

动态裂纹扩展中的裂纹滞留现象¹⁾

李湘平 孟宪红 柳春图 王 凯

(中国科学院力学所, 北京 100080)

摘要 借助于 J. R. Willis 等 (1995) 的动态权函数和 Rice 等 (1994) 的模拟方法, 本文研究了裂纹前方开始环绕和穿透介质中各种粗糙微粒而形成粗糙的裂纹表面等非稳定现象. 数值结果表明: 在 I 型情形, 振荡性裂纹前缘运动源于应力强度波的建设性—破坏性相互作用. 这些波包括膨胀波、剪切波和瑞利波系, 彼此相互干涉且与裂纹运动边界相互作用, 导致了裂纹前方扩展路径和扩展速度的连续波动.

关键词 动态断裂, 粗糙微粒, 三维, 扩展, 扰动, 相互作用

引言

裂纹通过非均匀局部韧性介质的微观力学分析在材料强韧化研究中有着重要的意义. 一般地, 由于微观水平的各向异性, 断裂阻力 (或局部断裂韧性) 沿一宏观扩展裂纹前方是变化的. 例如二相硬粒子作用使脆性基体能产生强韧化. 这相当于一称之为“裂纹滞留”过程. 在这一过程中裂纹前方扩展是非均匀的, 并且某些部分, 通过接触强韧化粒子, 至少暂时地被滞留 (或止裂). 这些粒子比周围基体具有更高的断裂韧性^[1,2]. 这一问题包括显著的三维特征, 且由于数学上困难常缺乏理论上严格分析.

同样裂纹在非均匀局部韧性介质中快速扩展的分析在地震学研究中也倍受注意. 最近现代数据处理技术用于确定地震源时间函数, 已揭示出在某些情况这一函数由许多离散脉冲所组成, 具有相当的复杂性^[3,4]. 这种复杂的地震波辐射被认为是在地震源断裂过程中各向异性的显著结果. 目前两种模型被用来解释这种各向异性. 即所谓“障碍模型” (barrier model) 和“粗糙微粒模型” (the asperity model); 第一种模型^[5]假定地震裂带由强障碍 (在整个断裂过程中不破裂) 隔开的多个剪切型裂纹组成. 如果裂纹相隔较远, 这个模型容易解释在源时间函数中观察到的“子脉冲”现象. 第二种模型由 Kanamori 和 Stewart^[3]及 Madariaga^[4]所建议, 并由 Rudnicki 和 Kanamori^[6]及 S. Das 和 B. V. Kostrov^[7]所详尽考察. 建议地震裂带沿夹杂许多强的高应力降的粗糙微粒的基体中传播, 这些粗糙粒子的破裂产生了子脉冲现象. 但这些研究还停留在现象观察和概念方法探讨上, 与真实连续宏观裂纹理论缺乏肯定关系.

Rice 等^[8]最近从模拟弹性动力学理论出发, 研究了一运动半无限裂纹, 当裂纹边具有扰动效应时产生相应的应力强度因子历史的问题. 然后用所得解来研究在某些基本情形下, 裂纹前方如何越过具有局部变化断裂韧性的非稳态现象. 尽管在某些方面这样的模型结果可提供粗糙断裂表面生成机理. 重要的是如何在真实弹性动力学理论框架上来更深入地考虑问题.

¹⁾ 国家自然科学基金和中科院青年科学基金资助项目.

1996 - 04 - 23 收到第一稿, 1997 - 03 - 05 收到修改稿.

在一篇重要的论文中, J. R. Willis 等^[9]求得了匀速扩展半无限裂纹在任意与时间有关的荷载下的动态权函数. 在一阶摄动理论框架下, 这一权函数被应用来发展一种关系: 即任意扰动的裂纹直线边界与相应应力强度因子的历史关系.

我们在本文中, 借助于 J. R. Willis 的上述结果和 Rice 等的模型方法, 希望了解裂纹前方怎样开始环绕和穿透各种粗糙微粒等非稳定现象. 在本文中, 一初始直线裂纹前缘被周期性分布的异相粒子所“暂时滞留”形成粗糙的裂纹表面, 这些粒子模拟为与介质具有相同弹性特性, 但有较高的断裂韧性. 用半无限裂纹来模拟有限尺寸裂纹, 假定裂纹的长度与粗糙微粒直径相比大得多的话, 是合理的. 数值模拟表明: 在情形 , 振荡性裂纹前缘运动源于应力强度波的建设性-破坏性相互作用. 这些波包括膨胀波、剪切波和瑞利波系, 彼此相互干涉且与裂纹运动边界相互作用, 导致了裂纹前方扩展路径和扩展速度的连续波动.

