# 不确定凸模型近似算法的一种改进[1)]

邱志平　　顾元宪
(大连理工大学工程力学研究所，大连 116024)

**摘要**　将非概率凸模型理论与摄动理论相结合，通过有界不确定参数结构的特征值问题，对凸模型理论的一次近似算法作出一种改进. 改进后的算法由于在计算中不用特征值导数，与 Elishakoff 的算法相比，不仅拓广了凸模型理论的应用范围，而且还可提高算法的计算效率.

**关键词**　有界不确定参数，特征值，凸模型理论，摄动，一次近似

## 引　言

对大多数结构振动问题，人们难于求得结构固有频率或特征值的精确值，而只能求得近似值. 这样，给出结构真实特征值所在的范围$\underline{\lambda} \le \lambda \le \bar{\lambda}$，无论在理论上还是在实际工程中都有着重要的意义. 目前，求特征值下界$\underline{\lambda}$主要有 Temple[1]和 Weinstein[2]等人的方法，而求特征值上界$\bar{\lambda}$主要有 Rayleigh-Ritz 和 Galerkin[3]等人的方法. 而能同时给出特征值上下界的方法主要有胡海昌[4]的质量包含定理和刚度包含定理以及陈绍汀[5]的复特征值界限定理.

上述求解特征值所在区间的方法所涉及到的近似性主要是方法的近似性，没有考虑到结构参数的近似性. 而结构参数的近似性一般指结构参数具有误差或不确定性. 尽管概率统计方法[6,7]研究不确定结构响应的问题很成功，但由于数值计算中涉及到不确定变量的概率统计特性并不总能事先给出. 有时即使给出，由于样本的大小受实际情况和经济上考虑的限制，也必然存在某种程度上的误差或不确定性. 近几年来，研究不确定结构响应的非概率凸模型理论应运而生. 如椭球模型[7,8]，区间分析[9]等. 这种理论将不确定变量视为有界的，而将其包含在一集合中，如椭球或区间，然后分别用优化技术或区间数学来求解结构响应所在的范围. 目前，这些理论已成功地解决不少理论问题和工程问题[7~9].

## 1　问题的定义

考虑结构振动的特征值问题

$$K(\alpha)u = \lambda M(\alpha)u \tag{1}$$

式中 $K(\alpha) = (k_{ij}(\alpha))_{n\times n}$为结构的总刚度矩阵，$M(\alpha) = (m_{ij}(\alpha))_{n\times n}$结构的总质量矩阵，$\alpha = (\alpha_i)_m$ 是结构的不确定参数. $\lambda$是结构的特征值而$u$为相应的特征值向量.

为求解和分析问题的方便，将 $K$和$M$分解为确定的与不确定的两部分$K = K_0 + \Delta K$和$M = M_0 + \Delta M$其中$K_0$与$M_0$分别称为确定或标称系统的刚度矩阵与质量矩阵，而$\Delta K$和$\Delta M$则组成不确定系统且表示为

$$\Delta K = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_j,\quad \Delta M = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j M_j \tag{2}$$

1) 博士后科学基金和国家杰出青年科学基金资助项目.
1995-08-29 收到第一稿，1996-01-23 收到修改稿.

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

式中 $K_j$ 与 $M_j$ 分别是与不确定参数分量 $\alpha_j$ 相对应的刚度矩阵与质量矩阵.

按照凸模型理论[7,8]，在参数空间中，不确定参数均可用如下表示的椭球 进行定量化

$$E(\theta, W) = \{\boldsymbol{\alpha}: \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} W \boldsymbol{\alpha} \le \theta^2\} \tag{3}$$

式中 $W = (w_{ij})_{m \times m}$ 为加权矩阵，$\theta$ 是椭球半径. $W$ 和 $\theta$ 一起表示不确定参数的不确定程度. 当 $\theta \neq 0$ 时，椭球 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} W\boldsymbol{\alpha} \le \theta^2$ 可转化为半径是 1 的椭球 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(W/\theta^2)\boldsymbol{\alpha} \le 1$. 而加权矩阵为对角阵和半径为 1 的椭球将很容易由实验或其他方法所获得的有界不确定参数确定出[7,8]

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} W \boldsymbol{\alpha} \le 1 \tag{4}$$

式中 $W = \mathrm{diag}(\sqrt{m}\,\Delta_1, \sqrt{m}\,\Delta_2, \cdots, \sqrt{m}\,\Delta_m$.

