第 29 卷 第 5 期
1997 年 9 月

力 学 学 报
ACTA MECHANICA SINICA

Vol. 29, No. 5
Sept., 1997

非惯性参考系中弹性壳的非线性振动分析1)

傅衣铭　　张思进
(湖南大学工程力学系,长沙 410082)

摘要　给出了弹性壳处于非惯性参系中的运动描述,基于 Hamilton 原理建立了中厚壳在非惯性参考系中的非线性运动控制方程,应用多尺度法及谐波平衡法具体地分析了圆柱壳的非线性振动问题.

关键词　非惯性参考系,圆柱壳,非线性振动

引　言

非惯性参考系中弹性体的动力学研究始于 80 年代. 1980 年,Arnold[1]提出了变形体的哈密顿原理. 1989 年,Banerjee 和 Kane[2],采用线性化手段研究了大空间运动中板的动力学特性. 稍后,Boutaghou[3]和 BilinChang[4]运用有限元法分析了梁与板在非惯性系中的动力响应问题. 但由于该问题的研究起步较晚,至今已有研究成果不多.

1　运动学关系、非线性运动控制方程

考虑一弹性壳体在惯性系 I 中运动,取固结在壳体约束边界上的一点 O 为相对坐标系 N 的原点,采用笛卡尔坐标,且设 $a_e, e_i\ (i = 1, 2, 3)$ 分别为 I 系和 N 系的基矢量. 取壳体中面的任一单元,以 c_i 为基矢的正交曲线坐标系 (α, β, γ) 在壳的中面上流动,如图 1 所示. 设 $r_0 = r_0(\alpha, \beta, t)$ 为 t 时刻壳中面上的任一点在 N 系中的位矢,在该点法线方向上有相距为 γ 的一点 P,其变形前的位矢为 r,变形后的位矢为 r^*;又设 $\bar{u}_i$ 为 P 点在直角坐标中的位移分量,而 $\bar{u}_i$ 为 P 点在正交曲线坐标系下的位移分量,则由图 1 可知,在 N 系中有如下几何关系: $r^* = r + \overline{u_i e_i} = r + \bar{u}_{c_i} = r^0 + \gamma c_3 + \bar{u}_i c_i$,式中 $r = x_i e_i$, $r^0 = x_i^0 e_i$. 若设 R_0 为 I 系原点 O 到 N 系原点 O 之间的矢径,且设在 I 系中 P 点变形后的位矢为 R,则在 I 系中 $R = R_0 + r^*$. 我们在惯性系 I 中计算 P 点变形后的速度 V,则

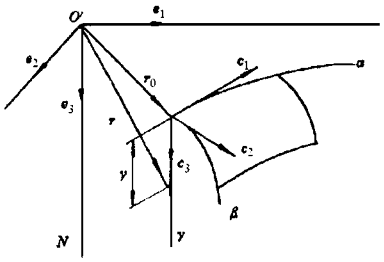

图 1　相对坐标系中壳的中面单元

Fig. 1　An element on the middle surface of shell in a relative condinate system

$$V = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R_0 + r^*) = V_0 + \omega \times r^* + \dot{\bar{u}}_i c_i \tag{1}$$

式中 V_0 表示 N 系原点 O 的速度,ω 表示 N 系相对于惯性系 I 的角速度. 而基矢 c_i 与基矢 e_i

1) 国家自然科学基金资助项目.

1996-06-13 收到第一稿,1997-01-02 收到修改稿.