1 问题提法和权函数

考虑半平面裂纹在无界弹性体中扩展, 传播方向为 x 轴. 在时刻 t 的裂纹前缘位于曲线 $x = a(z, t)$, 假定具有形式 $x = vt + \xi(t, z)$, 其中函数 $\xi(t, z)$ 假定有界, ξ 为小参数. 这样裂纹前缘速度沿 z 轴变化, 裂纹前缘形状偏离直线.

在一阶摄动理论框架下, 与扰动裂纹相应的位移、应力和应力强度因子场可分别表述为 $u_i + u_{i1}, \sigma_{ij} + \sigma_{ij1}$ 和 $K + K_1$, 其中 u_i, σ_{ij} 和 K 分别为 $\xi = 0$ 未扰动裂纹 (直线裂纹) 的解. 即满足:

$$\text{运动方程: } \sigma_{ij,j} = \ddot{u}_i \tag{1}$$

$$\text{初始条件: } u_i(t, x) = 0 \text{ 当 } t = 0 \tag{2}$$

$$\text{边界条件: } \sigma_{yy}(t, x_1, 0^\pm, z) = P(t, x_1, z) \text{ 当 } x_1 < vt \tag{3}$$

$$\text{应力应变关系: } \sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l} \tag{4}$$

依据 Willis J. R. 等的相应扰动应力强度因子场可表述为

$$\text{动效 相应 } K(t, z) = \left[Q * (K) - (Q * K) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} M \right] \text{ 生} \tag{5}$$

其中 “*” 表示关于 t, z 双重卷积.

在本文中我们只考虑 $K = const$ 和 $M = 0$ 的情形 (关于 M 的意义可参阅文 [9, 17]) 从而 $Q * K$ 零, K 与 Q 关系为

$$K(t, z) = K * Q = K[(a(z, t) - a(z, 0)) * Q(t, z)] \tag{6}$$

这里 z_0 表示沿 z 轴某一参考位置, 且对 Q 型问题, 有^[9]

$$Q(t, z) = \frac{1}{2} Q_a(t, z) - Q_c(t, z) - \partial^2 \partial t^2 \left[\frac{F_i(-z_0(t) - z) t H(t - |z|/v - z_0/v)}{z^2} - F_i(0) \right] (t) (z) \tag{7 a}$$

$$Q_a \text{ 的 } = \frac{V}{2a^2} (z) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t H(t - |z|/v - a)}{z^2 (t^2 - z^2/v^2 - a^2)^{1/2}} \right] \tag{7 b}$$

$$Q_c(t, z) = \frac{V}{2c^2} (t) (z) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t H(t - |z|/v)}{z^2 (t^2 - z^2/v^2 - a^2)^{1/2}} \right] \tag{7 c}$$

$$F \left[\frac{1}{|z|} \right] = \frac{b - a}{2|z|} \int_0^1 \ln \left[\frac{Y+Z}{Y-Z} \right] ds \tag{7 d}$$

均周

及

$$= \sqrt{1 - \frac{V^2}{a^2}}, \quad = \sqrt{1 - \frac{V^2}{b^2}}, \quad = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (8a)$$

$$\text{系 } \bar{a} = - \frac{v}{\partial^2 a^2 + i q_a} \quad i q_a = a^{-1} \left[\frac{2}{\partial^2 a^2} - \frac{2}{2} \right], \quad \text{彼} \quad (8b)$$

$$Y = \left(\frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} (1 - \frac{+}{b}) (1 - \frac{-}{b}) \right)^2 \quad (8c)$$

$$Z = 4 \left(\frac{2}{1} + \frac{2}{2} \right) \left((1 - \frac{-}{a}) (1 - \frac{-}{b}) (1 - \frac{+}{a}) (1 - \frac{+}{b}) \right)^{1/2} \quad (8d)$$

$$1 = \frac{-}{a} + (s - 0i) \left(\frac{-}{b} - \frac{-}{a} \right) \quad (8e)$$

$$F \left[- \frac{z}{t} + 0i \right] = F_r \left[- \frac{z}{t} + i F_i \left[- \frac{z}{t} \quad t \right] \right] \quad (8f)$$

其中 a, b, c 分别表膨胀波、剪切波和瑞利波速.