当结构参数在 (3) 式所表示的范围内变化时，结构特征值的变化范围可由下面的集合表示

,7 如椭 $$\left\{\lambda : \lambda \in R^n, \left(K_0 + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_j\right) u = \lambda\left(M_0 + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j M_j\right) u,\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} W \boldsymbol{\alpha} \le \theta^2\right. \tag{5}$$

本文的主要问题是: 如何确定包含有界不确定参数结构特征值所在集合 (5) 的最小超长方体或最大可能特征值 $\lambda_{\max} = (\lambda_{i\max})_n$ 和最小可能特征值 $\lambda_{\min} = (\lambda_{i\min})_n$，即

$$\lambda_{\min} \le \Gamma \le \lambda_{\max} \tag{6}$$

## 2　有界不确定参数结构特征值的上下界公式

设确定 (或标称) 系统 $< K_0, M_0 >$ 所满足的控制方程为

$$K_0 u_{0i} = \lambda_{0i} M_0 u_{0i}, \qquad u_{0i}^{\mathrm{T}} M_0 u_{0i} = 1 \tag{7}$$

而不确定系统 $< K_0 + \Delta K, M_0 + \Delta M >$ 所满足的特征值问题为

$$(K_0 + \Delta K) u_i = \lambda_i (M_0 + \Delta M) u_i, \qquad u_i^{\mathrm{T}} (M_0 + \Delta M) u_i = 1 \tag{8}$$

式中 $u_i = u_{0i} + \Delta u_i$, $\lambda_i = \lambda_{0i} + \Delta\lambda_i$.

(8) 式中第一式减去 (7) 式中第一式并利用归一化条件，忽略二阶以上的高次项，可得

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \Delta\lambda_i = \lambda_{0i} + u_{0i}^{\mathrm{T}}(\Delta K - \lambda_{0i}\Delta M) u_{0i} = \lambda_{0i} + g_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} \tag{9}$$

将 (2) 式代入 (9) 式，整理得

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_{0i}^{\mathrm{T}}(K_j - \lambda_{0i} M_j) u_{0i} = \lambda_{0i} + g_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} \tag{10}$$

式中 $g_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为矩阵 $G = (G_{ij}) = (u_{0i}^{\mathrm{T}}(K_j - \lambda_{0i} M_j) u_{0i})$ 的第 $i$ 行的行向量.

当不确定参数 $\alpha$ 在椭球 (3) 式所表示的范围内变化时，通过优化技术[7,8]，可以确定出结构特征值上界的一阶近似 $\lambda_{i\max}$ 特征值下界的一阶近似 $\lambda_{i\min}$，即

$$\lambda_{i\max} = \max_{\boldsymbol{\alpha} \in E(\theta, W)} \{\lambda_{0i} + g_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\}, \quad \lambda_{i\min} = \min_{\boldsymbol{\alpha} \in E(\theta, W)} \{\lambda_{0i} + g_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{11}$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

凸模型的理论已经证实[8,9]，(11) 式的极值将在 (3) 式所表示的椭球区域的边界—椭球壳

$$S(\theta, W) = \{\alpha : \alpha^{T} W \alpha = \theta^{2}\} \tag{12}$$

上达到. 这样，(11) 式可写成

$$\lambda_{i\max} = \max_{\alpha \in S(\theta, W)} \{\lambda_{0i} + g_i^{T}\alpha\}, \quad \lambda_{i\min} = \min_{\alpha \in S(\theta, W)} \{\lambda_{0i} + g_i^{T}\alpha\}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{13}$$