之间有变换关系：$c_1 = \frac{1}{A} x^0_{i,\alpha} e_i$，$c_2 = \frac{1}{B} x^0_{i,\beta} e_i$，$c_3 = c_1 \times c_2$，其中 A，B 为壳中面上任一点的拉梅系数．将以上代入 r^* 的表达式，可得坐标变换系数 $x i_i$ 和 $n_{ij}(i, j = 1,2,3)$．

对于一般中厚壳，类似于 Timoshenko-Mindlin 关于中厚板的假定，采用中面位移及中面法线的转角来表示壳中任一点 P 在 t 时刻的三个位移分量，则

$$\bar{u}_i(\alpha, \beta, \gamma, t) = u_i(\alpha, \beta, t) + \gamma \phi_i \qquad (i = 1,2,3) \tag{2}$$

上式中 ϕ_1，ϕ_2 分别为中面法线在 $\alpha\varphi$ 面内和 $\beta\gamma$ 面内的转角，$\phi_3 = 0$．而根据壳几何非线性理论，由(2)式易得壳的格林应变分量 e_{ij} 与位移分量的关系式．

设 ρ 为壳的密度，h 为厚度，且壳仅承受横向均布荷载 q，应用哈密顿作用量原理[1]，得到一般中厚壳体用中面位移和转角表示的非线性运动控制方程组

$$\left.\begin{aligned}
&AB\rho h n_{ij}[-\ddot{u}_k n_{kj} + \omega^2(x^0_j + n_{kj}u_k) - \omega^*_j\omega^*_k(x^0_k + n_{lk}u_l) - a^*_{oj} + 2\omega^*_l e_{jk\lambda} n_{rk}\ddot{u}_l + \\
&\varepsilon^*_l e_{jkl}(x^0_k + n_{rk}u_r)] + F^*_i = 0 \qquad (i, j, k, l = 1,2,3) \\
&\frac{1}{12}AB\rho h^3 n_{ij}[-\ddot{\phi}_k n_{kj} + \omega^2(\xi_j + n_{kj}\phi_k) - \omega^*_j\omega^*_s(\xi_s + n_{rs}\phi_r) + 2\omega^*_s e_{jps} n_{rp}\phi_r + \\
&\quad \varepsilon^*_s e_{jps}(\xi_p + n_{rp}\phi_r)] + M^*_i = 0 \qquad (i, k, r = 1,2;\ j, s, p = 1,2,3)
\end{aligned}\right\}$$

$$\ddot{w}_{mn}+c_{26\overline{mn}}^{l}\Omega_3\dot{u}_{ml}+c_{27\overline{mn}}\Omega_1\dot{v}_{mn}+c_{28mn}^{kl}\Omega_2\dot{v}_{kl}+c_{29mn}^{kl}\Omega_3\dot{w}_{kl}+c_{30\overline{mn}}\Omega_1^2 w_{mn}+$$
$$\Omega_2^2(c_{31mn}+c_{32\overline{mn}}^{l}w_{ml})+\Omega_3^2(c_{33mn}+c_{34\overline{mn}}^{l}w_{ml})+\Omega_1\Omega_2(c_{35mn}+c_{36\overline{mn}}^{l}u_{ml}+$$
$$c_{37mn}^{l}w_{kl})+c_{38mn}^{kl}\Omega_1\Omega_3 v_{kl}+\Omega_2\Omega_3 c_{39\overline{mn}}^{l}v_{ml}+c_{40\overline{mn}}\in_1 v_{mn}+c_{41mn}^{kl}\in_2 v_{kl}+$$
$$\in_3(c_{42mn}+c_{43\overline{mn}}^{l}u_{ml}+c_{44mn}^{kl}w_{kl})+c_{45mn}^{k}u_{kn}+c_{46\overline{mn}}w_{mn}+c_{47mn}^{klrs}w_{kl}u_{rs}+$$
$$c_{48mn}^{klrs}w_{kl}w_{rs}+c_{49mn}^{klrsqp}w_{kl}w_{rs}w_{qp}+Q_{mn}=0\quad(m,n,k,l,r,s,p,q=1,2,3,\cdots)\tag{5c}$$

式中系数 c_1 到 c_{49} 为积分常数,因篇幅所限,在此不予列出.