通过方程 (7), 方程 (6) 可表为

$$K(t, z) + K(t, z) = K + K_a - K_c - K_f \quad (9)$$

我们推导三维解为以稳态速度 v_0 运动的二维解的线性摄动结果. 则在 型情形下, 三维解为

$$K = K_0 = k(V_0) K^*, \quad G = G_0 = g(V_0) G^* \quad (10)$$

其中

$$k(V_0) = \frac{1 - \frac{V_0}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V_0}{a}}} \frac{1}{S_+ (1/V_0)}, \quad g(V_0) = 1 - \frac{V_0}{c} \quad (11)$$

K^*, G^* 为静态因子.

方程 (9) 可重写为

$$K(t, z) = k(V) K^* (1 + I_a(z, t) - I_c(z, t) - I_f(z, t)) \quad (12)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} I_a(z, t) &= \frac{1}{2} PV \int \int \frac{t - |z - z'|/a}{(z - z')^2 \sqrt{(t - t')^2 a^2 - (z - z')^2}} \frac{a(t - t')(V(z, t) - V(z, t'))}{(z - z')^2 \sqrt{(t - t')^2 a^2 - (z - z')^2}} dz dt \\ I_c(t, z) &= \frac{1}{2} PV \int \int \frac{t - |z - z'|/c}{(z - z')^2 \sqrt{(t - t')^2 c^2 - (z - z')^2}} \frac{c(t - t')(V(z, t) - V(z, t'))}{(z - z')^2 \sqrt{(t - t')^2 c^2 - (z - z')^2}} dz dt \\ I_f(z, t) &= \frac{1}{2} PV \int \int \frac{t - |z - z'|/a}{(z - z')^2} \frac{(V_t(z - t) - V_t(z, t))(t - t') F_r \left[ia \frac{z - z'}{t - t'} Z \right]}{(z - z')^2} dz dt \end{aligned} \right\}$$

通过整个裂纹运动历史中裂尖前缘速度和加速度差的双重积分表示，这些积分给出了由于裂纹前缘直线形状偏离而产生动态应力强度变化。对这些表达式细致考察表明：在型情形下，激发的波系包括膨胀、剪切和瑞利波。这些波彼此干涉且与裂纹运动边界相互作用，使得应力强度历史表现非常复杂特性^[15,16]。在裂纹传播越过非均匀局部断裂韧性区时，如 Rice 等注意的：建设性和破坏性相互作用可导致裂尖形状和传播速度的连续波动，甚至裂尖在局部均匀断裂韧性材料中扩展时亦是如此。

依据 Rice 等 (1994) 的断裂准则为

$$G(z, t) = G_{crit}(x, z) \quad (14)$$

其中 $x = a(z, t)$ 且 $v(z, t) > 0$ 。这里 $G(z, t)$ 为形成单位新裂纹面积的能量释放率。

利用能量释放率与动应力强度因子间关系我们给出

$$G = G^* g(V) (1 + I_a(z, t) - I_c(z, t) - I_f(z, t))^2 \quad (15)$$

其中 $G^* = \frac{1-v^2}{2E} (K^*)^2$ 为直线裂纹尖缘的静态能量释放率。

由 (20) 和 (21)，空间和时间裂尖运动变化可由下式控制

$$V(z, t) = \begin{cases} c(1 - (z, t)) & (z, t) < 1 \\ 0 & (z, t) \geq 1 \end{cases} \quad (16)$$

$$(z, t) = \frac{G_{crit}(a, z)}{G^* (1 + I_a - I_c - I_f)^2} \quad (17)$$

2 公式的 Fourier 表示

为了瞬态裂纹扩展数值分析目的，把上述结果通过 $a(z, t)$ 关于 z 的 Fourier 变换式表示。利用 $a(z, t)$ ， $v(z, t)$ 和 $v_t(z, t)$ 的富里叶表示

