第 29 卷 第 2 期　　力　学　学　报　　Vol. 29, No. 2
1997 年 3 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　March, 1997

Reissner 板的哈密尔顿体系及其辛正交解析法

邹贵平
(同济大学工程力学与技术系, 上海 200092)

摘要　基于 Reissner 板理论, 通过对混合能变分原理的修正, 建立了更一般的哈密尔顿型广义变分原理, 并给出了 Reissner 板问题的哈密尔顿正则方程及其共轭辛正交解析法.

关键词　哈密尔顿　正则方程, 共轭辛正交, Reissner 板

引　　言

过去在解析求解偏微分方程时, 常用分离变量法, 然后用 Sturm - Liouville 本征问题的解作为子空间的基底函数, 但若控制方程中出现了奇数次偏导数时, 一般就无法分离变量了. 既使硬用分离变量的形式代入方程, 也会导致非 Sturm - Liouville 本征问题, 而不能保证本征函数的正交性和完备性. 文献 [1] 从势能原理出发, 引进对偶变量, 将条形域平面弹性问题导向哈密尔顿体系, 很好地解决了这一问题. 本文则进一步将哈密尔顿体系的理论与方法引入到 Reissner 板的分析之中, 通过对混合能变分原理的修正, 建立了更一般的哈密尔顿型广义变分原理和哈密尔顿正则方程, 因此就可以在全状态空间中选用子空间, 这样就保证原问题的本征解不变, 并采用共轭辛正交归一关系给出按本征对展开的解析法, 从而拓广了 Sturm - Liouville 问题及按本征对展开的解析方法.

1　Reissner 板的哈密尔顿正则方程

基于 Reissner 板理论, 将坐标 y 模拟时间以建立哈密尔顿体系, 写出修正后的哈密尔顿型广义变分泛函为

$$\pi_R^* = \iint_\Omega \{ p^T \cdot \dot{q} - \nu \} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_S R\mathrm{d}S \tag{1}$$

其中 R 为能量边界项

$$\left.\begin{array}{l} p = (-M_y, -M_{xy}, Q_y)^T, \qquad q = (\phi_y, \phi_x, w)^T, \qquad \dot{q} = \partial q / \partial y \\ \nu = -p^T F^T q - \dfrac{1}{2} q^T K q + \dfrac{1}{2} p^T C p + q^T f \qquad)1 \end{array}\right\}$$

;

(

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

1995 - 05 - 20 收到第一稿, 1995 - 08 - 07 收到修改稿.

引入全状态变量 $Y=(p^T, q^T)^T$, 及换位算子矩阵

$$J=\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad J^{-1}=J^T=-J \tag{5}$$

97

其中 I 是单位矩阵, 则有

$$\dot{Y}=J^{-1}\frac{\partial \iota}{\partial Y}=HY+Q \tag{6}$$

式中 $H=\begin{bmatrix} F & K \\ C & -F^T \end{bmatrix}$ 且有关系式 则 哈密 方程

$$JHJ=H^T=\begin{bmatrix} F^T & C \\ t\ K & ,-然F \quad ur \end{bmatrix} \tag{7}$$

这说明哈密尔顿算子矩阵 H 将全状态变量变换到全状态变量; H^T 则将共轭全状态变量变换到共轭全状态变量; J 将全状态变量变换到共轭全状态变量.

2 共轭辛正交解析法

考虑 x 对边简支的矩形板, 它的边界条件为

$$W=\phi_y=M_x=0 \qquad (x=0, a \text{ 边}) \tag{8}$$

故采用分离变量法[1], 全状态变量假设为

$$\left.\begin{aligned} W&=\sum_{m=1}^{\infty}W_{,m}(y)\sin, ax, & \phi_x&=\sum_{m=1}^{\infty}\phi_{x,m}(y)\cos ax \\ \phi_y&=\sum_{m=1}^{\infty}\phi_{y,m}(y)\sin ax, & Q_y&=\sum_{m=1}^{\infty}Q_{y,m}(y)\sin ax \\ M_y&=\sum_{m=1}^{\infty}M_{y,m}(y)\sin ax, & M_{xy}&=\sum_{m=1}^{\infty}M_{xy,m}(y)\cos ax \end{aligned}\right\}$$

式中

$$F_m = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & -1 \\ -\mu\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Y00} \end{bmatrix}, \quad C_m = \begin{bmatrix} 1/D & 0 & 0 \\ 0 & 2/D(1-\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 1/Gkh \end{bmatrix}$$

$$K_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Gkh + D(1-\mu^2)\alpha^2 & -Gkh\alpha \\ 0 & -Gkh\alpha \quad \mathrm{C} & Gkh\alpha^2 \end{bmatrix}$$