2 定点转动圆柱壳的非线性振动

此时,圆柱壳绕相对坐标系的原点 O 作三轴转动,设绕 x, y, z 轴的角速度分别为 Ω_1, Ω_2, Ω_3,且均为常数,则角加速度 $\in_1=\in_2=\in_3=0$. 为突出问题本质,取方程(5)的一阶模态进行分析,略去方程中的下标,且设外荷载 $Q=q\cos\Omega\tau$. 在此情况下,(5a)式是独立的沿 x 方向的纵向振动方程,在此不予考虑. 而横向和圆周方向的振动相互耦合,且通过角速度 Ω_1 来实现. 在圆周方向上系统的阻尼为负,在横向上系统的阻尼为正,这意味着能量将从横向振动转移到圆周方向的扭转振动,从而产生弯 - 扭组合振动. 设 ε 为振幅量值的一阶小量 $(0\ll\varepsilon\ll1)$,且设 $\Omega_1=\varepsilon\lambda$,又设 $c_{49}=\varepsilon k$, $q=\varepsilon f$,于是方程(5b)和(5c)简化为

$$\ddot{v}+p_2^2 v-\frac{1}{\pi}\varepsilon\lambda\dot{w}=0,\qquad \ddot{w}+p_3^2 w+4\pi\varepsilon\lambda\dot{v}+\varepsilon k w^3+\varepsilon f\cos\Omega\tau=0\tag{6}$$

式中 $p_2^2=c_{25}-\Omega_1^2$, $p_3^2=c_{46}-\Omega_1^2$ 为系统在两个相互垂直方向上的动刚度. Ω_1 应满足使 p_2^2, p_3^2 大于零的条件. 通常 $P_2\gg p_3$,为此定义一个使 $p_3^2=0$ 的角速度: $\Omega_{cr}=\sqrt{c_{46}}$ 为临界角速度,当转速 Ω_1 超过 Ω_{cr} 时,圆柱壳将产生动力屈曲.

现采用多尺度法求解方程(6),取两个时间尺度: $T_0=\tau$, $T_1=\varepsilon\tau$;且将 v, w 展为 ε 的幂级数;将以上代入(6)中,令 ε 的同次幂项相等,得零阶与一阶摄动方程

$$\left.\begin{aligned}
&D_0^2 v_0+p_2^2 v_0=0\\
&D_0^2 w_0+p_3^2 w_0=0\\
&D_0^2 v_1+p_2^2 v_1=-2D_0D_1v_0+\frac{1}{\pi}\lambda D_0 w_0\\
&D_0^2 w_1+p_3^2 w_1=-2D_0D_1w_0-4\pi\lambda D_0 v_0-kw_0^3-f\cos\Omega\tau
\end{aligned}\right\}$$

$\beta - \alpha - pT_1$, $\gamma_2 = \sigma T_1 - \beta$,则由稳态解条件: $a' = b' = \gamma_1' = \gamma_2' = 0$,得稳态响应方程

$$b\cos\gamma_1 = 0 \tag{8a}$$

$$4\pi\lambda p_2 a\cos\gamma_1 + \frac{1}{2}f\sin\gamma_2 = 0 \tag{8b}$$

$$4\pi\lambda p_2^2 a\sin\lambda_1 + 3kp_2ab^3 + \frac{1}{2}fp_2\cos\gamma_2 - \frac{1}{\pi}\lambda p_3^2 b^2\sin\gamma_1 - 2p_2p_3ab\rho = 0 \tag{8c}$$

$$4\pi\lambda p_2 a\sin\gamma_1 + 3kb^3 + \frac{1}{2}f\cos\gamma_2 - 2p_3b\sigma = 0 \tag{8d}$$