$$\left. \begin{aligned} a(z, t) &= \sum_{n=-N}^N A_n(t) e^{i2\pi n \frac{z}{l}} \\ V(z, t) &= \sum_{n=-N}^N \dot{A}_n(t) e^{i2\pi n \frac{z}{l}} \\ V_t(z, t) &= \sum_{n=-N}^N \ddot{A}_n(t) e^{i2\pi n \frac{z}{l}} \end{aligned} \right\}$$

$$I_n^a(t) = \frac{n}{5} \int_0^t \dot{A}_n(t) F \left[2 n \frac{a(t-t)}{a} \right] dt \tag{20}$$

$$G \quad I_n^c(t) \Rightarrow 0 \frac{2n}{5} \int_0^t \dot{A}_n(t) F \left[2 n \frac{c(t-t)}{a} \right] dt \tag{21}$$

$$I) \quad I_n^f(t) = \frac{1}{a} \int_0^t \ddot{A}_n(t) dt \int_0^1 u^2 F_r(au) \cos(2 n) a \left[\frac{t-t}{a} \right]$$

www.cnki.net

(25)

证实一阶摄动条件 $\dot{A}_n/v_0 \ll 1$, $n \dot{A}_n t / < \ll 1$ 被满足, 类似地步骤计算 $\ddot{A}_n(t)$

(2) 计算下一时间增量的局部裂纹尖缘速度如下:

(a) 利用式 (25), (26) 和 (28) 和 \dot{A}_n , \ddot{A}_n 历史来计算系数 I_n^a , I_n^c 和 $I_n^f(m t)$; 利用 12 点高斯积分, 为消去 I_n^f 表达式中的奇点 0, 采用了三次非线性多项式变换, 改进了精度.

然后重新整理 $\{I_n^*(t)\} \Rightarrow \{I_n^*(t)\}$ 依据上述从 $\{A_n(t)\} \Rightarrow \{\dot{A}_n(t)\}$ 重排规律.

(b) 利用 FFT 反演变换 $I_n(m t)$, ($= a, c, f$) 到 $I(z, m t)$.

(c) 利用公式 (23) 和当前裂尖位置计算下一时间的速度 $v(z, (m+1) t)$.

(3) 利用差分公式计算下一时刻的加速度 $v_t(z, (m+1) t)$

$$v_t(z, (m+1) t) = (v(z, (m+1) t) - v(z, (m) t)) / t \quad (26)$$

(4) 计算下一时刻结束时的局部裂尖位置

$$a(z, (m+1) t) = a(z, m t) + v(z, (m+1) t) / t \quad (27)$$

(5) 输出结果, 检查结束准则 (裂尖最后位置或是否破坏一阶条件); 将时间指数 m 加 1, 回到第一步.

4 结果和讨论

图 1 给出了一周期排列的半径 R 圆形粗糙粒子, 而粗糙粒子中间距离为 L . 本文计算中我们选择 $R/L = 0.1$. 间距为 $= 2L$. 瑞利波速等取为 $c = 0.53851$, $a = 0.93273$ b. 所有计算都已无量纲化.

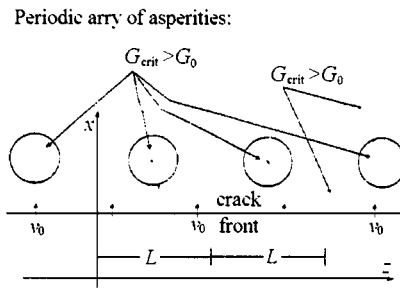


图 1 一具有初始直线形状的半平面裂纹, 在夹杂着周期分布的圆形粒子的介质中快速扩展
 Fig. 1 A half-plane crack with an initially straight front, propagating to contact a periodic row of circular asperities of higher fracture toughness

图 2 给出了裂尖缘在非均匀局部断裂韧性区域中扩展规律. 其中在基本周期 $= 2L$ 域中, $G_{crit}(\text{left}) G_0 = 3.0$ 及 $G_{crit}(\text{right}) G_0 = 2.0$. 其中 $G_{crit}(\text{left})$ 和 $G_{crit}(\text{right})$ 分别表示基本波长

