 方程的正则化求解则是近似的.

3 数值结果及讨论

不失一般性, 我们考虑 $f(z) = 1 \text{ m/s}$, $a = 1 \text{ m}$ 及第一类齐次边界条件的情况. 计算近似正则解的关键是如何选择最佳正则参数 α . 我们的方法是, 首先取一个值 α_0 ($1 \leq \alpha_0 < 10$), 让 $\alpha = \alpha_0 \times 10^{-j}$, 然后从 1 开始取若干个 j 的值进行计算. 我们发现, 一定存在一个 j_0 , 使当 $j = j_0$ 时, 得到的解是不稳定的, 而当 $j = j_0 - 1$ 时解开始趋于稳定. 例如, 当 $h = 2.0 \text{ m}$, $\omega = 4.5$ 时, 可得 $j_0 = 12$, 结果如图 3 所示. 由图可知, 这时所得解显然是不稳定的. 然后对取定的 $j = j_0 - 1$ 及 α_0 , (1) 取若干个 N 的值 (比如取 N 为 55, 111), 检查所得解是否稳定和收敛, (2) 取若干个 x 的值, 检查所得正逆问题的速度势是否一致, 如果结果不满意, 可修改 α_0 的值, 或取 $j = j_0 - 2$, 重复步骤 (1) 和 (2), 直到得到满意的结果为止. 如图 4 中, 实线画出的曲线为当 $h = 2.0 \text{ m}$, $\omega = 4.5$, $\alpha = 2.92 \times 10^{-10}$ 时, 在 N 为 55, 111 二种情况下所得的近似正则解曲线, 由图可知, 所得解是稳定和收敛的, 而且我们的计算结果表明, 在流场中各不同的位置上 (即不同 x 处的垂向截面上), 正逆问题的速度势是吻合的. 图 5 所示仅为其中的一个例子, 即在 $x = 3.0 \text{ m}$ 处垂向截面上正逆问题速度势的比较. 由于正逆问题得到的整个流场都吻合得十分良好, 可以认为此时摇板上的总压力、流场中的速度分布及远场的辐射能量也应是吻合的.

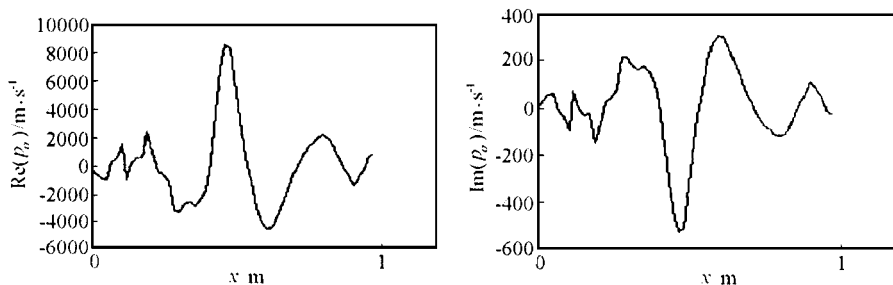


图 3 当 $\alpha = 5.725 \times 10^{-12}$ 时, (2.10) 的解. 此图表明, 积分方程 (2.4) 的解是不稳定的

Fig. 3 The solution of Eq. (2.10) when $\alpha = 5.725 \times 10^{-12}$, the figures show that the solution of the integral equation (2.4) is unstable

计算中, 我们详细考察了正则参数对正则解的影响. 结果表明, 正则参数 α 实际上起着“调节因子”的作用, 即若 α 取得较大, 则稳定泛函 $\Omega(p)$ 在光滑泛函中起的作用大, 稳定性好, 但是解的精度差. 如果 α 取得过小, 则解的稳定性差, 甚至不稳定. 图 4 中虚线示出的是当 $h = 2.0 \text{ m}$, $\omega = 4.5$, $\alpha = 2.92 \times 10^{-11}$ 时, 在 N 为 55, 111 二种情况下, 解的曲线, 由图可知, 当 $N = 55$ 时, 解的稳定性较差, 而当 $N = 111$ 时解开始趋于稳定, 但这时解的收敛性很差. 图 6 则为 $\alpha = 2.92 \times 10^{-7}$ 时正逆问题速度势在 $x = 3.0 \text{ m}$ 时的曲线, 与 $\alpha = 2.92 \times 10^{-10}$ 的结果相比, 显然它的精度要差. 由此可见, 稳定泛函 $\Omega(p)$ 实际上相当于一个“滤波器”, 即起着“过滤”解的高频振荡部分的作用. 可以证明, 当边界条件确定后, 积分微分方程 (2.7) 的解是存在唯一的, 同时存在