对(8)的求解分两种情况讨论:1°当 $b = 0$ 时,即无横向运动,则求得一个平凡解 $a = 0$,及确定非平凡解的方程组,由该方程组求得 $4\pi\lambda p_2 a = \frac{1}{2}f$,这表明圆周方向振动的幅值与频率无关,此时圆周方向发生的是线性自由扭转振动. 2°当 $\cos\gamma_1 = 0$ 时,即 $\gamma_1 = n\pi + \frac{\pi}{2}$,则由(8b)式得 $\gamma_2 = m\pi$. 将 γ_1 和 γ_2 的值代入(8c),(8d),即得关于弯扭组合振动时的幅频响应方程,所得幅频响应关系如图2所示. 此时,若外激励的频率低于系统的固有频率,则横向上无振动,而圆周方向上为线性自由振动. 当激励频率接近系统的固有频率时,横向上的振动幅值开始由零增大,并向右倾斜;而圆周方向上的振动幅值随调谐参数的增大而减小. 这时圆柱壳产生了弯-扭组合共振.

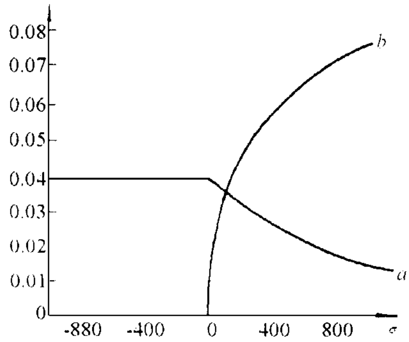

图2　极短圆柱壳的组合共振

$(\Omega_1/\Omega_{cr} = 0.4,\ f = 500\ \lambda_1 = \frac{1}{20}\ \lambda_2 = 1$

Fig. 2　The combination resonances of the shortest circular cylindrical shell

3　单轴转动圆柱壳的非线性振动

从上节分析可知,对低阶模态振动影响较大的是角速度 Ω_1. 现在设基座仅绕 x 轴转动,此时 $\Omega_2 = \Omega_3 = 0$,考虑到圆柱壳的纵向运动远远小于其它两个方向上的运动,因而在(5a)式中令惯性项 $\ddot{u}_{mn} = 0$,则可解出 u_{mn} 并将其代入(5b)和(5c),得

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{v}_{mn} + c_{14}\Omega_1\dot{w}_{mn} + (c_{25\overline{mn}} + c_{15}\Omega_1^2)v_{mn} = 0\\&\dot{w}_{mn} + c_{27\overline{mn}}\Omega_1\dot{v}_{mn} + (c_{46\overline{mn}} + c_{30\overline{mn}}\Omega_1^2)w_{mn} + \bar{c}_{1\overline{mn}}^{k}w_{kn} + \bar{c}_{2mn}^{klrs}w_{kl}w_{rs} +\\&\bar{c}_{3mn}^{klrspq}w_{kl}w_{rs}w_{pq} + Q_{mn} = 0\quad(m,n,k,l,r,s,p,q = 1,2,3,\cdots)\end{aligned}\right\}$$

$$v_{mn} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_{mn}^{(j)} \cos j\Phi + b_{mn}^{(j)} \sin j\Phi \right), \qquad w_{mn} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(d_{mn}^{(j)} \cos j\Phi + e_{mn}^{(j)} \sin j\Phi \right) \tag{10}$$

