第 29 卷 第 3 期　　力 学 学 报　　Vol. 29, No. 3
1997 年 5 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　May, 1997

移动的线源平稳随机荷载激励下梁的随机响应1)

孙　璐　　邓学钧
(南京东南大学交通运输工程系, 南京 210096)

摘要　利用广义 Duhamel 积分和积分变换, 研究了粘弹性 Kelvin 地基上无限长梁在运动的线源平稳随机荷载作用下的随机响应. 发现此时梁的挠度响应为非平稳随机过程. 通过引入随动坐标系, 建立了有明确物理意义的随动谱分析方法, 使随机位移响应在随动坐标系下成为平稳随机过程.

关键词　广义 Duhamel 积分, 随动坐标系, 谱分析移动荷载, 无限长梁

引　言

美国国会 1987 年批准了投资 1.5 亿美元的"战略公路研究计划"(Strategic Highway Research Program, 简称 SHRP 计划), 该计划 1993 年结束后, 国会又追加投资 7 亿美元用于路面长期性能观测. 其中相当大的部分用于地面动力学, 包括路面动力学、桥梁动力学与轨道动力学研究[1,2]. 运动源作用下的连续介质响应也成为国际上关注的焦点. 作为这一领域研究的一部分, 运动点源负荷下梁的振动最早是由 Timoshenko 首先研究的(1926)[3]. 类似的问题又由 Inglis[4], Kenney[5], 李国豪[6]等人加以研究. 弹性地基上的无限长梁、有限长梁在恒定的匀速运动荷载作用下的响应也由 Fryba[7], Steele[8]研究过. 后者采用 Fourier 级数展开方法还处理了无地基梁的动力问题. 最近, 王永平, 陈彦江, 傅金科等人又用实验方法研究了简支梁桥的动力特性[9].

一般来说, 上述研究都只考虑了确定性荷载的情况, 而理论和实验均已表明, 作用在地面结构上的运动车辆荷载是平稳随机过程[2,10]. 本文则着重讨论随机响应的各种统计特性.

1　数学模型

文[2]给出了运动线源随机荷载的数学描述

$$F(x, t; v) = p(t) H[r_0^2 - (x - vt)^2]/2r_0 \tag{1}$$

其中 v 表示源的运动速度, $2r_0$ 为线源荷载的分布长度. $H(\cdot)$ 为 Heaviside 阶跃函数. $p(t)$ 为平稳高斯随机过程. 不妨设随机荷载 $p(t)$ 的功率谱密度和自相关函数分别为 $S_p(\omega)$ 和 $R_p(\tau)$, 其均值和均方值分别为 $\bar{p}$ 和 ψ_p^2.

考虑到 Kelvin 粘弹地基模型比 Winkler 弹性地基模型增加了一个线性阻尼, 文[2]给出了 Kelvin 粘弹性地基上无限长梁的控制方程

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + Ky + C\frac{\partial y}{\partial t} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F(x, t; v) \tag{2}$$

1) 国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助项目.
1996-04-30 收到第一稿, 1996-11-03 收到修改稿.

这里只考虑稳态随机响应,因而初始扰动的影响可以忽略不计. 无穷远处的边界条件则为

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\partial^{(n)}y(x,t)}{\partial x^{(n)}}=0,\quad n=0,1,2,3 \tag{3}$$

方程(1)～(3)就构成了本文所述问题的定解方程.

2　初步分析

按照处理线性偏微分方程的理论,方程(1)～(3)的解可表示为广义 Duhamel 积分

$$y(x,t)=\int_{-\infty}^{t}p(\tau)\,h(x-v\tau,t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{4}$$

式中 h(·)称为梁的线源脉冲响应函数. 证明了表示(4)对荷载变化规律 p(t)并无特别要求.

3　线源脉冲响应函数

梁的线源脉冲响应函数系指梁在下述荷载作用下产生的挠度响应

$$F\delta(x,t)=\delta(t)\,H[r_0^2-x^2]/2r_0 \tag{5}$$

为此我们引入 Fourier 变换和 Laplace 变换的定义. 定义函数 f(t)的 Fourier 变换及其逆变换为

$$\hat{f}(\omega)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

$$f(t)=F^{-1}[\hat{f}(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\,e^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{7}$$

函数 f(t)的 Laplace 变换及其逆变换为

$$\tilde{f}(s)=L[f(t)]=\int_{0}^{\infty}f(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{8}$$

$$f(t)=L^{-1}[\tilde{f}(s)]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\beta-\mathrm{i}\infty}^{\beta+\mathrm{i}\infty}f(s)\,e^{st}\,\mathrm{d}s \tag{9}$$