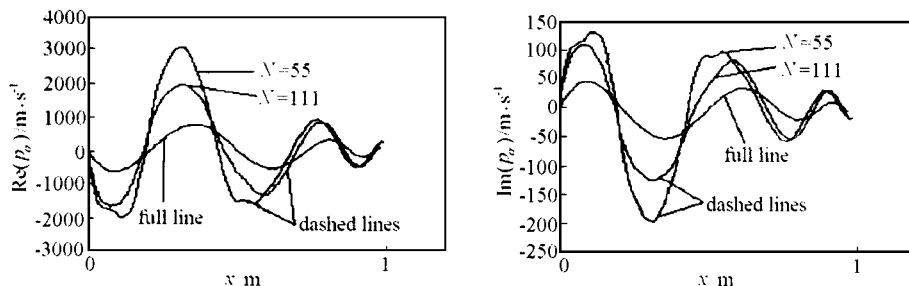


图4 正则参数对正则解的稳定性和收敛性的影响. 其中, 实线表示当 $\alpha = 2.92 \times 10^{-10}$ 时, 在 $N = 55, 111$ 二种情况下的近似正则解, 而虚线示出的则是当 $\alpha = 2.92 \times 10^{-11}$ 时, 在 $N = 55, 111$ 二种情况下, 方程(2.10)的解

Fig. 4 The effects of the regularization parameter on the stability and convergence of the regularized solution. Full lines represent the approximate regularized solution in the cases of $N = 55, 111$ when $\alpha = 2.92 \times 10^{-10}$, and dashed lines represent the solution of the Eq. (2.10) in the cases of $N = 55, 111$ when $\alpha = 2.92 \times 10^{-11}$

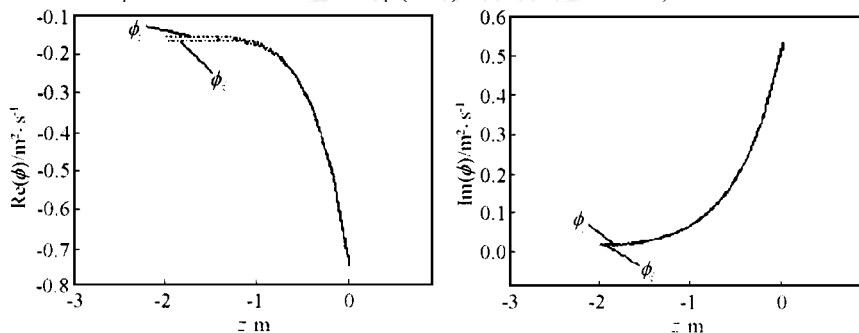


图5 当 $\alpha = 2.92 \times 10^{-10}$, $x = 3.0$ m 时, 正逆问题速度势之比较

Fig. 5 The corresponding velocity potentials of the direct and inverse problems for the case of $x = 3.0$ m when $\alpha = 2.92 \times 10^{-10}$

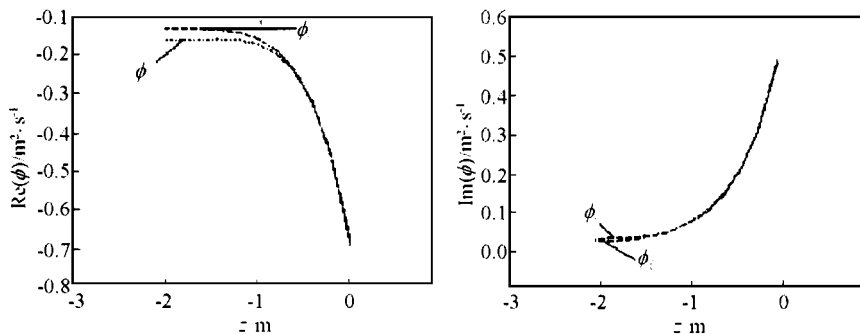


图6 当 $\alpha = 2.92 \times 10^{-7}$, $x = 3.0$ m 时, 正逆问题速度势之比较

Fig. 6 The corresponding velocity potentials of the direct and inverse problems for the case of $x = 3.0$ m when $\alpha = 2.92 \times 10^{-7}$

一个最佳的正则参数 α^* , 使所得正则解 p_{α^*} 与原积分方程(2.4)的解最接近^[5]. 由于求 α^* 的问题是一个非线性问题, 因此在实际求解中, 要求得这样的 α^* 是非常困难的, 所以, 通常我们只能得到 α^* 的一个近似值.