将(10)代入(9)后,令 $\cos j\Phi$ 与 $\sin j\Phi$ 同次谐波项前的系数相等,得一组确定系数 $a_{mn}^{(j)}$, $b_{mn}^{(j)}$, $d_{mn}^{(j)}$, $e_{mn}^{(j)}$的非线性代数方程组,而该方程组的建立及求解全由计算机完成. 定义各模态的振幅为 $A_{mn}^{(j)} = \sqrt{(a_{mn}^{(j)})^2 + (b_{mn}^{(j)})^2}$, $B_{mn}^{(j)} = \sqrt{(d_{mn}^{(j)})^2 + (e_{mn}^{(j)})^2}$. 易求得壳的 1/3 亚谐共振响应曲线,因其与相应的主共振响应曲线类似,在此不再给出. 此时,由于(1,1)和(1,3)模态的固有频率之间满足内共振条件,因而在横向上一次谐波与三次谐波的振幅 $B_{11}^{(1)}$和 $B_{13}^{(3)}$均被激发到较大值. 且它们都随着频率比的增加而增加,但频率比超过 1.3 后,$B_{11}^{(1)}$下降而 $B_{13}^{(3)}$继续增大,如图 3 所示. 又由于非惯性系的影响将使壳在圆周方向上的运动和横向运动处于同一数量级,因而不能忽略圆周方向自身的振动,此时,由于(1,1)和(1,3)模态之间的内共振,在圆周方向上的一次谐波与三次谐波的振幅 $A_{11}^{(1)}$和 $A_{13}^{(3)}$也被激发到较大的数值,如图 4 所示. 壳的横向与圆周方向同时被激发内共振,这是系统处于非惯性系中所独特具有的现象.

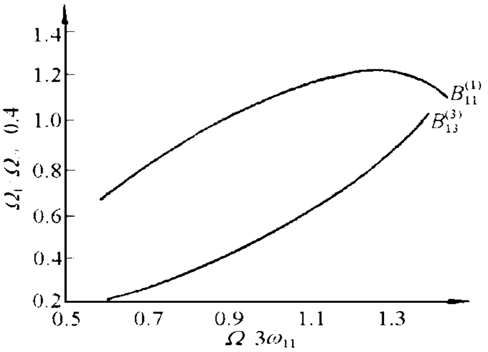

图 3　1/3 亚谐共振时横向上的幅频响应曲线

$(f = 5.0, L = 0.44, R = 0.3, h = 0.02)$

Fig. 3 The amplitude - frequency response curves of 1/3 subharmonic resonance in the transverse direction

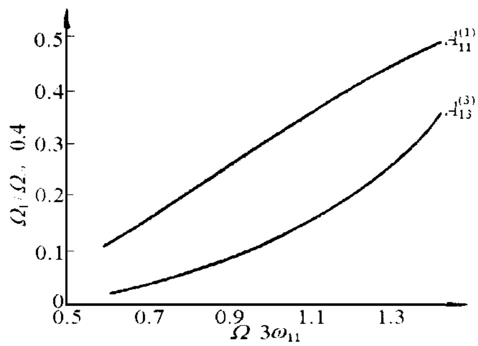

图 4　1/3 亚谐共振时圆周方向上的幅频响应曲线

$(f = 5.0, L = 0.44, R = 0.3, h = 0.02)$

Fig. 4 Theamplitude - frequency response curves of 1/3 subharmonic resonance in the circumferential direction

参 考 文 献

1　Arnold. Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer-Verlag, 1980

2　Banerjee AK, Kane TR. Dynamics of a Plate in Large overall Motion. *J of Applied Mechanics*, 1989, 56: 887～891

3　Boutaghou ZE. Dynamic of Flexible beams and plates in large overall motions. *J of Applied Mechanics*, 1992, 59: 991～1004

4　Bolin Chang, Shabana A. Finite element formulation for the large displacement analysis of pletes. *J of Applied Mechanics*, 1990, 57:707～717

ANALYSIS OF NONLINEAR VIBRATION FOR ELASTIC SHELLS IN A NON-NEWTONIAN REFERENCE FRAME

Fu Yiming　Zhang Sijin

(Department of Engineering Mechanics, Hunan University, Changsha 410082, *China)*

Abstract　The kinetic description of elastic shell is presented under a non-Newtonian reference frame. Based on the Hamilton's principle, a system of nonlinear equations governing the motion of the moderate thick shells are set up in a non-Newtanian reference frame. By using the multiply scale method and the harmonic balance method, the nonlinear vibration of circular cylindrical shells are analyzed.

Key words　non-Newtanian reference frame, circular cylindrical shell, nonlinear vibration