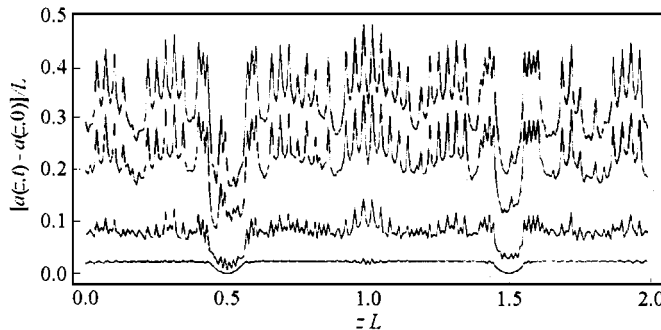


图 2 不同时刻下裂尖坐标 $a(z, t)$ 与 z 的位置关系, 初始速度 $V_0 = 0.3 c$, $G_{crit}(\text{left}) = 3 G_0$, $G_{crit}(\text{right}) = 2 G_0$
 (a) $t = 45 t$; (b) $t = 120 t$; (c) $t = 240 t$; (d) $t = 320 t$. 这里 $t = 1/640$
 Fig. 2 Positions $a(z, t)$ versus z at successive times, for a crack at incoming speed $V_0 = 0.3 c$, hitting an infinite row of asperities with $G_{crit}(\text{left}) = 3 G_0$ and $G_{crit}(\text{right}) = 2 G_0$
 (a) $t = 45 t$; (b) $t = 120 t$; (c) $t = 240 t$; (d) $t = 320 t$. Here $t = 1/640$

$= 2L$ 中左边和右边粗糙粒子的临界能量释放率。 G_0 表示均匀基体能量释放率值。 计算是在 $m = 2N = 256$ 及 $t = /5 cN$ 下进行的。 在初始时刻，一直线裂纹在 $x < 0$ 区域以匀速 $v_0 = 0.3 c$ 传播。 随后粗糙园粒子暂时滞留裂纹扩展。 作为其滞留效应，初始均匀速度分布逐渐波动并出现非稳定特征。 在粒子附近应力强度增大，随后左边较弱的粗糙区域被穿透，进一步裂纹扩展运动右边粒子也被击破。

图 3 给出了当粗糙微粒为椭圆形粒子形状，且初速 $v_0 = 0.45 c$ 的数值结果，表现了类似的规律。

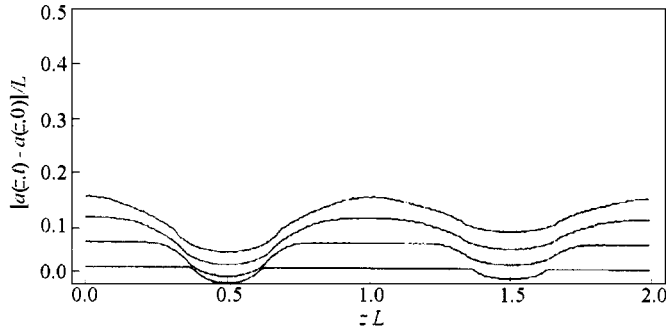


图 3 不同时刻时裂尖坐标 $a(z, t)$ 与 z 的位置关系, 初始扩展速度 $V_0 = 0.45 c$, 左边椭圆粒子位置为 $(z - 0.5)^2/3 + (x - 0.1)^2 \leq 0.1^2$, 且 $G_{crit}(left) = 3 G_0$, 右边椭圆粒子位置为 $G_{crit}(right) = 2 G_0$
(a) $t = 50$ t; (b) $t = 100$ t; (c) $t = 160$ t; (d) $t = 220$ t. 这里 $t = 1/640$

Fig.3 Positions $a(z, t)$ versus z at successive times, for a crack at incoming speed $V_0 = 0.45 C$, hitting an infinite row of elliptical asperities $(z - 0.5)^2/3 + (x - 0.1)^2 \leq 0.1^2$ and $(z - 1.5)^2/3 + (x - 0.1)^2 \leq 0.1^2$ with $G_{crit}(left) = 3 G_0$ and $G_{crit}(right) = 2 G_0$
(a) $t = 50$ t; (b) $t = 100$ t; (c) $t = 160$ t; (d) $t = 220$ t. here $t = 1/640$