此外, 我们还考察了圆频率和水深对正则解的影响. 图7表明的是圆频率对正则解的影响, 其中 $h = 2.0$ m, ω 分别取 4.0, 4.5 和 5.0, 相应的正则参数 α 分别为 4.32×10^{-10} , 2.92×10^{-10} 和 2.12×10^{-10} . 图8表明的是水深对正则解的影响, 其中 $\omega = 4.5$, h 分别为 1.5 m, 2.0 m 和

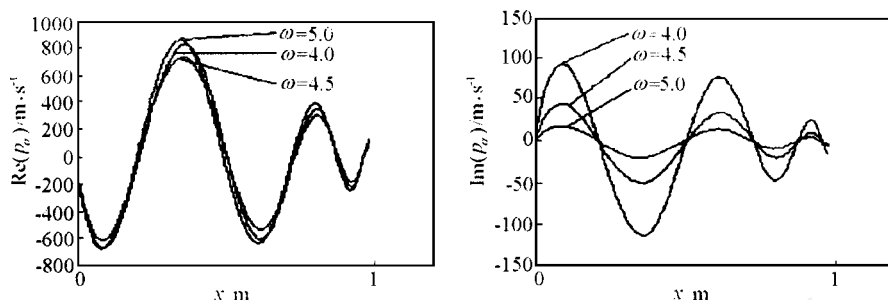


图 7 圆频率对正则解的影响

Fig. 7 The effects of the frequency on the regularized solution

2.5 m, 相应的正则参数 α 分别为 9.32×10^{-11} , 2.92×10^{-10} 和 5.12×10^{-10} . 由图可知, 水深和圆频率对正则解波形的影响并不太明显. 同样地, 当变化 α 的值时, 正则解波形的变化也并不太明显.

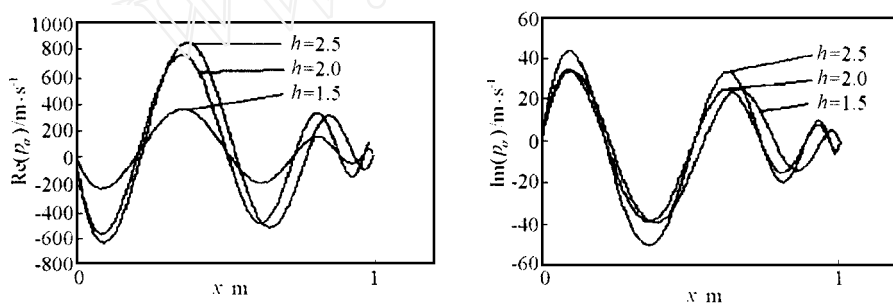


图 8 水深对正则解的影响

Fig. 8 The effects of the water depth on the regularized solution

4 结束语

上述结果及其分析表明, 就二维半无限长水槽的摇板造波问题而言, 确实存在这样一个适当的自由面压力脉动, 使得在水槽中, 它能与摇板运动一样产生同样的流场. 鉴于在这一问题潜在的理论和实用意义, 对任意形状的浮体作进一步的探索将是非常有意义的.

参 考 文 献

- 1 Ertekin RC, Webster WC, Wehausen JV. Waves caused by moving disturbance in a shallow channel of finite width. *J of Fluid Mech*, 1986, 169: 275 ~ 291
- 2 缪国平, 刘应中. 有限深水表面压力脉动产生的速度势与二阶绕射问题的辐射条件. *中国造船*, 1989(107): 1 ~ 13
- 3 缪国平, 刘应中. *海洋工程水动力学基础*. 北京: 海洋出版社, 1991. 80 ~ 86
- 4 Kress, R. *Linear Integral Equations*. Berlin: Springer-Verlag World Publishing Corp, 1989. 221 ~ 258
- 5 李世雄, 刘家琦. *小波变换和反演数学基础*. 北京: 地质出版社, 1994. 138 ~ 151

**ON THE EQUIVALENCE BETWEEN THE FREE SURFACE
DISTRIBUTION PRESSURE PULSATING AND WAVEMAKING
BY A FLAT-PLATE TYPE WAVE GENERATOR**

Miao Guoping You Yunxiang Liu Yingzhong

(*Department of Naval Architecture and Ocean Engineering,
Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China*)

Abstract An inverse problem aimed to find the equivalence relationship between the free-surface pressure distribution and floating body motion is considered in the present paper. We choose a simple wave generation problem in a 2-D wave tank for analysis, in the linear potential regime, a Fredholm integral equation of the first kind with a complex kernel that determines the free-surface pressure distribution is obtained. Regularization approach is adopted to tackle this ill-posed integral equation.

The present study manifests that the equivalence relationship between the free-surface distribution pressure pulsating and wavemaking by a flat-plate type wave generator could be practically established by solving the corresponding inverse problem.

Key words pressure distribution, wave generation, inverse problem, regularization method