对方程(2)两边关于 x 和 t 分别进行 Fourier 变换和 Laplace 变换,利用卷积定理,再进行反演,最终可得梁的线源脉冲响应函数

$$h(x,t)=2\gamma e^{-at}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin r_0\omega}{r_0\omega}\cdot\frac{\sin at\sqrt{\omega^4-\phi}}{\sqrt{\omega^4-\phi}}e^{\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\omega\quad(c\le 2\sqrt{mk}) \tag{10}$$

$$h(x,t)=2\gamma e^{-at}\left[\int_{0}^{\sqrt[4]{\phi}}\frac{\sin r_0\omega}{r_0\omega}\frac{\mathrm{sh}\,at\sqrt{\phi-\omega^4}}{\sqrt{\phi-\omega^4}}e^{\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\omega+\int_{\sqrt[4]{\phi}}^{\infty}\frac{\sin r_0\omega}{r_0\omega}\frac{\sin at\sqrt{\omega^4-\phi}}{\sqrt{\omega^4-\phi}}e^{\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\omega\right. \tag{11}$$

下文为节省篇幅,仅以(10)式形式为基础.

4　随机响应统计特性

把(10)式代入(4)式得梁在任意运动线源下的响应

$$y(x,t)=2\gamma\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}p(t-\theta)\frac{\sin r_0\omega}{r_0\omega}\cdot\frac{\sin a\theta\sqrt{\omega^4-\phi}}{\sqrt{\omega^4-\phi}}e^{\mathrm{i}\omega(x-vt+v\theta)}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\omega \tag{12}$$

其中$\gamma=(2\pi ma)^{-1}$, $a=\sqrt{EI/m}$, $\Phi=(c^2-4mk)/4mEI$. 对(12)式两边取数学期望,可得随机响应的平均函数

$$E[y(x,t)]=2\gamma\bar{p}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\sin r_0\omega}{r_0\omega}\frac{\sin a\theta\sqrt{\omega^4-\Phi}}{\sqrt{\omega^4-\Phi}}e^{i\omega(x-vt+v\theta)}e^{-a\theta}\mathrm{d}w\,\mathrm{d}\theta \tag{13}$$

时间自相关函数为

$$\begin{aligned}R_y[x;t_1,t_2]=&4\gamma^2\iiiint_0^\infty R_p(t_2-t_1+\theta_1-\theta_2)e^{-a(\theta_1+\theta_2)}e^{i(\omega_1+\omega_2)x}\cdot\\&e^{-i\omega_1v(t_1-\theta_1)}e^{-i\omega_2v(t_2-\theta_2)}\frac{\sin r_0\omega_1}{r_0\omega_1}\frac{\sin a\theta_1\sqrt{\omega_1^4-\Phi}}{\sqrt{\omega_1^4-\Phi}}\cdot\\&\frac{\sin r_0\omega_2}{r_0\omega_2}\cdot\frac{\sin a\theta_2\sqrt{\omega_2^4-\Phi}}{\sqrt{\omega_2^4-\Phi}}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\end{aligned} \tag{14}$$

注意到平均函数(13)式中含有时间项,并且自相关函数(14)式无法表示成只与时差t_2-t_1有关的形式,从而得出结论此时的随机响应是非平稳过程,这一点与文[11]是一致的.

5 随动谱分析

普通的谱分析技术(指应用于平稳过程)无法用于分析本文的非平稳随机响应. 一种常规的方法是引入非平稳过程谱分析,但该法很难找到明确的物理解释[12]. 本文建立一种新的思路用于解决这个问题. 为此考虑下面的一个随动坐标系$\xi=x-vt$. 从此式可见,随动坐标系的坐标原点始终建立在运动荷载的中心,并随之同步运动.

考虑随动坐标系中固定场点ξ处随机响应的平均函数和时间自相关函数. 为此,只须把式(13)和(14)中的空间变量x以ξ代入,即得

$$E[y(\xi,t)]=2\gamma\bar{p}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\sin r_0\omega}{r_0\omega}\frac{\sin a\theta\sqrt{\omega^4-\Phi}}{\sqrt{\omega^4-\Phi}}e^{i\omega(x+v\theta)}e^{-a\theta}\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\theta \tag{15}$$

$$\begin{aligned}R_y[\xi;t_1,t_2]=&4\gamma^2\iiiint_0^\infty R_p(t_2-t_1+\theta_1-\theta_2)e^{i(\omega_1+\omega_2)x}e^{-a(\theta_1+\theta_2)}\cdot\\&e^{iv(\omega_1\theta_1+\omega_2\theta_2)}\frac{\sin r_0\omega_1}{r_0\omega_1}\cdot\frac{\sin a\theta_1\sqrt{\omega_1^4-\Phi}}{\sqrt{\omega_1^4-\Phi}}\cdot\\&\frac{\sin r_0\omega_2}{r_0\omega_2}\frac{\sin a\theta_2\sqrt{\omega_2^4-\Phi}}{\sqrt{\omega_2^4-\Phi}}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\end{aligned} \tag{16}$$

可见平均函数$E[y(\xi,t)]$成为只与x有关的函数,在场点x确定之后,平均函数即为常数. 而相关函数也可以表示成$R_y[\xi,t_2-t_1,x]$的形式. 这两点使得随动坐标系中固定场点的位移响应成为平稳随机过程. 此时谱分析技术可用.