从而，有界不确定参数结构特征值的界限问题便可转化成在约束条件 $\alpha^{T} W\alpha - \theta^{2} = 0$ 下的极值问题

$$\lambda_i = extremum\{\lambda_{0i} + g_i^{T}\alpha\}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{14}$$

设拉格朗日函数为

$$L_i = \lambda_{0i} + g_i^{T}\alpha + \mu_i(\alpha^{T} W\alpha - \theta^{2}) \tag{15}$$

由取极值的必要条件，得

$$\alpha = -W^{-1} g_i / 2\mu_i \tag{16}$$

(13) 式，(14) 式和 (16) 式联立解得

$$\lambda_{i\max} = \lambda_{0i} + \theta\sqrt{g_i^{T} W^{-1} g_i}, \quad \lambda_{i\min} = \lambda_{0i} - \theta\sqrt{g_i^{T} W^{-1} g_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{17}$$

从 (17) 式可以看出，结构特征值的不确定程度是随着不确定参数的不确定程度 (即椭球的半径和加权矩阵的逆) 的增加而增加，要减少特征值的不确定程度必须减少结构参数的不确定程度.

## 3　数值算例

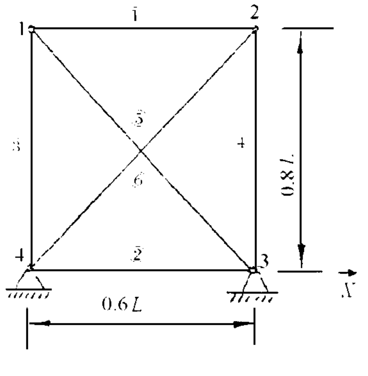



图 1　桁架

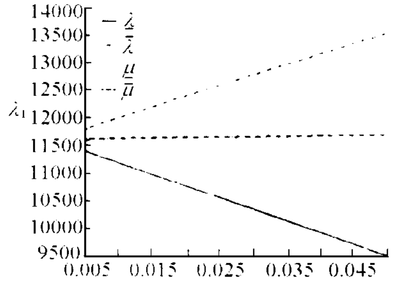
Fig. 1 A truss

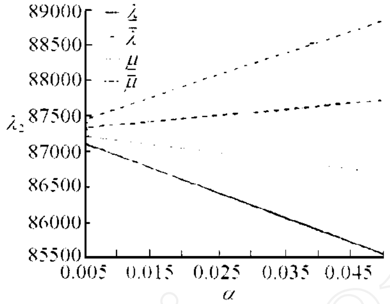
为便于分析和比较，考虑如图 1 所示的桁架. 结构参数为：弹性模量 $E = 2.1 \times 10^{4}$ N/m²，杆长 $L = 1$ m，杆横截面面积标程值 $A = 1.6 \times 10^{-4}$ m²，质量密度的标程值 $\rho = 7.8 \times 10^{3}$ kg/m³. 而各杆横截面面积 $A_i = (1 + a_i) A$，$i = 1, \cdots, 6$，质量密度 $\rho_i = (1 + b_i)\rho$，$i = 1, \cdots, 6$，为不确定参数. 这样，具有不确定参数桁架的总刚度矩阵为 $K = K_0 + \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3$，而总质量矩阵为 $M = M_0 + \alpha_4 M_4 + \alpha_5 M_5$，$K_0$ 和 $M_0$ 为标程系统的总刚度矩阵和总质量矩阵，$K_1$，$K_2$ 和 $K_3$ 以及 $M_4$ 和 $M_5$ 分别是与不确定参数 $\alpha_i$，$i = 1, \cdots, 5$ 相对应的单元刚度矩阵和质量矩阵.