其中 $D = Eh^3/12\ (1-\mu^2)$，$G = E/2\ (1+\mu)$，k 为剪切修正系数．式（11）的本征问题为

$$\mu_i Y_{mi}(y) = H_m Y_{mi}(y) \tag{13}$$

其中 μ_i 是待求的本征值．由文献［1，4］可知，哈密尔顿算子矩阵的本征值可以自然地分为两组

$$(a)\ \mu_{ai}, \qquad Re(\mu_{ai}) \leqslant 0\ ; \qquad (b)\ \mu_{bi} = -\mu_{ai} \tag{14}$$

其加权共轭辛正交归一关系为

$$\left.\begin{array}{llll} (a) & 如\ \mu_{\neq} -\mu_j, & 则\ Y_{mi}^T J Y_{mj} = 0 & \\ (b) & 如\ \mu_i = -\mu_j, & 则\ Y_{mi}^T J Y_{mj} = 1 & 或者\ Y_{mj}^T J Y_{mi} = -1 \end{array}\right\}$$

其中 C_{ai}，C_{bi}是与边界条件有关的待定常数．这样就得到全状态变量的解答为

$$Y_m(y) = \sum_{m=1}^{\infty}\{[C_{ai}e^{\mu_i y} - Y_{mbi}^T Q_m(y)/\mu_i] Y_{mai} + [C_{bi}e^{-\mu_i y} + Y_{mai}^T Q_m(y)/\mu_i Y_{mbi}\} \quad (21)$$

3　数值算例

考虑矩形方板，受均布荷载 Q_0 作用，其弹性常数取 $\mu = 0.3$，为了研究各种边界条件的影响，我们分三种支承情况进行讨论：(1) 四边简支；(2) 对边简支，对边固支；(3) 对边简支，对边自由．表 1 给出不同厚宽比下，三种支承情况下的位移和弯矩．表中 *Mindlin* 解析解[2,3]采用的是级数解，Kant [3]给出的是高阶理论有限元解．

表 1　均布荷载作用下和不同厚宽比下方板的位移和弯矩

Table 1　Comparison of moments and center deflections of different ratio of thick/ width subjected to uniformally load

h/a		0.01	0.10	0.20
quadrilateral simply supported				
$W_{\max} Eh^3/Q_0 a^4) \times 10^2$	this paper solution	4.44	4.66	5.24
	Mindlin analytical solution	4.43	4.66	5.24
	high order theoretical solution	4.44	4.46	5.24
$[(M_y)_{max}/Q_0 a^2] \times 10^2$	this paper solution	4.79	4.81	4.82
	Mindlin analytical solution	4.79	4.79	4.79
	high order theoretical solution	4.71	4.72	4.71
a couple of simply supported, a couple of clamped				
$(W_{\max} D/Q_0 a^4) \times 10^3$	this paper solution	1.92	2.22	3.04
	Mindlin analytical solution	1.92	2.21	3.02
	high order theoretical solution	1.92	2.18	2.93
$[(M_y)_{\max}/Q_0 a^2] \times 10^2$	this paper solution	2.44	2.58	2.94
	Mindlin analytical solution	2.44	2.58	2.92
	high order theoretical solution	2.44	2.60	3.01
a couple of simply supported, a couple of free				
$(W_{\max} D/Q_0 a^4) \times 10^2$	this paper solution	1.31	1.35	1.46
	Mindlin analytical solution	1.31	1.34	1.43
	high order theoretical solution	1.31	1.34	1.45
$[(M_y)_{\max}/Q_0 a^2] \times 10$	this paper solution	1.22	1.22	1.23
	Mindlin analytical solution	1.22	1.22	1.23
	high order theoretical solution	1.22	1.22	1.23

4　结束语

本文将 Reissner 板问题导向哈密尔顿体系，突破了欧几里德度量空间的限制，在辛几何空间中采用共轭辛正交关系给出精确解，显示出巨大的优越性．可以预计，关于弹性力学辛算法的研究将有广泛的应用前景．

参 考 文 献

1 **钟万勰. 条形域平面弹性问题与哈密尔顿体系. 大连理工大学学报**, 1991, 31 (4) : 373384

2 Mindlin RD. The influence of rotatory inertia and shear on theflexural motions of isotropic elastic plates. *J. Applied Mechanics*, 1951, 10 : 31～38

3 Kant T. Numerical analysis of thick plates. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engng.*, 1982, 31 : 1～18

4 Van Loan C. A symplectic method for approximating all the eigenvales of a Hamiltonian matrix. *Linear Algebra and ItsApplication*, 1984, 61 : 233～251

THE HAMILTON SYSTEM AND ANALYTICAL SYMPLECTIC SOLUTION FOR REISSNER PLATES

Zou Guiping

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072 *China)*

Abstract Based on the Reissner plate theory, and by modifying the mixed variational principle, the Hamilton type generalized variational principle is established, and the Hamilton canonical equations and the analytical symplectic solution are also presented.

Key words Hamilton canonical equation, adjoint ortho - organization symplectic method, Reissner plates