通过 型动态权函数和它在扰动裂纹一阶分析的数值模拟，我们观察到：裂纹运动振荡效应，如 Rice 等人注意的，被发现是裂纹尖缘扩展遇到变化断裂韧性区域效应。这些效应还可以通过由裂纹尖端遇到粗糙粒子时激发出并沿裂尖缘运动的应力强度波的建设性-破坏性相互干涉来解释。这些波，包括膨胀、剪切和瑞利波系相互干涉及与运动裂纹边界相互作用，导致了裂纹尖缘的震荡特性。这种非稳定现象可用来作为解释 Gross 等人 (1993) 在 PMMA 材料精细实验中出现几乎规则粗糙表面结构和高频振荡现象及地震学中源时间函数表现的脉冲谱现象的基础。

参 考 文 献

- 1 Gao H, Rice J.R. A first-order perturbation analysis of cracktrapping by arrays of obstacles. *J Appl Mech*, 1989, 56: 828 ~ 836
- 2 Gao H. Surface roughening and branching instabilities in dynamicfracture. *J Mech Phys Solids*, 1993, 41 (3): 457 ~ 486
- 3 Kanamori H, Stewart G.S. Seismological aspects of the Guatemalaearthquake. *J Geophys Res*, 1978, 83: 3427 ~ 3434
- 4 Madariaga R. On the relation between seismic moment and stressdrop in the presence of stress and strength heterogeneity. *J Geophys Res*, 1979, 84: 2243 ~ 2250
- 5 Das S, Aki K. Fault plane with barriers: A versatile earthquakemodel. *J Geophys Res*, 1977, 82: 5658 ~ 5670
- 6 Rudnicki and Kanamori, Effects of fault interaction on moment stress drop and strain energy release. *J Geophys Res*, 1981, 86: 1785 ~ 1793
- 7 Das S, Kostrov B.V. An investigation of the complexity of the earthquake source time function using dynamic faulting models. *J Geophys Res*, 1988, 93 (87): 8035 ~ 8050

- 8 Rice JR, Ben-Zion Y, Kim KS. Three-dimensional perturbation solution for a dynamic planar crack moving unsteadily in a modal elastic solid. *J Mech Phys Solids*, 1994, 42: 813 ~ 843
- 9 Willis JR, Movchan AB. Dynamic weight functions for a moving crack. I. Mode I loading. *J. Mech. Phys. Solids*, 1995, 43: 319 ~ 341
- 10 Freund LB. *Dynamic Fracture Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 1990
- 11 Fineberg J, Gross SP, Marder M, Swinney HL. An instability in the propagation of fast cracks. *Phys Rev B*, 1992, 45: 5146 ~ 5154
- 12 Gross SP, Fineberg J, Marder M, McCormick WD, Swinney HL. Acoustic emissions from rapidly moving cracks. *Phys Rev Lett*, 1993, 71: 3162 ~ 3165
- 13 Kostrov BV. On the crack propagation with variable velocity. *Int J Fract*, 1975, 11: 47 ~ 56
- 14 William H, Press et al. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986
- 15 Li Xiangping, Liu Chuntu. Elastodynamic stress intensity factors for a semi-infinite crack under three-dimensional transient loading. *Scientific Sinica A (Chinese edition)*, 1994, 24 (3): 262 ~ 268 and (*English edition*). 1994, 37 (9): 1053 ~ 1061
- 16 Li Xiangping and Liu Chuntu. Elastodynamic stress intensity factors for a semi-infinite crack under 3-D combined mode loading. *Int J Fract*, 1995, 69: 319 ~ 339

CRACK TRAPPING PHENOMENA IN DYNAMIC CRACK PROPAGATION

Li Xiangping Meng Xianhong Liu Chuntu Wang Kai

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract Using the mode I weight function of Willis et al. (1995) for a moving crack in combination with the model method of Rice et al. the instability phenomena of the crack front, how does it begin to surround and penetrate various arrays of asperities are investigated. The numerical results show that the oscillatory crack tip motion through brittle, locally heterogeneous materials results from constructive-destructive interference of stress waves that can lead to continuing fluctuation of the crack front and propagation velocity.

Key words dynamic fracture, asperity, three-dimension, propagation, perturbation, interaction