注意到谱密度与自相关函数互为一对 Fourier 变换,因此随动谱密度最终可表示为

$$S_y(\xi,\omega;v)=|H(x,\omega;v)|^2S_p(\omega) \tag{17}$$

式中$H(x,\omega;v)$表示梁的频率响应函数(随动坐标系下的), 其表达式为

$$H(x,\omega;v)=2\gamma\iint_0^\infty\frac{\sin r_0\omega}{r_0\omega}\frac{\sin a\theta\sqrt{\omega_0^4-\Phi}}{\sqrt{\omega_0^4-\Phi}}e^{i\omega_0(x+v\theta)}e^{-a\theta}e^{-i\omega\theta}\mathrm{d}\omega_0\,\mathrm{d}\theta \tag{18}$$

我们知道,梁对固定位置的平稳随机荷载的响应也是平稳过程. 此时随机响应的谱密度系指对固定坐标系中的某一固定场点在不同时刻的响应取值的谱分析,它表示该场点随机响应按照不同频率结构的能量分布,具有明确的物理意义. 而随动谱分析则与之有本质区别. 从(15)式和(16)两式知,随动谱密度是指随动坐标系中的固定场点或者指固定坐标系中不同场点(这些场点共线)在某一时刻的随机响应的频率结构和能量组成. 实际为空间谱分析. 由于本文中的梁具有均匀性,因此这些共线场点除了其空间坐标有所不同以外,它们的各种物理性质都是相同的,因此对随动谱分析而言,我们完全可以把它看作是固定坐标系中某一固定场点在某一时刻取值(然后沿空间延拓)的谱分析. 由此可见,随动谱分析具有明确的物理背景,可以用于地面结构的进一步分析.

参 考 文 献

1 交通部重庆科学研究所译. 美国 SHRP 计划概要. 人民交通出版社,1995:5～11
2 孙璐. 运动车辆随机荷载及其激励下地面动力响应的理论研究. 东南大学博士学位论文,1996: 1～16
3 Timoshenko S. Method of Analysis of Static and Dynamic Stress in Rail. Proc. of the Seco. Inter. Con. for Appl. Mech., Zurich, Switzerland, 1926: 407～418
4 Inglis CE. A Mathematical Treatise on Vibration in Railway Bridge. Cambridge, Univ. Press, 1934
5 Kenney J T. Steady-State Vibration of Beam on Elastic Foundation for Moving Load. J of Appl Mech, 1954, 21(4): 359～364
6 李国豪. 桥梁结构稳定与振动. 中国铁道出版社,1993: 286～311
7 Fryba L. Infinite beam on an elastic foundation subjected to a moving load. Aplikace Mathematiky, 1957, 2(2): 1105～1132
8 Steele CR. The finite beam with a moving load. J of Appl Mech, ASME, 1967: 111～119
9 王永平,陈彦江,傅金科. 单车荷载下简支梁桥的动力特性和响应的试验研究. 土木工程学报,1995, 28(5)
10 Deng XJ, Sun L. Dynamic vertical loads generated by vehicle-pavement interactions. Advances in Transportation, Systems. Canadian Society of Mechanical Engineers Forum 96, Ontario, 1996
11 孙璐,邓学钧. 弹性基础无限大板对移动荷载的动力响应. 力学学报,1996,28(6)
12 朱位秋. 随机振动. 科学出版社,1992

RANDOM RESPONSE OF BEAM UNDER MOVING RANDOM LOAD IN THE LINE SOURCE FORM

Sun Lu Deng Xuejun

(*Southeast University, Transportation College, Nanjing* 210096, *China*)

Abstract By using generalized Duhamel's integral and integral transform, this paper investigates random response of an infinite beam on the Kelvin viscoelastic foundation subjected to a moving load. It's found that displacement response of the beam is a non-stationary random process even if the moving load is a stationary process. The follow-up coordinate system is established to make the displacement became a stationary random process.

Key words generalized Duhamel's integral, follow-up coordinate system, spectral analysis, moving load, infinite beam