为对比本文方法的有效性，用文献 [9] 所提出的结构特征值区间摄动法和本文改进的方法，对图 1 所示的桁架进行数值演算，结果如图 2～图 5 所示. $\overline{\lambda}$ 和 $\underline{\lambda}$ 表示由本文改进的方法计

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

算出的桁架特征值的上下界, $\overline{\mu}$和$\underline{\mu}$表示由区间摄动法计算出的桁架特征值的上下界. 从图 2～图 5 中可以看出, 由区间摄动法求得的低阶特征值上下界的宽度要比本文改进的方法求得的要小得多, 而高阶特征值上下界的宽度由本文改进的方法求得的要比区间摄动法计算出的要小. 初步看来, 求低阶特征值的界限时, 用区间摄动法要比用本文改进的方法的效果要好, 而求高阶特征值界限最好用本文改进的方法.



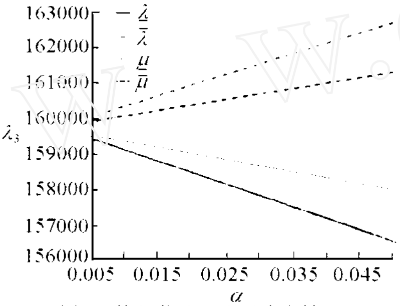




图 4　特征值 $\lambda_3$ 的不确定性
Fig.4　Uncertainty in eigenvalue $\lambda_3$

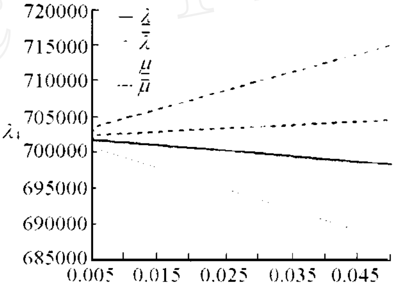



图 5　特征值 $\lambda_4$ 的不确定性
Fig.5　Uncertainty in eigenvalue $\lambda_4$

## 4　结　论

作为对概率统计方法研究不确定现象的补充, 凸模型理论[8,9]用凸集合 —椭球对不确定变量进行定量化, 从而开辟了一条新的研究不确定现象途径. 将凸模型理论与数值计算方法的摄动理论相结合, 对凸模型理论的一阶近似算法进行改进, 由于改进后的算法不用计算导数, 这样, 不仅拓广了凸模型理论的适用范围, 而且可有效地提高计算效率. 改进的方法虽然是针对特征值问题导出的, 但是对其他具有不确定性结构响应的数字计算问题同样适用.

## 参　考　文　献

1 Temple G. The Accuracy of Rayleigh's Method of Calculating Natural Frequencies of Vibrating Systems. Proceeding of the Royal Society of London, 1952, A211 (1105): 204

2 Weistein DH. Modified Ritz Method. Proceeding of the National Academy of Science. 1934, 20 (9): 529～532

3 Rayleigh L. Theory of Sound. 1945

4 胡海昌. 多自由度结构固有振动理论. 北京: 科学出版社, 1987. 39

5 陈绍汀. 复固有频率的界限定理. 力学学报, 1985, 17 (4): 324～328

6 朱位秋. 随机振动. 北京: 科学出版社, 1992

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

7 Elishakoff I, Lin YK, Zhu L P. Probabilistic and Convex Modeling of Acoustically Excited Structures. Elsevier Science Publishers B. V., 1994

8 Ben-Haim Y, Elishakoff I. Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics. Elsevier Science Publishers B. V., 1990

9 邱志平. 不确定参数结构静力响应和特征值问题的区间分析方法. 吉林工业大学博士论文, 1994

# AN IMPROVEMENT OF THE APPROXIMATE SOLUTION TO CONVEX MODELS OF UNCERTAINTIES

Qiu Zhiping Gu Yuanxian

( *Research Institute of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian* 116024, *China* )

**Abstract** In terms of the eigenvalue problem with uncertain parameters, by means of non-probabilistic, convex modeling combined with perturbation theory, an improvement is made on the first order approximate solution inconvex models of uncertainties. Without calculating the derivative of eigenvalues, the improved method not only can widen application of convex modeling, but also can greatly increase the efficiency ofcomputations.

**Key words** uncertain but bounded parameters, eigenvalues, convex set theory, perturbation, first order approximetion

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net